

## 4

### Inexistência de órbitas do tipo $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$

Para provar a inexistência de órbitas do tipo  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$  primeiro procederemos como no capítulo anterior, ou seja, começaremos supondo por absurdo que exista uma folha que possua um toro  $\mathbb{T}^2$  mergulhado nela, i.e., tenha duas direções  $\{v_1, v_2\}$  nas quais ela é compacta.

Denotemos por  $V$  o espaço bidimensional no espaço do cobrimento da folha, cujo levantamento forma a parte compacta da órbita. Após analisar como este espaço  $V$  pode interceptar os sub-espços canônicos  $\langle Y_1, Y_2 \rangle$  e  $\langle Y_3, Y_4 \rangle$  conseguimos classificar os seguintes casos:

**Primeiro caso:** Se

$$\begin{aligned} \dim\{V \cap \langle Y_1, Y_2 \rangle\} &= 2 & e & & \dim\{V \cap \langle Y_3, Y_4 \rangle\} &= 0 \\ \text{então } \langle Y_1, Y_2 \rangle \subset V & \text{ e podemos tomar } & V_1 = Y_1 & \text{ e } & V_2 = Y_2. \end{aligned}$$

**Segundo caso:** este caso é análogo ao primeiro. Se

$$\begin{aligned} \dim\{V \cap \langle Y_1, Y_2 \rangle\} &= 0 & e & & \dim\{V \cap \langle Y_3, Y_4 \rangle\} &= 2 \\ \text{então } \langle Y_3, Y_4 \rangle \subset V & \text{ e podemos tomar } & V_1 = Y_3 & \text{ e } & V_2 = Y_4. \end{aligned}$$

**Terceiro caso:** o caso mais geral é quando  $V \subset \{\langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \rangle\}$  então podemos tomar  $V_1 = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4$  e  $V_2 = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4$  onde os  $a_i, b_i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são números racionais com os vetores  $(a_1, a_2), (b_3, b_4)$  não nulos.

O espaço  $V$  gerado pelos campos  $\{V_1, V_2\}$ , correspondentes aos vetores  $\{v_1, v_2\}$  são as direções onde a folha é compacta. Notemos que a escolha dos campos  $V_i$  que geram  $V$  foram feitas segundo estas condições.

Repare que agora os campos  $\{V_1, V_2\}$  nem sempre são combinações lineares das direções canônicas  $\{Y_1, Y_2\}$  e  $\{Y_3, Y_4\}$  respectivamente, (vide os dois primeiros casos e compare com os casos do capítulo anterior) mas o terceiro caso pode ser tratado como na demonstração do último capítulo devido a que temos as condições necessárias para chegar a uma contradição. Logo o problema atual seria o de analisar os dois primeiros casos. Analogamente, veremos que por propriedades topológicas vamos obter equações parecidas às anteriores e a partir destes dados, a órbita, que tem duas direções nas quais é

compacta, deverá, ou se deslocar quase horizontalmente, i.e., movimentar-se na coordenada  $z_1$ , ou quase verticalmente i.e., movimentar-se na coordenada  $z_2$ , em relação às funções que descrevem a holonomia nas direções não compactas. Assim restaram estas possibilidades a serem analisadas.

Devemos tomar em conta que ao falarmos de movimentos verticais (ou horizontais) não estamos nos referindo ao significado usual, i.e. o movimento vertical transversal à folha como o usado por N. Saldanha em (Sal). Estas deslocamentos são de fato com respeito ao plano  $\{z_1, z_2\}$ .

#### 4.1

##### Holonomia de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$

Fixemos o ponto origem  $p$  pertencente a variedade  $M$ , seja  $F_p$  a órbita que passa por este ponto e  $\mathbb{T}_0^2 \subset F_p$  o toro que contém o ponto  $p$  e está mergulhado na órbita  $F_p$ . Consideremos os vetores unitários  $\{v_1, v_2\}$  e suas respectivas curvas  $\alpha_i(t) = tv_i$  que fazem parte do grupo fundamental de  $\mathbb{T}^4$  e tal que seus respectivos levantamentos  $\gamma_i(t)$  na órbita a partir do ponto  $p$  são fechadas. Seja  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  uma base para  $\mathbb{R}^4$  contendo os vetores anteriores e com a mesma condição de que cada um dos vetores seja combinação linear, com coeficientes racionais, dos vetores canônicos. Temos que as curvas  $\alpha_i(t) = tv_i$  formam  $\pi_1(\mathbb{T}^4)$ .

**Definição 4.1** *Seja  $p$  o ponto origem e  $F_p$  a órbita que contém este ponto e a qual é compacta no mínimo nas duas direções  $\{v_1, v_2\}$ .*

*Seja  $\mathbb{T}_0^2$  o toro mergulhado na órbita  $F_p$  que contém o ponto  $p$  e que vem a ser o levantamento de  $\mathbb{T}^2 \times 0 = \langle \{v_1, v_2\} \rangle \subset \mathbb{R}^4$ . Para cada ponto  $x = (y_1, y_2, 0, 0, z_1, z_2) \in \mathbb{T}_0^2$  definimos as curvas  $\alpha_i(x)(t) = tv_i + \bar{x}$ ;  $t \in [0, 1]$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$  em  $\mathbb{T}^2 \times 0$ , onde  $\bar{x} = (y_1, y_2, 0, 0)$ , e seu respectivo levantamento  $\gamma_i(x)(t)$  em  $\mathbb{T}_0^2 \subset F_p$ .*

*Agora definamos a aplicação que descreve a holonomia da folha  $F_p$  para cada ponto  $(y_1, y_2, 0, 0, z_1, z_2)$  de  $\mathbb{T}_0^2$ . Com respeito a direção  $v_j$ ;  $j = 3, 4$ , tem-se:*

$$\begin{aligned} f^j : \mathbb{T}_0^2 &\longrightarrow \mathbb{T}_{j-2}^2 \\ x &\longmapsto f^j(x) = \gamma_j(x)(1) \end{aligned}$$

$\mathbb{T}_{j-2}^2$  é o toro que também está mergulhado em  $F_p$  e que vem a ser o conjunto formado pelos pontos  $\gamma_j(x)(1)$  para cada  $x \in \mathbb{T}_0^2$

Em virtude de  $\tilde{\theta}$  ser uma perturbação  $C^1$ -próxima de  $\theta_0$  então os  $f^j$  ;  $j = 3, 4$  são  $C^1$ -próxima da identidade.

**Definição 4.2** Para cada ponto em  $\mathbb{T}_0^2$  se faz corresponder sua respectiva coordenada  $(z_1, z_2)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{T}_0^2 &\longrightarrow Proj_{z_1, z_2}(\mathbb{T}_0^2) \\ (y_1, y_2, 0, 0, z_1, z_2) &\longmapsto (z_1, z_2) \end{aligned}$$

onde  $Proj_{z_1, z_2}(\mathbb{T}_0^2)$  denota a projeção do toro  $\mathbb{T}_0^2$  no plano  $Z_1, Z_2$ . Como definido, cada ponto  $(y_1, y_2, 0, 0, z_1, z_2)$  pertence a folha  $F_p$ .

Tomemos as curvas que fazem parte do grupo fundamental do toro  $\pi_1(\mathbb{T}^4)$ , denotadas por  $\alpha_i(t) = tV_i$  ;  $t \in [0, 1]$  para  $i = 1, 2$  ; estas curvas estão direcionadas de tal forma que seus respectivos levantamentos na folha  $F_p$  a partir do ponto  $p$  são compactas, denotemos a tais levantamentos por

$$\gamma_i(t) = tV_i + \varphi(tV_i)$$

Agora se caminhamos pela folha nas direções não compactas  $\{V_3, V_4\}$  chegaremos à formação de novas curvas

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_i(t) &= tV_i + f^3(\varphi(tV_i)) \\ \hat{\gamma}_i(t) &= tV_i + f^4(\varphi(tV_i)) \end{aligned}$$

Tanto  $\gamma_i, \tilde{\gamma}_i$  como  $\hat{\gamma}_i$  são levantamentos de  $\alpha_i$  em  $\mathbb{T}_0^2, \mathbb{T}_1^2$  e  $\mathbb{T}_2^2$  respectivamente.

Em virtude da órbita ser compacta nas duas direções acima então por propriedades topológicas podemos obter as seguintes igualdades em integrais análogas ao capítulo anterior:

$$0 = \int_0^1 [\tilde{\vartheta}(\tilde{\gamma}_i(t), \tilde{\gamma}'_i(t)) - \tilde{\vartheta}(\gamma_i(t), \gamma'_i(t))] dt \quad \dots(1)$$

$$0 = \int_0^1 [\tilde{\vartheta}(\hat{\gamma}_i(t), \hat{\gamma}'_i(t)) - \tilde{\vartheta}(\gamma_i(t), \gamma'_i(t))] dt \quad \dots(2)$$

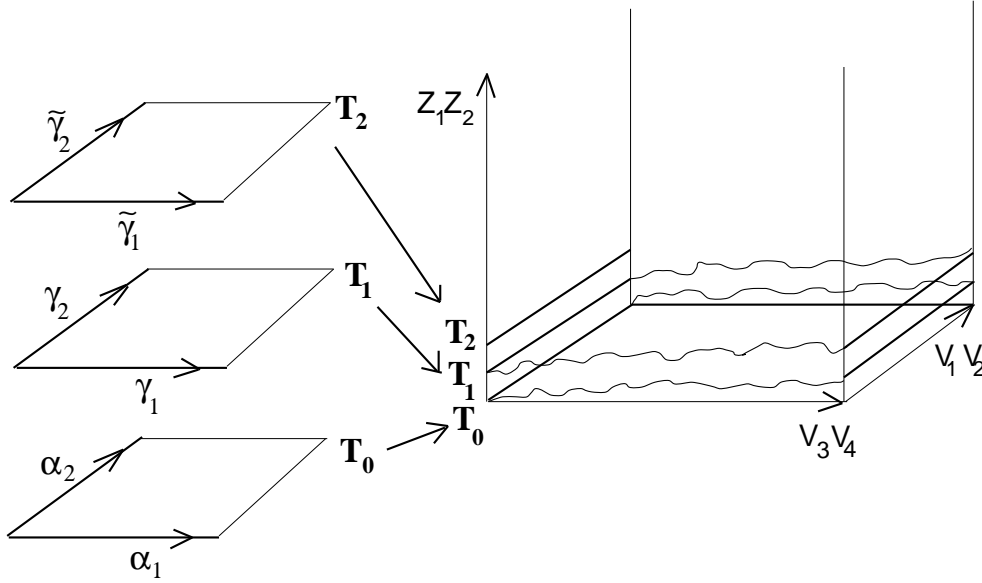


Figura 4.1: Levantamentos dos  $\alpha_i$  em  $F_p$

E de (1) e (2) resulta (3):

$$0 = \int_0^1 [\tilde{\vartheta}(\hat{\gamma}_i(t), \hat{\gamma}'_i(t)) - \tilde{\vartheta}(\tilde{\gamma}_i(t), \tilde{\gamma}'_i(t))] dt \quad \dots(3)$$

Estas igualdades para  $i = 1, 2$ . Agora se denotamos:

$$\begin{aligned} \varphi(tV_3) &= (z_{11}(t), z_{12}(t)) & \varphi(tV_4) &= (z_{21}(t), z_{22}(t)) \\ f^3(\varphi(tV_1)) &= (\tilde{z}_{11}(t), \tilde{z}_{12}(t)) & f^3(\varphi(tV_2)) &= (\tilde{z}_{21}(t), \tilde{z}_{22}(t)) \\ f^4(\varphi(tV_1)) &= (\hat{z}_{11}(t), \hat{z}_{12}(t)) & f^4(\varphi(tV_2)) &= (\hat{z}_{21}(t), \hat{z}_{22}(t)) \end{aligned}$$

Temos os seguintes dados iniciais :

$$\begin{aligned} p_0 &= (z_{11}(0), z_{12}(0)) = (z_{11}(1), z_{12}(1)) = (z_{21}(0), z_{22}(0)) = (z_{21}(1), z_{22}(1)) \\ p_1 &= (\tilde{z}_{11}(0), \tilde{z}_{12}(0)) = (\tilde{z}_{11}(1), \tilde{z}_{12}(1)) = (\tilde{z}_{21}(0), \tilde{z}_{22}(0)) = (\tilde{z}_{21}(1), \tilde{z}_{22}(1)) \\ p_2 &= (\hat{z}_{11}(0), \hat{z}_{12}(0)) = (\hat{z}_{11}(1), \hat{z}_{12}(1)) = (\hat{z}_{21}(0), \hat{z}_{22}(0)) = (\hat{z}_{21}(1), \hat{z}_{22}(1)) \end{aligned}$$

e os vetores

$$\begin{aligned} w_1 &= p_1 - p_0 \\ w_2 &= p_2 - p_0 \\ w_3 &= p_2 - p_1 = w_2 - w_1 \end{aligned}$$

**Afirmção 4.3** *As aplicações  $f^3$  e  $f^4$  definidas para uma vizinhança  $B_p$  de  $p$ , que descrevem a holonomia da órbita, ou se deslocam quase horizontalmente (no eixo  $z_1$ ) ou quase verticalmente (no eixo  $z_2$ ) simultâneamente.*

**Prova**

Primeiro, como no capítulo anterior, analisemos a equação (1) (A análise da equação (2) é análoga).

Se  $w_1 = (r_1, s_1)$  e  $w_2 = (r_2, s_2)$  então por cálculos análogos feitos no capítulo anterior obtemos que para  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^1 \left[ \tilde{\vartheta}(\tilde{\gamma}_i(t), \tilde{\gamma}'_i(t)) - \tilde{\vartheta}(\gamma_i(t), \gamma'_i(t)) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[ \tilde{\vartheta}_{(tV_i + f_{(tV_i)}^3(\varphi(tV_i)))(\tilde{\gamma}'_i(t))} - \tilde{\vartheta}_{(tV_i + \varphi(tV_i))}(\gamma'_i(t)) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[ \tilde{\vartheta}_{\tilde{\gamma}_i(t)}(\tilde{\gamma}'_i(t)) - \tilde{\vartheta}_{\gamma_i(t)}(\gamma'_i(t)) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[ D\tilde{\theta}_{\tilde{\gamma}_i(t)}^{-1}(\tilde{\gamma}'_i(t)) - D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1}(\gamma'_i(t)) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[ D\tilde{\theta}_{\tilde{\gamma}_i(t)}^{-1} - D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1} \right] (\tilde{\gamma}'_i(t)) dt + \int_0^1 D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1} (\tilde{\gamma}'_i(t) - \gamma'_i(t)) dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ D^2\tilde{\theta}_{(\varsigma\tilde{\gamma}_i(t) + (1-\varsigma)\gamma_i(t))}^{-1}(\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t)) \right] \cdot (\gamma'_i(t)) d\varsigma dt \\
 &\quad + \int_0^1 D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1} (\tilde{\gamma}'_i(t) - \gamma'_i(t)) dt \\
 &\simeq \int_0^1 \int_0^1 \left( D^2(\theta_0)_p^{-1}(w_1) \right) \cdot V_i d\varsigma dt + \int_0^1 (D\theta_0)_p^{-1}[0] dt \\
 &= 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} r_1 \sin 2\pi z_1 & -r_1 \cos 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ r_1 \cos 2\pi z_1 & r_1 \sin 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 \sin 2\pi z_2 & -s_1 \cos 2\pi z_2 \\ 0 & 0 & s_1 \cos 2\pi z_2 & s_1 \sin 2\pi z_2 \end{pmatrix} V_i d\varsigma dt \\
 &= 2\pi \int_0^1 \int_0^1 W_i d\varsigma dt
 \end{aligned}$$

Se os vetores na direção onde a folha é compacta fossem sempre da forma

$$\begin{aligned}
 V_1 &= a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 \\
 V_2 &= b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4
 \end{aligned}$$

com  $(a_1, a_2)$  e  $(b_3, b_4)$  sendo vetores não nulos, caímos no caso do capítulo anterior e assim chegamos a uma contradição com os mesmos argumentos

usados no capítulo anterior. Mas há casos (os dois primeiros) em que os campos não têm necessariamente esta forma e estes são descritos a seguir:

(i) O primeiro caso quando

$$\begin{aligned} V_1 &= aY_1 \\ V_2 &= bY_2 \end{aligned}$$

e o vetor  $w_1 \simeq (0, s)$  que indica a diferença inicial de deslocamento das funções  $f_3$  e  $f_4$  nas direções  $V_3$  e  $V_4$  respectivamente.

(ii) O segundo caso quando

$$\begin{aligned} V_1 &= aY_3 \\ V_2 &= bY_4 \end{aligned}$$

e o vetor  $w_1 \simeq (r, 0)$  que indica a diferença inicial de deslocamento das funções  $f_3$  e  $f_4$  nas direções  $V_3$  e  $V_4$  respectivamente.

Em ambos os casos deve haver o mesmo tipo de deslocamento, ou seja, tanto  $f^3$  como  $f^4$  se trasladam quase horizontalmente (ie os vetores  $w_1$  e  $w_2$  são da forma  $w_i \simeq (r, 0)$ ) ou quase verticalmente (os vetores  $w_1$  e  $w_2$  são da forma  $w_i \simeq (0, s)$ ). Chegamos a estas conclusões analisando as equações (1) e (2) e, como consequência da terceira equação, análoga as anteriores, podemos concluir que  $w_3$  também tem uma direção próxima as de  $w_1$  e  $w_2$ .

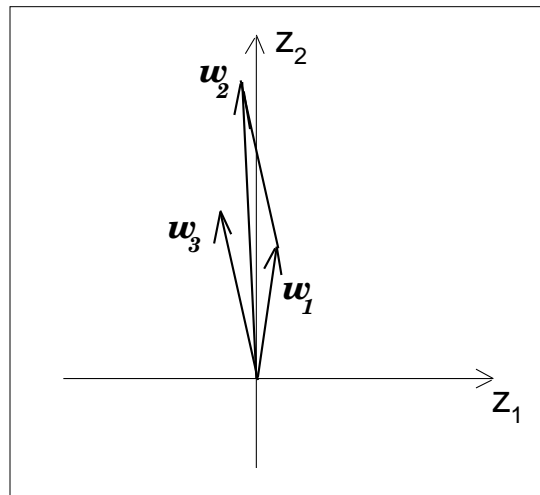


Figura 4.2:  $w_i \simeq (r, 0)$  para  $i = 1, 2, 3$

□

Dos casos a analisar vamos escolher o primeiro, i.e., quando  $f^3$  e  $f^4$  se deslocam quase verticalmente (eixo  $z_2$ ). Para tal caso fixemos um ponto  $p$  e  $f^3, f^4$  as funções que descrevem a holonomia da folha numa vizinhança do ponto, nas direções não compactas  $Y_3, Y_4$  (tomadas por escolha) e onde  $f^1, f^2$  são as funções que descrevem a holonomia da folha numa vizinhança do ponto  $p$  nas direções nas quais a órbita se torna compacta  $Y_1, Y_2$ . Tanto  $f^3$  como  $f^4$  se deslocam pontualmente com vetor inicial quase vertical (ie. na direção da coordenada  $z_2$  e infimamente na coordenada  $z_1$ , tanto para  $f^3$  como para  $f^4$  simultâneamente).

A partir daqui em vez de denotar como  $f^3, f^4$  as funções que descrevem a holonomia da folha nas direções não compactas, passaremos a denotar estas por  $f_3, f_4$ , por absoluta conveniência.

**Definição 4.4** *Dados  $f_3, f_4$  definamos o conjunto*

$$C_p = \{f_3^{k_3} \circ f_4^{k_4}(p) \in B_p / k_3, k_4 \in \mathbb{Z}\}$$

*que descreve a órbita de  $p$  com respeito a  $f_3$  e  $f_4$  em  $B_p$*

**Definição 4.5** *Dizemos que uma curva em  $\mathbb{R}^2$  é quase vertical se dados dois pontos  $p_1, p_2$  da curva, o vetor que une  $p_1$  a  $p_2$  forma um ângulo  $\rho(p_1, p_2)$  tal que  $\rho(p_1, p_2) \in (\pi/4, 3\pi/4)$  ou  $\rho(p_1, p_2) \in (-\pi/4, -3\pi/4)$*

**Afirmção 4.6** *O conjunto  $C_p$  está contido numa curva topológica (não necessariamente suave)  $L$  que passa pelo ponto  $p$  e, graficamente, é quase vertical. Além disso a projeção deste conjunto sobre o eixo  $z_2$  é injetivo.*

**Prova**

Sejam  $\{f_3, f_4\}$  os difeomorfismos suaves que definem a holonomia da folha  $F_p$  nas direções  $\{Y_3, Y_4\}$  respectivamente, numa vizinhança  $B_p$  de  $p$ ; ie,  $f_j : B_p \rightarrow B'_p \subset B_p$ ;  $j = 3, 4$ .

Primeiro veremos que não existem dois pontos de  $C_p$  tais que estes tenham as duas  $z_2$ -coordenadas iguais, ie que não existam  $k_3, k_4, \tilde{k}_3, \tilde{k}_4 \in \mathbb{Z}$  tais que  $\pi_2(f_3^{k_3} \circ f_4^{k_4}(p)) = \pi_2(f_3^{\tilde{k}_3} \circ f_4^{\tilde{k}_4}(p))$  em  $B_p$ . Mas isto se reduz a afirmar que não podemos ter  $\pi_2(f_3(p)) = \pi_2(f_4(p))$  o que nos garante que  $C_p$  é homeomorfo a um conjunto contido no eixo  $z_2$ .

De fato, se  $\pi_2(f_3(p)) = \pi_2(f_4(p))$  então  $w_3 = (r_3, 0)$  e vimos que pela equação integral (3) na afirmação não ocorre este caso.

Um outro caso é quando  $f^3(p) = f^4(p)$  e aqui vamos ter que a folha se reduz a uma direção não compacta, caindo no caso anterior (capítulo 3) já analisado.

Logo podemos dizer que  $\bar{C}_p$  esta contido numa curva unidimensional.

□

**Observação 4.7 1.-** Note aqui que nem para todo  $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$  temos que  $f_3^{k_3} \circ f_4^{k_4} \in B'_p$ . Isto acontece porque  $B'_p$  é uma pequena vizinhança aberta de  $\mathbb{T}^2$ .

Em virtude de  $\tilde{\theta}$  ser uma  $C^1$ -perturbação de  $\theta_0$  tanto  $f_3$  como  $f_4$  devem restringir seu deslocamento, em cada ponto, a uma determinada região  $\mathcal{R}$  esboçada na figura 4.3. Esta região descreve que para todo ponto  $p \in B_p$  então  $f^k(p) - p \in \mathcal{R}$ . Gráficamente podemos ver que em geral se satisfaz

$$f_3^{k_3} \circ f_4^{k_4}(p) - p \in \mathcal{R} \quad ; \quad \forall p \in C_p$$

sendo isto confirmado pela afirmação anterior.

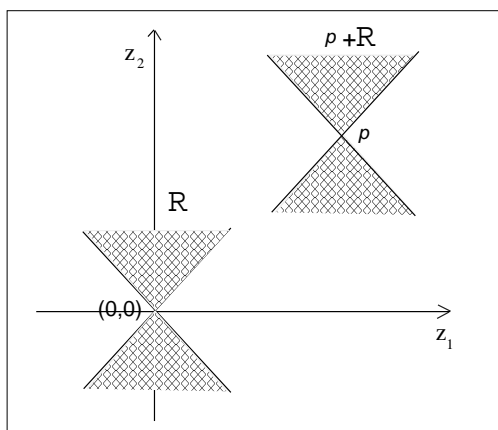


Figura 4.3: Região  $\mathcal{R}$

A escolha do caso nos dá a figura esboçada acima quando  $w_i \simeq (0, r)$ . Note que esta propriedade deve ser satisfeita para qualquer ponto da órbita, porém aqui a análise foi centrada no ponto  $p$ .

**2.-** No caso em que os pontos de  $C_p$  estão contidos numa curva unidimensional e sejam densos em relação a esta, então podemos deduzir que esta é esboçada sequencialmente como mostrada na figura 4.4 curva a partir do fato de que cada ponto de  $C_p$  limita-se a uma região  $\mathcal{R}$  e assim se formaram restrições sequenciais de  $\mathcal{R}$  como mostrada na figura, logo na região sombreada tende a ficar uma curva unidimensional não



necessariamente suave e esta curva é exatamente  $\bar{C}_p$ . Porém nem sempre acontece este caso pois a projeção de  $C_p$  no eixo  $z_2$  pode ter por fecho um conjunto de Cantor ou um outro conjunto fechado que não é um intervalo.

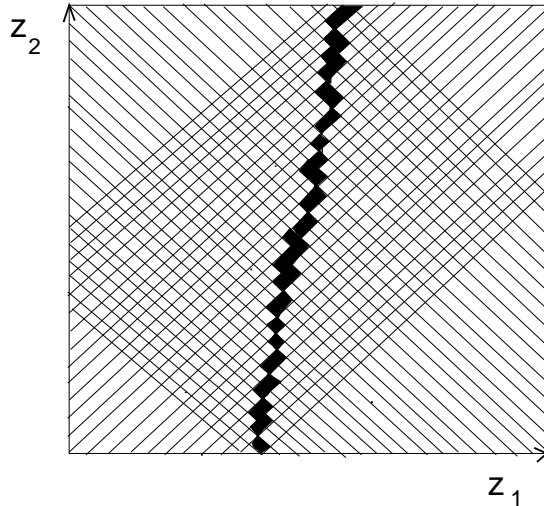


Figura 4.4: Região sequencial

3.- Se observamos bem,  $f_3$  e  $f_4$  devem ser próximos das funções

$$\begin{aligned} \varphi_3(v) &= v + \alpha_3 e_2 & \text{onde } \alpha_3, \alpha_4 &\in \mathbb{R} \\ \varphi_4(v) &= v + \alpha_4 e_2 & \alpha_3/\alpha_4 &\notin \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Estamos colocando  $\alpha_3/\alpha_4 \notin \mathbb{Q}$  uma vez que supondo o contrário, nos levaria a conclusão de que as órbitas são compactas e, portanto, não existiria folha da forma  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

#### 4.2 Deduções e Projeções

Seja a ação  $\tilde{\theta}$  uma  $C^1$ -perturbação de  $\theta_0$  e  $F_p$  a órbita de  $\tilde{\theta}$  que passa pelo ponto  $p$  pré-fixado. Consideremos esta ação restringida à folha  $F_p$  descrita da seguinte forma:

$$\tilde{\theta}_p : \mathbb{R}^4 \longrightarrow F_p \approx (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{T}^4 \times B_0^2(\epsilon)$$

Supor que a folha tem duas direções compactas facilita a análise desta aplicação que simplesmente pode ser considerada como uma aplicação definida nas direções não compactas  $\{Y_3, Y_4\}$ . Esta nova aplicação vem a definir assim

uma relação de equivalência da seguinte forma: dados dois pontos  $p, p'$  dizemos que estes pontos são equivalentes se satisfazem

$$p \sim p' \Leftrightarrow \tilde{\theta}((*, *, 0, 0), p) = p' \Leftrightarrow \tilde{\theta}_p(*, *, 0, 0) = p'$$

E denotaremos a nova aplicação por  $\tilde{\psi} = \tilde{\theta}_p / \langle \{Y_3, Y_4\} \rangle$

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \times B_0^2(\epsilon)$$

E se agora tomamos a projeção da folha  $F_p$  nas coordenadas  $\{z_1, z_2\}$  ou seja a projeção da aplicação  $\tilde{\psi}$  no plano  $\{z_1, z_2\}$  e a qual denotamos por:

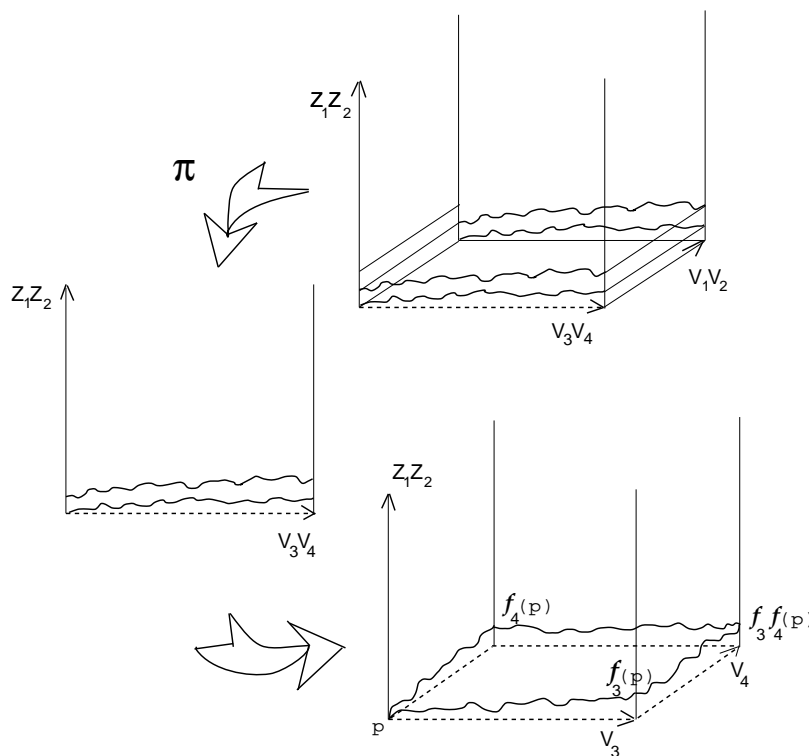


Figura 4.5: Aplicação  $\tilde{\psi}_P$

$$\tilde{\psi}_P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow B_0^2(\epsilon)$$

Podemos ver que o fecho de  $C_p$  também está contido na imagem de  $\tilde{\psi}_p$ , a qual é fechada (ie.  $\bar{C}_p \subset Im \tilde{\psi}_p$ ).

A partir de agora em vez de trabalhar com a folha só analisaremos uma seção dela, definida da seguinte forma. Tome a superfície  $\Sigma$  definida pela

aplicação

$$\begin{aligned} \varpi &: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{T}^4 \\ (s, t) &\longmapsto \varpi(s, t) = sY_3 + tY_4 \end{aligned}$$

$\Sigma$  é um toro bi-dimensional em  $\mathbb{T}^4$ . Levantemos este toro na órbita e o resultado será a seção  $\mathcal{S}_1$  com a qual vamos a trabalhar.

Esta também pode ser vista como a interseção da órbita com o espaço

$$\mathcal{D} = \{(0, 0, y_3, y_4, z_1, z_2) \mid z_i, y_i \in [0, 1]\}$$

Assim, para o caso que estamos analisando, as órbitas de pontos próximos ao ponto  $p$ , projetadas sobre o plano  $\{z_1, z_2\}$ , estão contidas em curvas unidimensionais que gráficamente se vem como quase verticais.

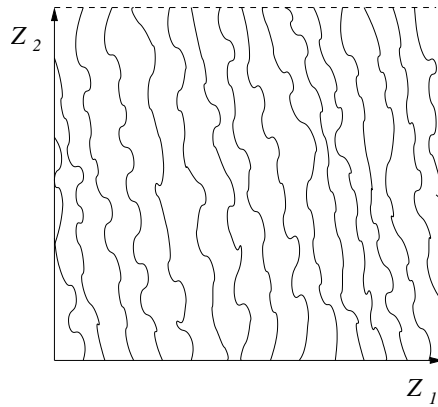


Figura 4.6: Curvas quase verticais

Cada uma de estas curvas é topologicamente equivalente a uma reta, e  $C_p$  é um subconjunto desta curva. Por continuidade bastará analisar a dinâmica de uma delas (De fato, a análise é sobre os pontos do conjunto  $C_p$  que está contido na curva).

Em vez de estudar as aplicações  $f_3, f_4$  analisaremos as suas projeções sobre o eixo  $z_2$  e para isto definiremos o conjunto  $D_p = \pi_2(C_p)$  e as aplicações:

$$g_j : D_p \rightarrow D'_p \qquad g_j(\pi_2(p)) = \pi_2(f_j(p)) ; j = 3, 4$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{C}_p & \xrightarrow{f_j} & \bar{C}'_p \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ D_p & \xrightarrow{g_k} & D'_p \end{array}$$

Em virtude do conjunto  $\bar{C}_p$  estar contido numa curva unidimensional e sua projeção sobre o eixo  $z_2$  ser injetiva, podemos, neste caso, colocar a variável  $z_1$  em função de  $z_2$ . Nossa idéia é podermos considerar a ação como se esta fosse de codimensão 1 ou de  $\mathbb{R}^2$  agindo numa variedade 3-dimensional de variáveis  $y_3, y_4, z_2$  e, para tal caso, definimos a aplicação seguinte:

$$\begin{aligned} \kappa : \pi_2(C_p) &\longrightarrow \pi_1(C_p) \\ z_2 &\longmapsto \kappa(z_2) = z_1 \end{aligned}$$

onde  $(z_1, z_2) \in C_p$ .

Agora para definirmos o número de translação, as aplicações  $g_3, g_4$  precisam ser crescentes ou decrescentes em  $\pi_2(C_p)$  logo podemos afirmar o seguinte.

**Afirmção 4.8** *As aplicações  $g_3, g_4$  definidas em  $\pi_2(C_p)$  são crescentes (ou decrescentes).*

**Prova**

Sejam os difeomorfismos locais  $f_j : B_p \rightarrow B'_p \subset B_p$  e suas respectivas projeções  $g_j$  sobre o eixo  $z_2$  para  $j : 3, 4$ ; estas satisfazendo a igualdade  $\pi_2 \circ f_j(p) = g_j \circ \pi_2(p)$ . Denotemos por  $p_2 = \pi_2(p)$ . Primeiro provaremos que se

$$p_2 < g_3(p_2) < g_4(p_2)$$

então

$$g_4(p_2) < g_4 \circ g_3(p_2) < g_4^2(p_2)$$

O que de fato é o que nos interessa saber para, assim, podermos definir o número de translação. Agora podemos simplesmente provar que se  $p_2 < g_3(p_2)$  então  $g_4(p_2) < g_3 \circ g_4(p_2)$  pois a outra parte da desigualdade tem a mesma demonstração.

Vamos supor pelo absurdo que  $g_4(p_2) \geq g_3 \circ g_4(p_2)$ . Tomemos o vetor que une os pontos  $p$  e  $f_3(p)$  e chamemos este de  $v(p, f_3(p))$ . Por resultados anteriores (argumento de  $C^1$  aproximação), este deve formar um ângulo de quase  $\pi/2$  com o eixo  $z_1$  enquanto sua imagem  $f_4(v(p, f_3(p))) = v(f_4(p), f_4 \circ f_3(p))$  é um vetor que une os pontos  $f_4(p)$  e  $f_3 \circ f_4(p)$  formando um ângulo que se encontra entre 0 e  $-1/2\pi$  com o eixo  $z_1$ . Com isto, chegamos a uma contradição pois  $f_4$  é um difeomorfismo  $C^1$ -próximo da identidade.

E assim em geral para  $p', p'' \in C_p$  com  $\pi_2(p') < \pi_2(p'')$  então  $\pi_2(f_j(p')) < \pi_2(f_j(p''))$  para  $j = 3, 4$ , aqui aplicamos o mesmo raciocínio dos vetores e a condição de  $C^1$ -aproximação.

Portanto podemos afirmar que tanto  $f_3$  como  $f_4$  são crescentes (ou decrescentes) em  $C_p$ . Ou seja se  $p', p'' \in D_p$  com  $p' < p''$  então  $g_j(p') < g_j(p'')$  ;  $j = 3, 4$  concluindo assim a afirmação.

□

Vamos definir o número de translação que descreve a dinâmica de uma função com respeito à outra. Observe que o número de rotação é um caso particular do número de translação.

### 4.3

#### Número de Translação

Seja  $I$  um intervalo da reta e  $g_1, g_2 : I \rightarrow I'$  funções próximas da identidade.

**Definição 4.9 Número de translação relativo a duas funções** *Número de translação de  $g_2$  com respeito a  $g_1$ . Sejam as funções  $g_1, g_2$  e  $x_0 \in I$  assumamos que*

$$g_1^{-1}(x_0) < x_0 \leq g_2(x_0) \leq g_1(x_0)$$

Defina uma sequência de pontos começando por

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 \\ a_{n+1} &= g_1^{-k(n)} \circ g_2(a_n) \end{aligned}$$

onde  $k(n)$  é o menor inteiro para o qual

$$x_0 \leq g_1^{-k(n)} \circ g_2(a_n) < g_1(x_0)$$

Desde que  $g_1(x_0) \leq g_1 \circ g_2(x_0) = g_2 \circ g_1(x_0) \leq g_1^2(x_0)$  e por construção,  $x_0 \leq a_n < g_1(x_0)$ , temos  $x_0 \leq g_2(x_0) \leq g_2(a_n) < g_2 \circ g_1(x_0) \leq g_1^2(x_0)$  e portanto  $k(n)$  é 0 ou 1. Além disso,  $k(n) = 1$  se e somente se  $x_0 \leq a_{n+1} < g_2(x_0)$ .

Seja a sequência de funções definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} G_0^{x_0} &= id \\ G_{n+1}^{x_0} &= g_1^{-k(n)} \circ g_2 \circ G_n^{x_0} \end{aligned}$$

Esta composição faz sentido em um subintervalo de  $I$  para  $g_1$  e  $g_2$ . Seja  $I_n = (g_1^{-n}(x_0), g_1^n(x_0))$ . Vamos supor que  $I_n \subset I$  é bem definido para as funções  $g_1, g_2$  para um  $n$  considerável. Tem-se  $g_2(I_n) \subset I_{n+1}$ .

Definamos a sequência  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  por

$$\begin{aligned} p(0) &= 0 \\ p(n+1) &= p(n) + k(n) \end{aligned}$$

logo definamos o número de translação como sendo o limite

$$\tau(g_2, g_1, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n}$$

Provaremos que este limite existe.

No caso em que  $g_2^{-1}(x_0) < x_0 \leq g_1(x_0) \leq g_2(x_0)$  podemos fazer uma construção similar invertendo os papéis de  $g_1$  e  $g_2$  e podemos definir

$$\tau(g_2, g_1, x_0) = 1/(\tau(g_1, g_2, x_0))$$

Agora, se  $g_1^{-1}(x_0) \leq g_2(x_0) \leq x_0 < g_1(x_0)$ , definimos

$$\tau(g_2, g_1, x_0) = -\tau(g_2^{-1}, g_1, x_0)$$

Outros casos são similares.

Seja  $P_G$  o conjunto fechado de pontos fixos comuns a  $g_1$  e  $g_2$ . Em nosso caso  $g_1 = g_4$  e  $g_2 = g_3$  e para o caso que estamos analisando, a projeção dos pontos de  $C_p$  se encontra na reta  $z_2$ . Por suposição  $P_G = \emptyset$  uma vez que a órbita não é compacta nas duas direções descritas por  $g_3$  e  $g_4$ . Se tivéssemos um ponto fixo com respeito a uma das funções cairíamos no caso em que a folha tem 3 direções compactas, que foi estudado no capítulo anterior. Agora mostraremos que o número de translação é bem definido para  $p_2$  em  $\pi_2(C_p)$ .

**Lema 4.10** *Seja  $\pi_2(C_p)$  um conjunto onde estão definidos as funções  $g_3$  e  $g_4$ . Existe o número de translação  $\tau(g_3, g_4, p_2)$  para  $p_2 = \pi_2(p)$ .*

### Prova

Primeiramente não está determinado o tipo de conjunto que é  $\pi_2(\bar{C}_p)$ , o qual pode ser todo um intervalo, pedaços de intervalo ou pontos que formam um conjunto de Cantor. Porém isto não será um empecilho para definir o número de translação. Em  $\pi_2(\bar{C}_p)$ , as funções  $g_3$  e  $g_4$  estão definidas e são crescentes. O que queremos é que estas estejam definidas em um intervalo que contenha  $\pi_2(\bar{C}_p)$  e se tornem contínuas.

Como primeiro passo, vamos preencher o intervalo todo tendo estes os pontos extremos de  $\pi_2(\bar{C}_p)$ . As funções  $g_3$  e  $g_4$  serão preenchidas de forma linear, logo para dados 2 pontos  $x_1$  e  $x_2$  consecutivos de  $\pi_2(\bar{C}_p)$  e onde não

exista qualquer ponto entre eles, se  $x \in (x_0, x_1)$  temos que

$$\check{g}_i(x) = \check{g}_i(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (\check{g}_i(x_1) - \check{g}_i(x_0))$$

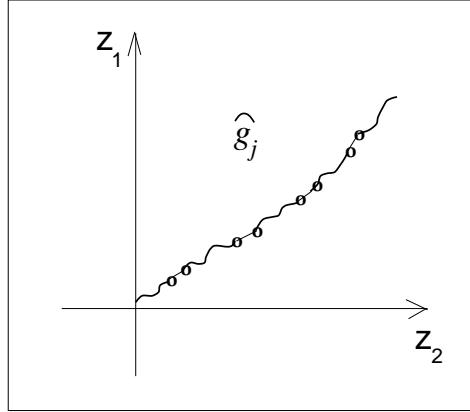


Figura 4.7: Continuidade de  $\check{g}_j$

Onde  $\check{g}_i$  é a função que restringida a  $\pi_2(\bar{C}_p)$  é a função  $g_i$  e a qual é linear nos pontos complementares a  $\bar{C}_p$ . Prova-se que estas novas funções  $\check{g}_3$  e  $\check{g}_4$  comutam portanto satisfazem  $h = [\check{g}_3, \check{g}_4] = Id$ . Agora provaremos que o limite existe. Assuma que

$$\check{g}_4^{-1}(x_0) < x_0 \leq \check{g}_3(x_0) \leq \check{g}_4(x_0)$$

E seja  $\varphi$  uma conjugação entre  $\check{g}_4$  e  $x + 1$  daí resultam as aplicações

$$\begin{aligned} \tilde{g}_4(x) &= \varphi \circ \check{g}_4 \circ \varphi^{-1}(x) = x + 1 \\ \tilde{g}_3(x) &= \varphi \circ \check{g}_3 \circ \varphi^{-1}(x) \end{aligned}$$

A aplicação  $\varphi$  esta definida num dominio considerável e  $\varphi(x_0) = 0$ . Note que  $\tilde{g}_3(x+1) = \tilde{g}_3(x)+1$  e em particular  $\tilde{g}_3(1) = \tilde{g}_3(0)+1$ . A definição de número de translação se aplica à restrição para o intervalo  $[0,1]$  de  $\tilde{g}_3$  ; equivalentemente seja a aplicação  $\hat{g}_3$  a única função de grau 1 coincidindo com  $\tilde{g}_3$  no intervalo  $[0,1]$  temos que

$$\hat{g}_3(x) = \tilde{g}_3(x - [x]) + [x]$$

e os pontos  $a_n$  como construidos acima estão todos no intervalo  $[x_0, \check{g}_4(x_0))$  e  $\varphi(a_n)$  está sempre no intervalo  $[0,1]$ . A construção de  $k(n), G_n$  e  $p(n)$  só considera valores de  $\check{g}_3$  no intervalo  $[x_0, \check{g}_4(x_0))$  ou equivalentemente, valores de  $\tilde{g}_4$  no intervalo  $[0,1)$ . Portanto não faz diferença se tomamos  $\tilde{g}_3$  ou  $\hat{g}_3$  e  $\tau(g_3, g_4, p)$  é o número de translação usual de  $\hat{g}_3$ .

□

## 4.4

**Demonstração da Segunda Afirmação**

**Afirmção 4.11** *Sejam as aplicações  $f_1$  e  $f_2$  definidas numa vizinhança do ponto  $p$  que descrevem a holonomia nas direções  $Y_1$  e  $Y_2$  onde a folha é compacta e sejam  $r_1$  e  $r_2$  em  $\mathbb{Z}$  seus respectivos períodos. Todos os pontos da órbita são periódicos de período  $r_1$  para  $f_1$  e  $r_2$  para  $f_2$ .*

**Prova**

Seja  $p$  um ponto pre-fixado, como a folha é compacta em  $f_1$  e  $f_2$  então existem  $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$  tais que  $f_1^{r_1}(p) = f_2^{r_2}(p) = p$ . Seja  $p'$  um outro ponto da órbita então existe um  $g \in G$  tal que  $\theta(g, p') = \theta_g(p') = p$ . Defina a aplicação

$$\hat{f}_i = \theta_g^{-1} \circ f_i \circ \theta_g$$

Esta é uma aplicação que descreve a holonomia numa vizinhança do ponto  $p'$  na direção  $Y_i$  para  $i = 1, 2$  e onde também resulta que  $\hat{f}_1^{r_1}(p') = \hat{f}_2^{r_2}(p') = p'$ , ie  $p'$  também tem período  $r_1, r_2$  respectivamente.

□

De agora em diante tomaremos como base resultados obtidos por N. Saldanha (Sal), e feitas as devidas restrições para simplesmente analisar a ação como se  $\mathbb{R}^2$  estivesse agindo em  $\mathbb{T}^4$  (melhor dito na seção  $\mathcal{S}_1$ ); assim, evitaremos trabalhar com as coordenadas  $Y_1, Y_2$  nas quais a folha é compacta e podemos tomar  $V_3, V_4$  como os campos canônicos  $Y_3, Y_4$  respectivamente.

Fixemos um ponto  $p$  da folha. Se  $f_3, f_4$  estão definidas numa vizinhança  $B_p$  de  $p$  e denotam os difeomorfismos que descrevem a holonomia da folha nas direções não compactas neste ponto então por resultados anteriores, chegamos que o conjunto  $C_p = \{f_3^{k_3} \circ f_4^{k_4} \in B_p \mid k_3, k_4 \in \mathbb{Z}\}$  é unidimensional, no sentido que ele está contido numa curva topológica unidimensional, e é injetivo com respeito ao eixo  $z_2$ . Além disso as aplicações  $f_j$ ;  $j = 3, 4$  são crescentes (ou decrescentes) em  $B_p$  em relação a sua segunda coordenada logo podemos dizer de que  $g_3$  e  $g_4$  são crescentes (ou decrescentes) em  $D_p$ .

**Definição 4.12** *Uma folheação  $\mathcal{F}_1$  de  $M$  é dita aceitável se as suas folhas são sempre transversais aos planos formados pelos vetores  $z_1, z_2$ . Uma ação é dita aceitável se a correspondente folheação é aceitável.*



É claro que para qualquer  $\mathcal{F}_1$  (respectivamente  $\tilde{\theta}$ ) suficientemente  $C^0$ -próximo de  $\mathcal{F}$  (respectivamente  $\theta$ ) é aceitável. Uma perturbação aceitável  $\tilde{\theta}$  de  $\theta$  naturalmente define em cada ponto uma bijeção linear  $\tilde{\vartheta} : H \rightarrow D$  a inversa da projeção de  $\tilde{\theta}$  sobre  $H$ . É claro que para  $\tilde{\theta} = \theta$ ,  $\tilde{\vartheta}$  é dado (na base canônica) por  $A(z_1, z_2)^{-1}$ . Além disso, dado um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow H$  e um ponto  $(\gamma(a), z_1^a, z_2^a)$  existe para um  $\delta$  suficientemente pequeno, um único caminho  $\tilde{\gamma} : [a, a + \delta] \rightarrow M$  com  $\tilde{\gamma}(a) = (\gamma(a), z_1^a, z_2^a)$  cuja imagem está contida numa órbita de  $\tilde{\theta}$ . Dizemos que  $\tilde{\gamma}$  é o levantamento de  $\gamma$ , em outras palavras, a imagem de  $\tilde{\gamma}$  deve ficar dentro da mesma folha da folheação. A razão pela qual não podemos definir  $\gamma$  para todo o intervalo  $[a, b]$  é que podem cair pontos fora da variedade  $M$  se  $|(z_1, z_2)|$  for muito grande.

Voltando a  $A$  por um momento, existe claramente um  $r_1 > 0$  tal que a bola aberta de raio  $r_1$  ao redor de  $A(0, 0)^{-1}$  consiste somente de matrizes inversíveis. Seja  $\epsilon_1 > 0$ ,  $\epsilon_1 \leq \epsilon$ , tal que  $|(z_1, z_2)| < \epsilon_1$  implica que  $|(A(z_1, z_2))^{-1} - (A(0, 0))^{-1}| < r_1/2$ .

**Definição 4.13** *Dizemos que uma folheação aceitável  $\mathcal{F}_1$  é boa se para todo  $\gamma$  de comprimento menor que  $36$  e  $|(z_1^a, z_2^a)| < \epsilon/2$ ,  $\gamma$  pode ser levantado em todo seu domínio e a curva resultante está totalmente contida na região  $|(z_1, z_2)| < \epsilon$ .*

*Uma ação aceitável  $\tilde{\theta}$  é boa se se satisfaz as condições seguintes:*

- Se  $|(z_1, z_2)| < \epsilon_1$  então  $|\tilde{\vartheta}(y_1, \dots, y_4, z_1, z_2) - (A(0, 0))^{-1}| < r_1$
- Para todo  $\gamma$  de comprimento menor que  $36$  e  $|(z_1^a, z_2^a)| < \epsilon_1/2$ ,  $\gamma$  pode ser levantado em todo seu domínio e a curva resultante está inteiramente contida na região  $|(z_1, z_2)| < \epsilon_1$

**Definição 4.14** *Dizemos que uma seção é boa se este faz parte de uma folheação boa.*

**Proposição 4.15** *Seja  $\mathcal{S}_1$  uma boa perturbação da seção compacta  $\mathcal{S}_0$  tal que  $\mathcal{S}_1$  passa pelo ponto  $p = (0, 0, y_3, y_4, z_1, z_2) \in M$  é não compacta. Então existe uma reta  $H' \subset \mathbb{R}^2$  e uma aplicação natural*

$$\Delta : H' \rightarrow \mathbb{T}^2$$

*que leva o ponto  $(0, 0, 0, 0)$  no ponto  $(0, 0, y_3, y_4)$  e podemos levantar esta globalmente para uma função*

$$\hat{\Delta} : H' \rightarrow \mathbb{T}^4$$

de tal forma que  $(0, 0, 0, 0)$  é levado para  $p$

- (i) Se  $H'$  é irracional (ou seja não admite uma equação com coeficientes racionais) então o fecho da imagem é um toro topológico  $T_0$  e sua projeção sobre  $\mathbb{T}^2$  é um homeomorfismo;  $T_0$  está contido na união de seções não compactas.
- (ii) Se  $H'$  é racional então o supremo e o ínfimo da interseção da imagem com cada linha paralela ao eixo  $z_2$  formam dois círculos suaves  $T_1^+$  e  $T_1^-$  (podendo ser idênticas) contidas em seções não compactas e tal que suas projeções sobre  $H'/\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{T}^2$  são difeomorfismos.

Além disso  $H'$  é invariante para qualquer outro ponto da mesma folha.

**Prova**

Primeiro denotemos  $\pi_2(p) = p_2$  e vamos a supor que se satisfaz:

$$g_4^{-1}(p_2) < p_2 \leq g_3(p_2) \leq g_4(p_2)$$

Outros casos são determinados de maneira análoga como visto na seção “número de translação”. Podemos definir a partir destes dados o número de translação de  $g_3$  em relação a  $g_4$  e denota-lo por  $\tau(g_3, g_4, p) = h_3$ .

Agora se consideramos  $\hat{g}_j$  como o levantamento na reta de  $g_j$  temos que:

$$h_3 = 0 \iff g_3(z) = z \text{ para algum } z$$

$$h_3 = 1 \iff g_3(z) = g_4(z) \text{ para algum } z$$

Claramente o número de rotação de  $\hat{g}_4$  é  $h_4 = 1$  pela forma como este foi definido. Este número de rotação é invariante para qualquer ponto da seção  $\mathcal{S}_1$  da órbita  $F_p$ .

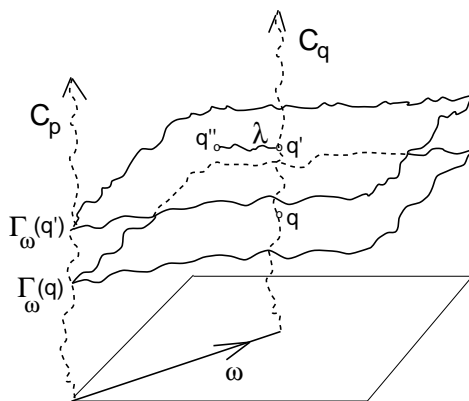


Figura 4.8: Conjugação de  $f_j$

De fato, tomemos um ponto  $q$  da seção  $\mathcal{S}^1$  que se encontra na órbita  $F_p$  e um outro ponto  $q'$  da mesma seção, se este ponto se encontra no mesmo conjunto  $C_q$  então podemos encontrar uma curva  $\omega$  em  $\pi_1(\mathbb{T}^4)$ , tal curva une os pontos origem e a projeção de  $q$  sobre  $\mathbb{T}^4$ . Existe um difeomorfismo  $\Gamma_\omega : C_q \rightarrow C_p$  tal que o ponto  $\Gamma_\omega(q)$  e  $\Gamma_\omega(q')$  são pontos iniciais do levantamento da curva  $\omega$  e que satisfazem

$$\hat{f}_j(q) = \Gamma_{\omega^{-1}} \circ f_j \circ \Gamma_\omega(q)$$

E como funções conjugadas têm o mesmo número de translação concluímos no afirmado.

Agora se o outro ponto, que denotaremos este por  $q''$ , não se encontra no conjunto  $C_q$ , podemos tomar o ponto  $q'$  próximo a  $q''$ , sendo que  $q'$  se encontra neste conjunto  $C_q$  e para o qual existe uma curva  $\lambda$  na folha, unindo estes dois pontos. Tal curva determina que estes pontos têm holonomia conjugada, portanto tem o mesmo número de translação mas por argumento anterior,  $q$  e  $q'$  têm o mesmo número de translação então transitivamente  $q$  e  $q''$  têm igual número de translação.

Agora definiremos um subconjunto aberto  $N \subseteq \mathbb{T}^4$ , onde acontecerá nossa construção.

Primeiro levantemos um plano  $(12, 12)^4$  ao redor do ponto origem  $(0, 0, 0, 0)$ . Agora tomemos a interseção deste levantamento com o conjunto

$$\mathcal{D} = \{(0, 0, y_3, y_4, z_1, z_2) \mid y_i, z_i \in [0, 1]\}$$

O conjunto resultante está contido na seção  $\mathcal{S}_1$ . Seja  $N$  o conjunto de pontos da seção  $\mathcal{S}_1$  da forma  $(0, 0, y_3, y_4, \kappa(z_2), z_2)$  tal que ainda encontram-se pontos do levantamento com coordenadas  $z_2$  superiormente e inferiormente.

Definamos o conjunto

$$H' = \langle \{Y_3 - h_3 Y_4\} \rangle = \{t(0, 0, 1, -h_3) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad H' \perp (h_3, 1)$$

Como funções conjugadas têm o mesmo número de translação, esta reta  $H'$  é constante sobre a seção  $\mathcal{S}_1$  contida na órbita  $F_p$ .

Agora provaremos que o levantamento de  $H'$  está contido em  $N$ . Defina

$$Q = \{(y_3, y_4) \mid -5 \leq \sum_{i=1,2} h_{i+2} \lfloor y_{i+2} \rfloor \leq 1\}$$

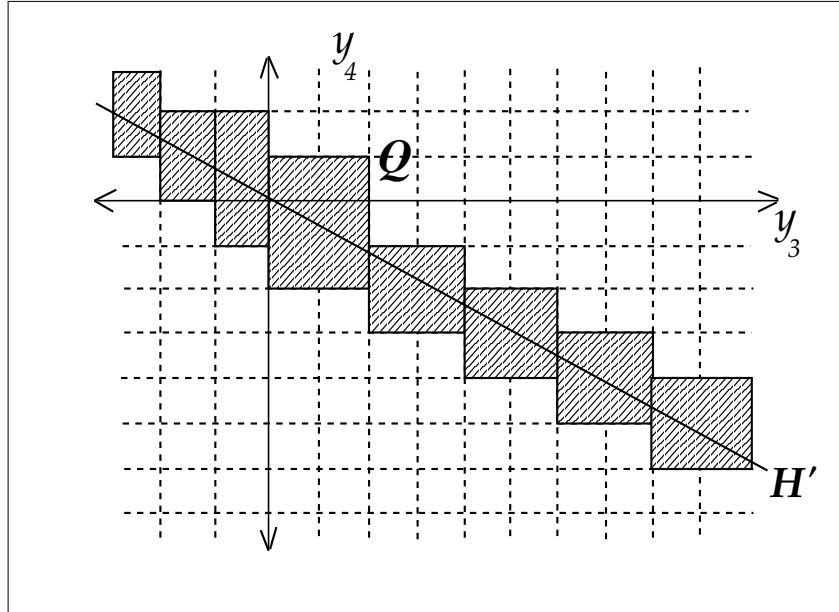


Figura 4.9: Região  $Q$

subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Este conjunto é uma união de quadrados unitarios (definido pelo lattice  $\mathbb{Z}^2$ ). Assim para mostrar que o levantamento de  $Q$  esta contido em  $N$  procederemos por indução sobre a distância do quadrado à origem. Por conexidade do conjunto  $Q$ , é suficiente provar que cada quadrado e seu consecutivo não saiam nem para cima nem para baixo de  $N$  com respeito à coordenada  $z_2$ . Isto segue facilmente das propriedades de número de rotação.

Em detalhes, considere como  $\hat{g}_3, \hat{g}_4$  os levantamentos de  $g_3, g_4$  respectivamente para  $\mathbb{R}$  com  $\hat{g}_4(t) = t + 1$ , essas funções correspondem a os  $g_i$  levantados sobre um sistema de coordenadas fixo, mas diferente dos  $g_i$  e todos definidos na reta  $\mathbb{R}$ .

Por exemplo, queremos que o levantamento do quadrado de coordenadas

$$[(k_3 - 1, k_4 - 1), (k_3, k_4 - 1), (k_3 - 1, k_4), (k_3, k_4)]$$

onde  $k_3, k_4$  são inteiros e  $(k_3, k_4)$  pertencendo a  $Q$ , esteja contido em  $N$ . Afirmamos que  $-6 \leq \hat{g}_3^{k_3} \circ \hat{g}_4^{k_4}(0) \leq 6$ . De fato, onde temos dois casos:

(i) Se  $h_3$  é irracional então existe uma semi-conjugação  $\Theta$  que satisfaz

$$\Theta(\hat{g}_j(p_2)) = \Theta(p_2) + h_j \log$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_3^{k_3} \circ \hat{g}_4^{k_4}(p_2) &= \hat{g}_3^{k_3}(p_2) + k_4 \\ &= \Theta^{-1} \circ \Theta \circ \hat{g}_3^{k_3}(p_2) + k_4 \\ &= \Theta(p_2) + k_3 h_3 + k_4 h_4 \in [-6, 6] \end{aligned}$$

- (ii) Se  $h_3$  é racional então existem  $p, q \in \mathbb{Z}_0^+$  tal que  $h_3 = p/q$ . Para  $k_3$  Existem  $M_3, r_3 \in \mathbb{Z}$  com  $0 \leq r_3 \leq q$  tal que  $k_3 = qM_3 + r_3$  logo

$$\begin{aligned} \hat{g}_3^{k_3} \circ \hat{g}_4^{k_4}(p_2) &= \hat{g}_3^{k_3}(p_2) + k_4 \\ &= \hat{g}_3^{qM_3+r_3}(p_2) + k_4 \\ &= \hat{g}_3^{r_3}(p_2) + pM_3 + k_4 \\ &= \hat{g}_3^{r_3}(p_2) - h_3r_3 + k_3h_3 + k_4h_4 \in [-6, 6] \end{aligned}$$

Devido ao fato da ordem de composição de funções pode ser permutada, expressões intermediarias também satisfazem as mesmas desigualdades, desde que os  $\hat{g}_i$  comutam. Isto mostra que o levantamento de  $Q$  está contido em  $N$  e como  $H'$  está contido em  $Q$ , então o levantamento de  $H'$  também está contido em  $N$ .

Consideremos o levantamento de  $H'$  em  $N$  e sua projeção sobre  $\mathbb{T}^2$ . Temos agora dois casos:

- (i) Primeiro caso, quando  $h_3$  é irracional. Usando o teorema de Poincaré, existe uma semi-conjugação entre  $\hat{g}_3$  e a correspondente rotação irracional. (esta conjugação pode não ser injetiva nem suave nem mesmo  $C^1$ ). Levantando esta conjugação temos uma função crescente

$$\Theta : (g_4^{-1}(p_2), g_4(p_2)) \rightarrow (-1, 1)$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \Theta(\hat{g}_3(z_2)) &= \Theta(z_2) + h_4 \\ \Theta(\hat{g}_4(z_2)) &= \Theta(z_2) + 1 \end{aligned}$$

(onde  $z_2 = \pi_2(z_1, z_2)$ ) e em realidade temos que  $\Theta(\hat{g}_i(z_2)) = \Theta(z_2) + h_i$ ;  $i = 3, 4$ . Assim podemos estender  $\Theta$  para um dominio maior, digamos

$$((g_4^{-1})^{12}(p_2), g_4^{12}(p_2))$$

e com a ajuda de  $\Theta$ , agora podemos definir um toro bidimensional contido em  $N$ .

Definamos a aplicação  $\Phi : N \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função estritamente crescente sobre linhas quase verticais (curvas quase paralelas ao eixo  $z_2$ ). Considere

$p = (0, 0, y_3, y_4, \kappa(z_2), z_2) \in N; 0 \leq y_i \leq 1$  e seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$  a linha reta unindo os pontos  $(0, 0, y_3, y_4)$  a  $(0, 0, 0, 0)$ , Levante  $\gamma$  começando por  $p$  e chegando a um ponto da forma  $(0, 0, 0, 0, \kappa(z'_2), z'_2)$ . Defina

$$\Phi(0, 0, y_3, y_4, \kappa(z_2), z_2) = \Theta(z'_2) - h_3 y_3 - h_4 y_4$$

A continuidade de  $\Phi$  segue das identidades

$$\Theta(g_i(z_2)) = \Theta(z_2) + h_i$$

Seja  $T_0 = \Phi^{-1}(\{0\})$ ,  $T_0$  é o fecho do levantamento de  $H'$  sobre  $N$ .

- (ii) No segundo caso quando  $h_3$  é racional podemos definir os círculos  $T_1^+$  e  $T_1^-$ . Para cada  $(0, 0, y_3, y_4)$  na projeção sobre  $\mathbb{T}^4$  do levantamento de  $H'$  para  $N$ , considere o conjunto dos correspondentes  $z_2$  no levantamento e defina  $z_2^+$  e  $z_2^-$  como o supremo e ínfimo deste conjunto, respectivamente. Seja  $T_1^+$  o conjunto de pontos da forma  $(0, 0, y_3, y_4, \kappa(z_2^+), z_2^+)$  e similarmente para  $T_1^-$ . Claramente estes círculos estão contidos em seções não compactas.

Em qualquer caso a unicidade de  $H'$  é facilmente verificada. De fato, qualquer outra reta que contenha elementos que não pertencem a  $H'$  seguindo essa direção e usando novamente o argumento de número de rotação, vemos que estamos “subindo” então devemos ou sair de  $\mathbb{T}^4$  ou acumularmos numa seção compacta; em qualquer caso, chegamos a uma contradição.

□

Agora estamos prontos para dar a definição de uma de nossas principais ferramentas. Para cada ponto de  $p$  de  $T_0, T_1^+$  ou  $T_1^-$  a ação  $\tilde{\theta}$  restringida a seção  $\mathcal{S}^1$  induz uma aplicação linear  $\tilde{\tau}_p : H' \rightarrow \mathbb{R}^2$ . O toro  $T_0$  naturalmente fica munido da medida unitaria, ao se levantar a medida unitaria de Lebesgue sobre  $\mathbb{T}^2$  via projeção. No caso (ii), a medida de Lebesgue uni-dimensional sobre a projeção vertical de  $T_1^+$  pode ser multiplicado por uma constante e levantado pela projeção para assim dar uma medida unitaria a  $T_1^+$  e  $T_1^-$ . Sempre que integramos sobre os toros o faremos com respeito a essa medida.

**Definição 4.16** *Considere a aplicação  $\tau : H' \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida da seguinte forma*

(i) *Se o fecho do levantamento de  $H'$  é  $T_0$  então  $\tau(v) = \int_{T_0} \tilde{\tau}_p(v) dp$*

(ii) *Se o fecho do levantamento de  $H'$  contém  $T_1^+$  então  $\tau(v) = \int_{T_1^+} \tilde{\tau}_p(v) dp$*

onde  $\mathbb{D}'$  é a imagem de  $\tau$

Neste sentido para provar que  $\tau$  é bem comportado precisamos de uma interpretação que seja mais geométrica. Apresentaremos uma função auxiliar  $\xi$  que, para cada caso, será definido da seguinte forma:

- (i) Para o primeiro caso o levantamento de  $H'$  (o qual está contido em  $T_0$ ) esta contido numa seção, logo numa órbita e, portanto, pode ser trazido de volta para  $\mathbb{R}^2$ . Em outras palavras isto define uma função contínua  $\xi : H' \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja imagem é a pre-imagem de  $T_0$  pela ação  $\tilde{\theta}$ .
- (ii) No segundo caso consideremos o levantamento de  $H'$  começando no ponto  $(0, 0, 0, 0, \kappa(z_2^+), z_2^+) \in T_1^+$  e fazendo o mesmo como anteriormente para assim definir  $\xi$ .

O seguinte lema relaciona  $\tau$  e  $\xi$ .

**Lema 4.17** *A transformação linear  $\tau$  é injetiva, constante sobre as órbitas e satisfaz  $\tau(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \xi(tv)$ .*

**Prova**

Por  $\tilde{\theta}$  ser uma boa perturbação,  $\xi$  pode ser estendido a uma vizinhança de  $H'$  de raio 1 em  $\mathbb{R}^2$ . A inclusão em  $N$  do levantamento desta vizinhança e a compacidade do fecho de  $N$  implicam que  $\xi$  é uniformemente convergente neste domínio maior.

Primeiro provaremos a fórmula para  $\tau$ . Notemos que

$$H' = \{t(0, 0, h_4, -h_3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

é um espaço uni-dimensional e todo vetor é múltiplo de  $v = (0, 0, h_4, -h_3)$ . Note que  $\xi(tv) = \int_0^t \tilde{\tau}_{p(s)}(v) ds$  onde  $p(s)$  é obtido ao levantarmos  $sv$  para  $T_0$  ou  $T_1^+$ . Começaremos provando a fórmula para  $\tau$ . Como para todo  $v$  de  $H'$  é tal que  $tv$  é uma linha densa na projeção vertical de  $T_0$  ou  $T_1^+$ , então consideremos o campo de vetores dado por  $v$  sobre  $T_0$ . Este é unicamente ergódico, com a medida sobre  $T_0$  sendo esta a única medida invariante. Pelo Teorema de Birkhoff o limite acima existe e seu valor é  $\tau(v)$ . Agora para um  $v$  em geral da vizinhança de  $H'$ , um argumento similar mostra que o limite também existe e é igual a média de  $\tilde{\tau}_p(v)$  onde  $p$  percorre o fecho da linha  $tv$ , um sub-toro. Além disso, a média sobre o toro original é a média das medias sobre sub-toros paralelos. Se a média sobre cada toro são iguais, temos a fórmula para um arbitrario  $v$ . Portanto é suficiente mostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \xi(tv) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \xi(tv + w)$  para qualquer  $w$  : Esses outros limites correspondem as medias de  $\tilde{\tau}_p(v)$  sobre o sub-toro paralelo

e são assim conhecidos para existir. A igualdade dos dois limites segue da uniformidade contínua de  $\xi$  : A distância entre  $tv$  e  $tv + w$  é fixo; entre  $\xi(tv)$  e  $\xi(tv + w)$  é limitado quando  $t$  cresce entre  $\frac{1}{t}\xi(tv)$  e  $\frac{1}{t}\xi(tv + w)$  tende a zero.

Consideremos agora dois pontos da mesma seção (e na mesma órbita); queremos provar que  $\tau$  é o mesmo para esses dois pontos. Sem perda de generalidade, suponha que entre eles exista uma distância menor que 1. Tome um destes pontos para ser o ponto base 0 na discussão acima e seja  $w \in H$  o vector saindo do zero ao outro ponto em consideração. Chamamos de  $\tau_2$  a aplicação  $\tau$  neste segundo ponto. Nós já tínhamos visto que  $H'$  é o mesmo para ambos pontos. Seja  $v \in H'$  arbitrário. Como vimos acima  $\tau(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}\xi(tv)$ . Similarmente  $\tau_2(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}\xi(tv + w)$ . Como anteriormente, a uniformidade contínua de  $\xi$  nos diz que os limites são iguais. A injetividade de  $\tau$  segue diretamente da sua definição:  $\tau$  é média de  $\tilde{\tau}_p$ ,  $\tilde{\tau}_p$  é a restrição de  $\tilde{\vartheta}$  para  $H'$  e novamente como  $\tilde{\theta}$  é boa,  $\tilde{\vartheta}$  deve cair sempre dentro de uma bola convexa de transformações lineares inversíveis.

□

**Teorema 4.18** *Seja  $\theta_0$  a ação definida acima e  $p$  o ponto origem. Se  $\tilde{\theta}$  é uma  $C^1 - \delta$ -próxima de  $\theta_0$  para  $0 < \delta < R$ , onde  $R$  é tal que  $\|D^2(\theta_0)_p^{-1}\| \geq 2R$  então não existem órbitas do tipo  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$  para a ação  $\tilde{\theta}$ .*

### Demonstração

Note que o posto de  $\frac{\partial}{\partial z_2}A(\kappa(0), 0)$  é igual ao posto de  $\frac{\partial}{\partial z_2}A^{-1}(\kappa(0), 0)$  (ambas são inversíveis). De agora em diante vamos supor que existe uma arbitraria  $C^1$ -aproximação de  $\theta_0$  com uma órbita não compacta da forma  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$  passando por  $p_0 = (0, 0, 0, 0)$ . A partir daqui chegaremos a uma contradição.

A matriz  $\frac{\partial}{\partial z_2}A^{-1}(\kappa(0), 0)$  é inversível, portanto injetiva quando aplicada a qualquer subespaço de  $\mathbb{R}^4$ .

Para qualquer  $C^1$ -aproximação  $\tilde{\theta}$  de  $\theta_0$ , tal que o ponto  $(0, 0, 0, 0)$  está sobre uma órbita não compacta da forma  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ , podemos definir  $H'$  de dimensão 1 como anteriormente. Por compacidade de  $S^1$ , considere uma sequência  $\tilde{\theta}_k$  de perturbações de  $\theta_0$  tal que a  $C^1$ -distância a  $\theta_0$  tende a zero e tal que suas versões  $H'_k$  tendem a uma reta fixa  $H'_0$ . Sejam  $v_0 \in H'_0$  um vector fixo não nulo,  $w_0 = \frac{\partial}{\partial z_2}A^{-1}(\kappa(0), 0)v_0$  e  $v_k \in H'_k$  vetores não nulos tendendo a  $v_0$ . Sejam  $\tau_k$  para  $\tilde{\theta}_k$  como  $\tau$  para  $\tilde{\theta}$ , definido acima. Podemos calcular  $\tau_k(v_k)$  começando de  $(0, 0, 0, 0, \kappa(0), 0)$  ou de  $(0, 0, 0, 0, f^i(\kappa(0), 0))$ , o qual segundo o lema, nos deve dar o mesmo resultado: chamaremos a esses dois vetores de  $q_k^-$  e  $q_k^+$ .



Agora mostraremos que para  $k$  suficientemente grande temos que  $(q_k^+ - q_k^-).w_0 > 0$  o que é a contradição desejada. Sejam  $\mathbb{T}^-$  e  $\mathbb{T}^+$  toros como descritos acima para  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$   $(0, 0, 0, 0, f^i(\kappa(0), 0))$ , respectivamente. Temos que  $q_k^\pm = \int_{\mathbb{T}^\pm} \tilde{\tau}_p(v) dp$ , donde  $q_k^\pm.w_0 = \int_{\mathbb{T}^\pm} \tilde{\tau}_p(v).w_0 dp$ . Subtraindo teremos

$$\begin{aligned} (q_k^+ - q_k^-).w_0 &= \int_{\mathbb{T}} (\tilde{\tau}_{p^+} - \tilde{\tau}_{p^-})(v).w_0 dp \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left( \int_{z_2^-}^{z_2^+} \frac{\partial}{\partial z_2} \vartheta(p, z_2) dz_2 \right) (v).w_0 dp \\ &= \iint \frac{\partial}{\partial z_2} \vartheta(p, z_2)(v).w_0 dz_2 dp \end{aligned}$$

Para nossas  $C^1$ -perturbações porém,  $\frac{\partial}{\partial z_2} \vartheta$  é próximo a  $(A^{-1})(\kappa(0), 0)$  e  $v$  é próximo a  $v_0$ . Em outras palavras, a expressão dentro da integral é próximo de  $(A^{-1})(\kappa(0), 0)(v_0).w_0 = w_0.w_0$  e portanto estritamente positivo. Isto conclui a prova da desigualdade a qual, como tínhamos visto, contradiz o resultado prévio.

□