

3

Inexistência de órbitas do tipo $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo provaremos a inexistência de órbitas do tipo $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$ mas antes daremos algumas definições pertinentes que nos ajudarão a familiarizar-nos com a nossa ação em particular.

Para nossa variedade $M = \mathbb{T}^4 \times B_0^2(\epsilon)$ temos o sistema de campos de vetores canônico $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Z_1, Z_2\}$. Como mencionamos anteriormente, nossa ação inicial θ_0 é gerada pelos campos de vetores $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$,

$$\begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ X_3(p) \\ X_4(p) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 2\pi z_1 & \sin 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ -\sin 2\pi z_1 & \cos 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\pi z_2 & \sin 2\pi z_2 \\ 0 & 0 & -\sin 2\pi z_2 & \cos 2\pi z_2 \end{pmatrix}}_{A(z_1, z_2)} \begin{pmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \\ Y_3(p) \\ Y_4(p) \end{pmatrix}$$

para cada $p = (y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2) \in M$ e claramente $A(z_1, z_2)$ é uma matriz inversível para qualquer ponto (z_1, z_2) de $B_0^2(\epsilon)$.

Ao tomar um ponto pre-fixado p podemos definir localmente a aplicação inversa de $(\theta_0)_p : \mathbb{R}^4 \rightarrow F_p \subset M = \mathbb{T}^4 \times B_0^2(\epsilon)$, onde F_p é a órbita que passa por p , logo existem vizinhanças V_p e $B_0^4(r)$ de p e da origem em \mathbb{R}^4 respectivamente tal que:

$$\begin{aligned} (\theta_0)_p^{-1} : \quad V_p &\longrightarrow B_0^4(r) \\ (w_1, w_2, w_3, w_4) &\longmapsto A(z_1, z_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\theta_0)_p^{-1}(w_1, w_2, w_3, w_4) = & \left(w_1 \cos 2\pi z_1 + w_2 \sin 2\pi z_1, -w_1 \sin 2\pi z_1 + w_2 \cos 2\pi z_1, \right. \\ & \left. w_3 \cos 2\pi z_2 + w_4 \sin 2\pi z_2, -w_3 \sin 2\pi z_2 + w_4 \cos 2\pi z_2 \right) \end{aligned}$$

Agora para este mesmo ponto p , vamos a definir uma aplicação que será fundamental para o desenvolvimento deste trabalho, a função ϑ_p , que vem a ser a composição das aplicações seguintes:

- (i) π_p aplicação projeção de $T_p(\mathbb{T}^4)$ sobre T_pF .
- (ii) $D(\theta_0)_p^{-1}$ aplicação inversa da derivada da ação aplicada ao ponto p .

$$\begin{array}{ccc}
 & \vartheta_p & \\
 & \curvearrowright & \\
 T_p(\mathbb{T}^4) & \xrightarrow{\pi_p} & T_pF \xrightarrow{D(\theta_0)_p^{-1}} \mathbb{R}^4 \\
 \\
 V & \longmapsto & \pi_p(V) \longmapsto D(\theta_0)_p^{-1} \circ \pi_p(V)
 \end{array}$$

Onde o campo $V = \sum_{i=1}^4 t_i Y_i$.

Poderíamos dizer que a aplicação ϑ vem a ser a inversa da projeção de θ_0 .

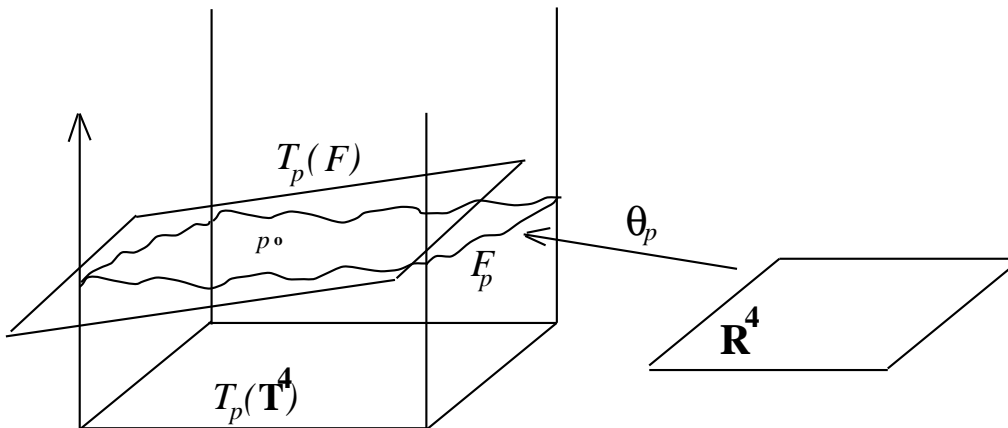


Figura 3.1: aplicação ϑ_p

Essa aplicação será definida “globalmente” em toda a variedade da seguinte forma:

3.1

A aplicação ϑ

Definição 3.1 *Seja $\tilde{\theta}$ uma C^1 -perturbação da ação θ_0 de \mathbb{R}^4 em $M = \mathbb{T}^4 \times B_0^2(\epsilon)$ definimos a aplicação $\tilde{\vartheta}$ associada a $\tilde{\theta}$ da seguinte forma*

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\vartheta} : & T(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\
 & (p, \sum_{i=1}^4 t_i Y_i) & \longmapsto & \tilde{\vartheta}_p(\sum_{i=1}^4 t_i Y_i)
 \end{array}$$

Sendo então ϑ formulada para cada $(p, v) \in TM$ do modo seguinte :

$$\tilde{\vartheta}(p, v) = \tilde{\vartheta}_p(v) = (D\tilde{\theta}_p)^{-1} \circ \pi_p(v)$$

Esta função $\tilde{\vartheta}$ depende tanto do ponto como do campo onde está sendo aplicado. Observe que como uma projeção faz parte da aplicação então esta não depende das coordenadas $\{Z_1, Z_2\}$ do campo. Por exemplo, quando θ_0 é a nossa ação inicial, p é o ponto $(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2)$ e $V = \sum \bar{y}_i Y_i$ um campo, então

$$\begin{aligned} \vartheta(p, \sum \bar{y}_i Y_i) &= (\cos(2\pi z_1)\bar{y}_1 + \sin(2\pi z_1)\bar{y}_2)X_1 + \\ &\quad (-\sin(2\pi z_1)\bar{y}_1 + \cos(2\pi z_1)\bar{y}_2)X_2 + \\ &\quad (\cos(2\pi z_2)\bar{y}_3 + \sin(2\pi z_2)\bar{y}_4)X_3 + \\ &\quad (-\sin(2\pi z_2)\bar{y}_3 + \cos(2\pi z_2)\bar{y}_4)X_4. \end{aligned}$$

Esta aplicação em particular é associada a matriz $(A(z_1, z_2))^{-1}$ inversível que a representa, devido ao fato desta aplicação ser linear com respeito ao campo de vetores. (Porém não é linear com respeito ao ponto de aplicação).

E em geral, Se θ é uma ação em \mathbb{R}^n sobre uma variedade M^{n+1} definida pelos campos de vetores $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ onde

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}(z)Y_j$$

e $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ são os campos de vetores canônicos. Denotamos como $A(z) = (a_{ij})_{ij}$ a matriz dos coeficientes destes campos de vetores. Uma C^1 -perturbação $\tilde{\theta}$ de θ define naturalmente, em cada ponto, uma bijeção linear $\tilde{\vartheta} : H \rightarrow D$ que é a inversa da projeção de $\tilde{\theta}$ sobre H , onde H é \mathbb{R}^n , plano tangente a \mathbb{T}^n que é gerado pelos campos canônicos e $D = \mathbb{R}^n$ o domínio da ação. É claro que quando $\tilde{\theta} = \theta$ então $\tilde{\vartheta}$ é dado pela matriz $(A(z))^{-1}$ na base canônica.

3.2

Holonomia de $T^3 \times \mathbb{R}$

Supor que a folha F_p tem a forma $T^3 \times \mathbb{R}$ nos leva a deduzir que ela tem 3 direções compactas logo podemos encontrar tres vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ e definir

as curvas fechadas $\alpha_i(t) = tv_i$ em \mathbb{T}^4 tal que seus respectivos levantamentos $\gamma_i(t)$ a partir do ponto p na folha F_p também são fechadas na variedade M .

Logo podemos formar uma base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de vetores unitários de \mathbb{R}^4 contendo os anteriores e com a condição de que a matriz que faz a mudança de base com a canônica tem coeficientes racionais. As curvas $\{\alpha_i\}_{i=1}^4$ definem o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{T}^4)$ no ponto p . Tomemos em conta que a folha não é supostamente compacta na quarta direção.

Definição 3.2 *Sejam os vetores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ que formam uma base de \mathbb{R}^4 , a partir destes definimos os campos de vetores correspondentes*

$$\begin{aligned} V_i : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto V_i(p) = (p, v_i) \end{aligned}$$

Definição 3.3 *Seja p o ponto origem e F_p a órbita que contém este ponto e a qual é compacta no mínimo nas três direções $\{v_1, v_2, v_3\}$.*

Seja \mathbb{T}_0^3 o toro mergulhado na órbita F_p que contém o ponto p e que vem a ser o levantamento de $\mathbb{T}^3 \times 0 = \langle \{v_1, v_2, v_3\} \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Para cada ponto $x = (y_1, y_2, y_3, 0, z_1, z_2) \in \mathbb{T}_0^3$ definimos as curvas $\alpha_i(x)(t) = tv_i + \bar{x}; t \in [0, 1], i = 1, 2, 3, 4$ em $\mathbb{T}^3 \times 0$, onde $\bar{x} = (y_1, y_2, y_3, 0)$, e seu respectivo levantamento $\gamma_i(x)(t)$ em $\mathbb{T}_0^3 \subset F_p$.

Agora definamos a aplicação que descreve a holonomia da folha F_p para cada ponto $(y_1, y_2, y_3, 0, z_1, z_2)$ de \mathbb{T}_0^3 . Com respeito a quarta direção v_4 , tem-se

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T}_0^3 &\longrightarrow \mathbb{T}_1^3 \\ x &\longmapsto f(x) = \gamma_4(x)(1) \end{aligned}$$

\mathbb{T}_1^3 é o toro que também está mergulhado em F_p e que vem a ser o conjunto formado pelos pontos $\gamma_4(x)(1)$ para cada $x \in \mathbb{T}_0^3$

Em simples palavras $f(x)$ é o ponto obtido depois de seguir pela direção v_4 começando no ponto x . f pode ser considerada como uma aplicação de um espaço bidimensional num outro, também bidimensional, devido a que a diferença entre x e $f(x)$ só se dá nas coordenadas Z_1, Z_2 .

Em virtude de $\tilde{\theta}$ ser uma perturbação C^1 -próxima de θ_0 então f é C^1 -próxima da identidade.

Definição 3.4 Para cada ponto em \mathbb{T}_0^3 se faz corresponder sua respectiva coordenada (z_1, z_2) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{T}_0^3 &\longrightarrow Proj_{z_1, z_2}(\mathbb{T}_0^3) \\ (y_1, y_2, y_3, 0, z_1, z_2) &\longmapsto (z_1, z_2) \end{aligned}$$

onde $Proj_{z_1, z_2}(\mathbb{T}_0^3)$ denota a projeção do toro \mathbb{T}_0^3 no plano Z_1, Z_2 . Como definido, cada ponto $(y_1, y_2, y_3, 0, z_1, z_2)$ pertence a folha F_p .

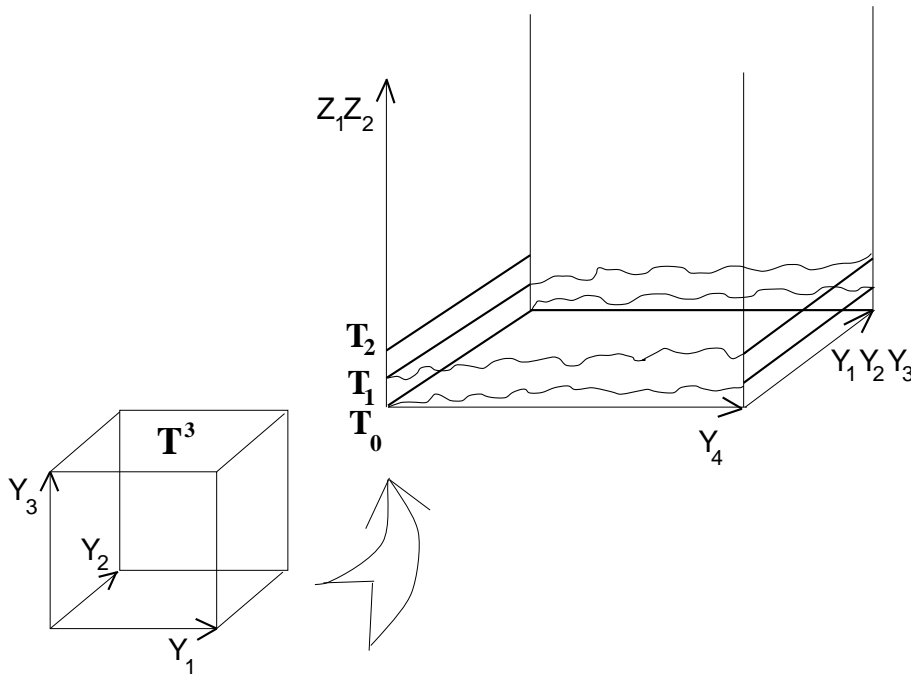


Figura 3.2: Aplicações f e φ

E assim sucesivamente, temos aplicações respectivas para cada toro \mathbb{T}_n^3 de F_p dispostos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \mathbb{T}_0^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi_1 : \mathbb{T}_1^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi_2 : \mathbb{T}_2^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \varphi_n : \mathbb{T}_n^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

3.3

Primeira Afirmação

A seguir o Teorema principal ou demonstração pelo absurdo da afirmação deste capítulo :

Teorema 3.5 *Seja θ_0 a ação definida acima e p o ponto origem. Se $\tilde{\theta}$ é uma $C^1 - \delta$ -próxima de θ_0 para $0 < \delta < R$, onde R é tal que $\|D^2(\theta_0)_p^{-1}\| \geq 2R$ então não existem órbitas do tipo $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$ para a ação $\tilde{\theta}$.*

Demonstração

Vamos supor por absurdo que exista ao menos uma órbita de $\tilde{\theta}$, passando por um ponto p , que tenha a forma $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$, logo existe um espaço tridimensional, denotada por V , no espaço do cobrimento da folha e cujo levantamento forma a parte compacta da órbita. Os seguintes casos foram classificados após analisar como este espaço V pode interceptar os sub-espacos canônicos $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ e $\langle Y_3, Y_4 \rangle$. A escolha dos campos V_i que geram V são feitas segundo estas condições.

Primeiro caso : se

$$\dim\{V \cap \langle Y_1, Y_2 \rangle\} = 2 \quad e \quad \dim\{V \cap \langle Y_3, Y_4 \rangle\} = 1$$

então $\langle Y_1, Y_2 \rangle \subset V$ e podemos tomar

$$V_1 = Y_1 \quad e \quad V_2 = Y_2 \quad e \quad V_3 = aY_3 + bY_4$$

onde a, b são números racionais simultaneamente não nulos.

Segundo caso : este caso é analogo ao primeiro. Se

$$\dim\{V \cap \langle Y_1, Y_2 \rangle\} = 1 \quad e \quad \dim\{V \cap \langle Y_3, Y_4 \rangle\} = 2$$

então $\langle Y_3, Y_4 \rangle \subset V$ e podemos tomar

$$V_1 = aY_1 + bY_2 \quad e \quad V_2 = Y_3 \quad e \quad V_3 = Y_4$$

onde a, b são números racionais simultaneamente não nulos.

Terceiro caso : caso diferente aos anteriores e se da quando

$$\dim\{V \cap \langle Y_1, Y_2 \rangle\} = 1 \quad e \quad \dim\{V \cap \langle Y_3, Y_4 \rangle\} = 1$$

então podemos tomar

$$V_1 = aY_1 + bY_2 \quad e \quad V_2 = cY_3 + dY_4 \quad e \quad V_3 = eY_1 + fY_2 + gY_3 + hY_4$$

onde a, b, c, d, e, f, g, h são números racionais não nulos.

V avaliada num ponto, que pode ser a origem, é gerada por 3 vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ os quais são levados em 3 geradores de $\pi_1(\mathbb{T}^4)$ e aos quais correspondem os respectivos campos $\{V_1, V_2, V_3\}$. Os campos V_i ; $i = 1, 2, 3$ são as direções onde a folha é compacta.

Notemos que qualquer seja o caso, como visto anteriormente, duas direções necessariamente terão a forma

$$V_1 = aY_1 + bY_2 \quad e \quad V_2 = cY_3 + dY_4$$

onde a, b são números racionais e tanto o vetor (a, b) como (c, d) são vetores não nulos. Fixemos elas assim.

Denotemos a curva $\alpha_i(t) = tv_i$; $t \in [0, 1]$ para $i = 1, 2, 3$ que fazem parte do grupo fundamental de \mathbb{T}^4 e tomemos seus levantamentos respectivos na folha F_p , começando no ponto p , especificamente num toro \mathbb{T}_0^3 mergulhado na folha e contendo o ponto p , denotemos a estas curvas fechadas por

$$\gamma_i(t) = tv_i + \varphi_0(tv_i)$$

agora se caminhamos pela folha na direção não compacta v_4 chegaremos à formação de novas curvas também fechadas

$$\tilde{\gamma}_i(t) = tv_i + f(\varphi_0(tv_i))$$

que se encontram no toro \mathbb{T}_1^3 . Tanto γ_i como $\tilde{\gamma}_i$ são levantamentos de α_i em \mathbb{T}_0^3 e \mathbb{T}_1^3 respectivamente.

Ao supor que a folha F_p tem três direções compactas podemos obter por propriedades topológicas as seguintes igualdades:

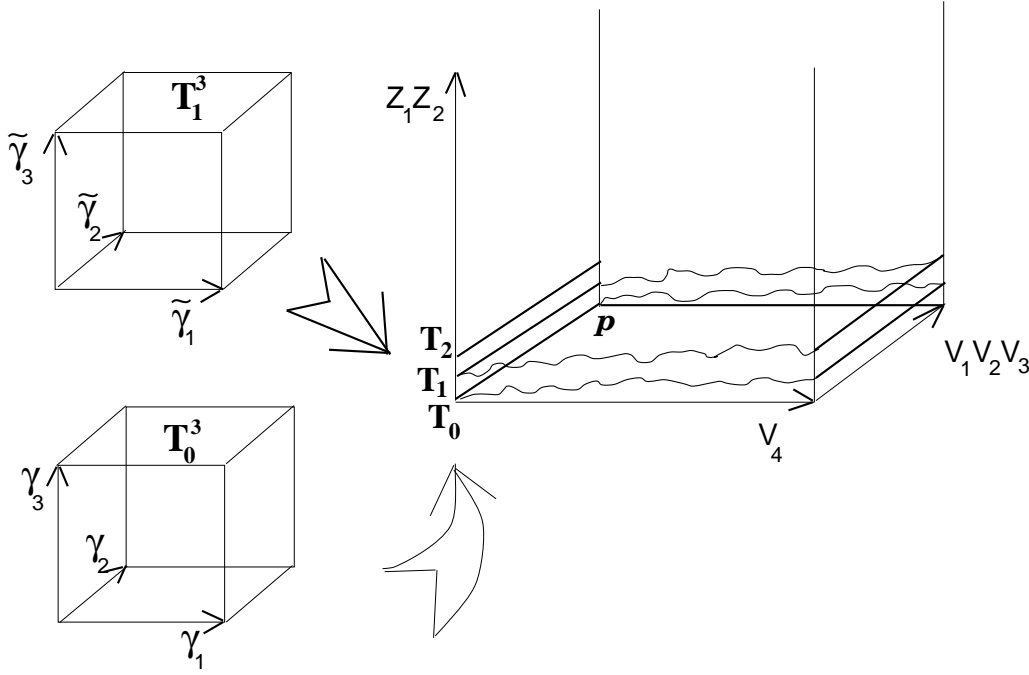
$$\int_0^1 \tilde{\vartheta}(\gamma_i(t), \gamma_i'(t)) dt = \int_0^1 \tilde{\vartheta}(\tilde{\gamma}_i(t), \tilde{\gamma}_i'(t)) dt$$

para $i = 1, 2, 3$. E generalizando para qualquer ponto $p = (y_1, y_2, y_3, 0, z_1, z_2) \in \mathbb{T}_n^3$ quando $i = 1, 2, 3$ temos :

$$\int_0^1 \tilde{\vartheta}(p + \gamma_i(t), \gamma_i'(t)) dt = \int_0^1 \tilde{\vartheta}(p + \tilde{\gamma}_i(t), \tilde{\gamma}_i'(t)) dt$$

E a integral fica da seguinte forma :

$$0 = \int_0^1 \left[\tilde{\vartheta}(p + \tilde{\gamma}_i(t), \tilde{\gamma}_i'(t)) - \tilde{\vartheta}(p + \gamma_i(t), \gamma_i'(t)) \right] dt$$


 Figura 3.3: Levantamentos dos α_i

$$= \int_0^1 \left[\tilde{\vartheta}_{p+\tilde{\gamma}_i(t)}(\tilde{\gamma}'_i(t)) - \tilde{\vartheta}_{p+\gamma_i(t)}(\gamma'_i(t)) \right] dt$$

Por definição, $\vartheta = (D\theta_p)^{-1} \circ \pi$ contém uma projeção de $T(\mathbb{T})^4$ sobre T_pF , logo os vetores $\gamma'_i(t), \tilde{\gamma}'_i(t)$ que já se encontram em T_pF e são vetores nos respectivos pontos em que foram levantados ficam na igualdade do modo seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left[\tilde{\vartheta}_{p+\tilde{\gamma}_i(t)}(\tilde{\gamma}'_i(t)) - \tilde{\vartheta}_{p+\gamma_i(t)}(\gamma'_i(t)) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[D\tilde{\theta}_{p+\tilde{\gamma}_i(t)}^{-1} \circ \pi_{p+\tilde{\gamma}_i(t)}(\tilde{\gamma}'_i(t)) - D\tilde{\theta}_{p+\gamma_i(t)}^{-1} \circ \pi_{p+\gamma_i(t)}(\gamma'_i(t)) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[D\tilde{\theta}_{p+\tilde{\gamma}_i(t)}^{-1}(\tilde{\gamma}'_i(t)) - D\tilde{\theta}_{p+\gamma_i(t)}^{-1}(\gamma'_i(t)) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[D\tilde{\theta}_{p+\tilde{\gamma}_i(t)}^{-1}(\tilde{\gamma}'_i(t)) - D\tilde{\theta}_{p+\gamma_i(t)}^{-1}(\tilde{\gamma}'_i(t)) \right] dt \\ &\quad + \int_0^1 \left[D\tilde{\theta}_{p+\gamma_i(t)}^{-1}(\tilde{\gamma}'_i(t)) - D\tilde{\theta}_{p+\gamma_i(t)}^{-1}(\gamma'_i(t)) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[D\tilde{\theta}_{p+\tilde{\gamma}_i(t)}^{-1} - D\tilde{\theta}_{p+\gamma_i(t)}^{-1} \right] (\tilde{\gamma}'_i(t)) dt \\ &\quad + \int_0^1 D\tilde{\theta}_{p+\gamma_i(t)}^{-1} \left[(\tilde{\gamma}'_i(t)) - (\gamma'_i(t)) \right] dt \end{aligned}$$

Se denotamos :

$$\begin{aligned}\varphi(p + tV_i) &= (z_{1i}(t), z_{2i}(t)) \\ f_{(p+tV_i)}(\varphi(p + tV_i)) &= (\tilde{z}_{1i}(t), \tilde{z}_{2i}(t))\end{aligned}$$

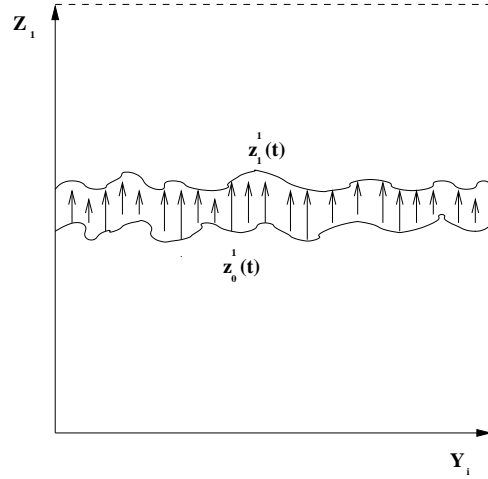


Figura 3.4: Projeção sobre o plano $\{Y_i, Z_2\}$

Consideramos o ponto p sendo a origem, resulta

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^1 \left[D\tilde{\theta}_{tV_i + f_{(tV_i)}(\varphi(tV_i))}^{-1} - D\tilde{\theta}_{tV_i + \varphi(tV_i)}^{-1} \right] (\tilde{\gamma}'_i(t)) dt \\ &+ \int_0^1 D\tilde{\theta}_{tV_i + \varphi(tV_i)}^{-1} \left[(\tilde{\gamma}'_i(t)) - (\gamma'_i(t)) \right] dt\end{aligned}$$

E na igualdade acima :

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^1 \left[D\tilde{\theta}_{\tilde{\gamma}_i(t)}^{-1} - D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1} \right] (\tilde{\gamma}'_i(t)) dt \\ &+ \int_0^1 D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1} \left[(\tilde{\gamma}'_i(t)) - (\gamma'_i(t)) \right] dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[D^2\tilde{\theta}_{s\tilde{\gamma}_i(t) + (1-s)\gamma_i(t)}^{-1} (\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t)) \right] (\tilde{\gamma}'_i(t)) d\varsigma dt \\ &+ \int_0^1 D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1} \left[(\tilde{\gamma}'_i(t)) - (\gamma'_i(t)) \right] dt\end{aligned}$$

E tal expressão se aproxima da seguinte expressão:

$$\simeq \int_0^1 \int_0^1 [D^2(\theta_0)_p^{-1}(w)] \cdot V_i d\varsigma dt$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^1 D(\theta_0)_p^{-1} [0] dt \\
 = & \int_0^1 \int_0^1 [D^2(\theta_0)_p^{-1}(w)] \cdot V_i d\zeta dt
 \end{aligned}$$

Mas por dados iniciais quando $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 p_0 & = (z_{1i}(0), z_{2i}(0)) = (z_{1i}(1), z_{2i}(1)) \\
 p_1 & = (\tilde{z}_{1i}(0), \tilde{z}_{2i}(0)) = (\tilde{z}_{1i}(1), \tilde{z}_{2i}(1)) \\
 v_0 & = p_1 - p_0 \\
 & = \tilde{\gamma}_i(0) - \gamma_i(0) \\
 & = \tilde{\gamma}_i(1) - \gamma_i(1)
 \end{aligned}$$

Notemos que tanto para $i = 1, 2, 3$ o vetor diferença v_0 é o mesmo. Isto se deve a que o toro da órbita se fecha nas direções analisadas.

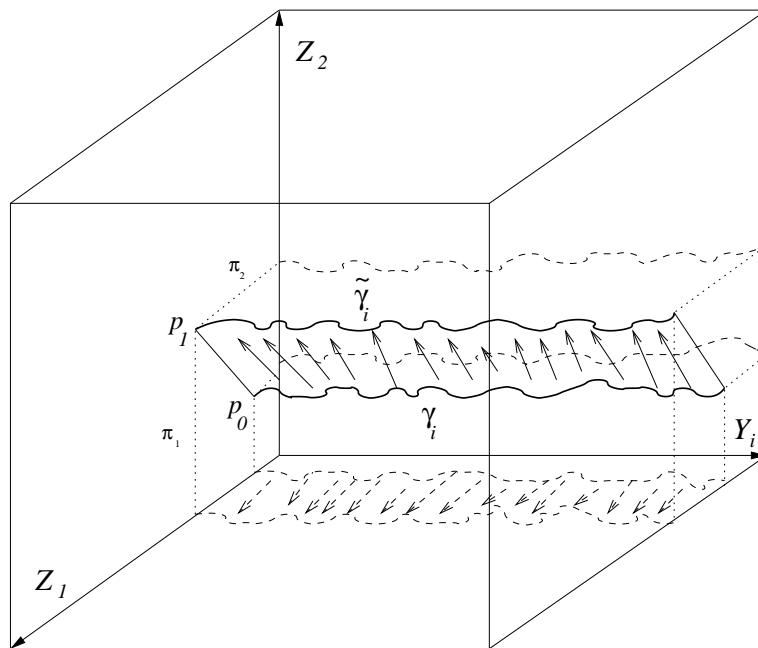


Figura 3.5: Projeção sobre o espaço $\{Y_i, Z_1, Z_2\}$

Observação 3.6 Queremos salientar o fato que o plano resultante da diferenciação das curvas $\gamma_i(t)$ e $\tilde{\gamma}_i(t)$ no plano $\{V_i = Y_i, Z_1, Z_2\}$, onde $i = 1, 2$ ou 3 , não chega a ser uma superfície com uma grande “torção” pois estamos supondo que $\tilde{\theta}$ é uma C^1_δ -aproximação de θ_0 com δ suficientemente pequeno, menor que $\pi/4$ e $0 < \delta < R$ onde $\|D^2(\theta_0)_p^{-1}\| \geq 2R$ sendo p o ponto origem (em geral um ponto fixo qualquer).

De fato se $\tilde{X}_i = \sum a_i(z_1, z_2)Y_i + b_1(z_1, z_2)Z_1 + b_2(z_1, z_2)Z_2$ então os valores $b_j(z_1, z_2)$ são C_δ^1 -próximos de zero.

$|\gamma_i(t) - \tilde{\gamma}_i(t)| < \delta$, esta desigualdade representa a C_δ^0 -aproximação e quer nos dizer que o vetor diferença $\zeta_i(t) = \gamma_i(t) - \tilde{\gamma}_i(t)$ tem um módulo suficientemente pequeno.

$|\gamma'_i(t) - \tilde{\gamma}'_i(t)| < \delta$, esta desigualdade representa a C_δ^1 -aproximação (aceleração) e quer nos dizer que a direção ou ângulo em que se movimenta o vetor $\zeta_i(t)$ é menor que δ e onde este é menor que $\pi/4$. Por esta razão a diferença de curvas projetadas sobre o plano z_1, z_2 (como se este fosse um toro) não pode ser como a figura mostrada abaixo.

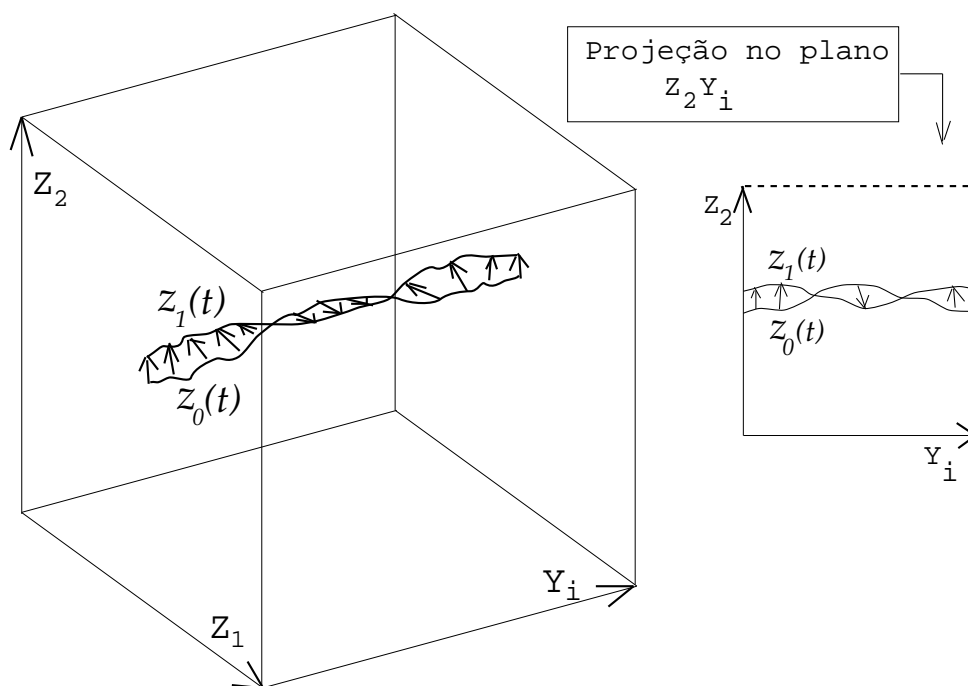


Figura 3.6: impossível torção

Vamos fazer uma análise da curva

$$\begin{aligned} \zeta_i &: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ t &\mapsto \zeta_i(t) \end{aligned}$$

onde $\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t) = (0, 0, 0, 0, \zeta_i(t))$. A imagem de ζ_i deve estar contido em uma região que ocupa um pequeno ângulo que, em máximas proporções, é menor que um semi-quadrante $\pi/4$ e isto novamente como resultado do argumento de $\tilde{\theta}$ ser uma C_δ^1 -aproximação de θ_0 .

Por dados iniciais sabemos que $w = (r, s) = \zeta_i(0) = \zeta_j(1)$ para $i, j = 1, 2, 3$, e por $\tilde{\theta}$ ser uma C^1 -aproximação de θ_0 então $w \simeq \zeta_i(t)$ para

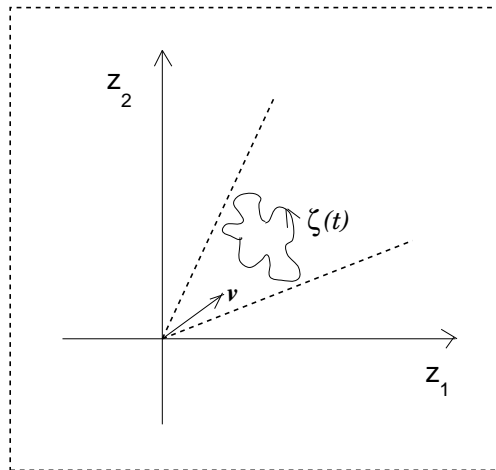


Figura 3.7: a função $\zeta(t)$

$i = 1, 2, 3$ e $t \in [0, 1]$, pela proximidade de $\zeta_i(0)$ para $\zeta(t)$ também temos que o produto interno de w com $\zeta_i(t)$ sempre é positivo.

Analisemos a expressão

$$\int_0^1 \int_0^1 [D^2(\theta_0)_p^{-1}(w)] \cdot V_i \, d\zeta dt = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} r \sin 2\pi z_1 & -r \cos 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ r \cos 2\pi z_1 & r \sin 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \sin 2\pi z_2 & -s \cos 2\pi z_2 \\ 0 & 0 & s \cos 2\pi z_2 & s \sin 2\pi z_2 \end{pmatrix} V_i \, d\zeta dt$$

Ao supor que a folha não é compacta, estamos supondo que o vetor $w = (r, s)$ é diferente do vetor nulo, logo a matriz quadrada $M(r, s)$ que compõe a expressão possui duas submatrizes onde ao menos uma delas é inversível e os vetores V_i , seja $(a, b, 0, 0)$ ou $(0, 0, c, d)$, são por suposição não nulos, logo podemos encontrar um ρ e uma vizinhança aberta desta matriz $B_M(\rho)$ (na variedade de matrizes do posto de $M(r, s)$) de raio ρ tal que para todo elemento desta vizinhança estes ainda conservem a propriedade de ter ao menos uma submatriz inversível, Logo para todo $s, t \in [0, 1]$: $[D^2 \tilde{\theta}_{s\tilde{\gamma}_i(t) + (1-s)\gamma_i(t)}^{-1}](\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t))$ correspondente a $\tilde{\theta}$, C^1 -perturbação, ρ -próximo de $M(r, s)$ pertencente a esta vizinhança também terá a propriedade mencionada acima. Além disso este $\delta(\rho)$ será tomado de tal forma que para todo $t \in [0, 1]$, $\gamma'_i(t)$ seja um vetor próximo de V_i e portanto um vetor não nulo.

Notemos na expressão acima, que quando a primeira submatriz é inversível, então a equação que contém o produto desta matriz com o vetor

$V_1 = (a, b, 0, 0)$ resulta num vetor W_1 não nulo e fazendo o produto interno desta por este mesmo vetor chegaremos que a nova expressão integral é não nula.

E no outro caso, quando a segunda submatriz for não nula, a equação que contém o produto desta matriz com o vetor $V_2 = (0, 0, c, d)$ resultará num vetor W_2 não nulo e novamente fazendo o produto interno com este vetor não nulo chegamos que a nova expressão integral é não nula.

Agora olhando a equação abaixo vemos que em qualquer que for o caso o termo final é diferente de zero (fazendo o respectivo produto interno). Como a primeira expressão é considerada numa vizinhança que ainda conserve as propriedades de inversão da submatriz e vetor não nulo, logo chegamos a uma contradição com o resultado decorrentes das propriedades topológicas acima.

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[D^2 \tilde{\theta}_{s\tilde{\gamma}_i(t)+(1-s)\gamma_i(t)}^{-1} (\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t)) \right] (\tilde{\gamma}'_i(t)) d\zeta dt \\
 &\quad + \int_0^1 D \tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1} \left[(\tilde{\gamma}'_i(t)) - (\gamma'_i(t)) \right] dt \\
 &\simeq \int_0^1 \int_0^1 [D^2(\theta_0)_p^{-1}(w)].V_i d\zeta dt \\
 &\quad + \int_0^1 D(\theta_0)_p^{-1}[0] dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 [D^2(\theta_0)_p^{-1}(w)].V_i d\zeta dt \\
 &= 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} r \sin 2\pi z_1 & -r \cos 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ r \cos 2\pi z_1 & r \sin 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \sin 2\pi z_2 & -s \cos 2\pi z_2 \\ 0 & 0 & s \cos 2\pi z_2 & s \sin 2\pi z_2 \end{pmatrix} V_i d\zeta dt \\
 &= 2\pi \int_0^1 \int_0^1 W_i d\zeta dt
 \end{aligned}$$

Agora para fazer os cálculos, comecemos denotando as expressões seguintes:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \int_0^1 \int_0^1 (D^2(\theta_0)_p^{-1}w).V_i d\zeta dt \\
 B_0 &= \int_0^1 D(\theta_0)_p^{-1}[0] dt = 0 \\
 A_1 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[D^2 \tilde{\theta}_{s\tilde{\gamma}_i(t)+(1-s)\gamma_i(t)}^{-1} (\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t)) \right] (\tilde{\gamma}'_i(t)) d\zeta dt \\
 B_1 &= \int_0^1 D \tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1} \left[(\tilde{\gamma}'_i(t)) - (\gamma'_i(t)) \right] dt
 \end{aligned}$$

Primeiro passo.- Como a expressão abaixo

$$A_0 = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} r \sin 2\pi z_1 & -r \cos 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ r \cos 2\pi z_1 & r \sin 2\pi z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \sin 2\pi z_2 & -s \cos 2\pi z_2 \\ 0 & 0 & s \cos 2\pi z_2 & s \sin 2\pi z_2 \end{pmatrix} V_i d\zeta dt$$

esta composta por $D^2(\theta_0)_p^{-1}(w)$, uma matriz fixa e inversível (ou de posto 2) e para algum $i : [D^2(\theta_0)_p^{-1}(w)]V_i$ é um vetor não nulo logo existirá um $0 < R < 1$ tal que $\|A_0\| \geq 2R$ então $\|A_0 + B_0\| \geq 2R$

Segundo passo.- Limitando as expressões. Dado $R > 0$ Existe $0 < \delta < R$ tal que $\forall x \in \{\varsigma \tilde{\gamma}_i(t) + (1 - \varsigma)\gamma_i(t)/t, \varsigma \in [0, 1]\}$ tem se que $\|D^2\tilde{\theta}_x^{-1} - D^2(\theta_0)_p^{-1}\| < R/4$, considerando a segunda derivada como uma forma bilinear que pode ser normada. Além disso como $\zeta(0) = \zeta(1) = w$ e $\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t) = (0, 0, 0, 0, \zeta(t))$ então para $0 < \delta < 1$ (tomamos um δ menor se for necessário) tal que se $\|\tilde{\gamma}_i - \gamma_i\| < \delta$ então $\|\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t) - w\| < R/4M$ onde $\|D^2(\theta_0)_p^{-1}\| \leq M$

$$\begin{aligned} \|A_1 - A_0\| &= \left\| \int_0^1 \int_0^1 [D^2\tilde{\theta}_x^{-1} - D^2(\theta_0)_p^{-1}](\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t))(\tilde{\gamma}'_i(t)) d\zeta dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 [D^2(\theta_0)_p^{-1}](\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t) - w)(\tilde{\gamma}'_i(t)) d\zeta dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \|D^2\tilde{\theta}_x^{-1} - D^2(\theta_0)_p^{-1}\| \cdot \|\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t)\| \cdot \|\tilde{\gamma}'_i(t)\| d\zeta dt \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \|D^2(\theta_0)_p^{-1}\| \cdot \|\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t) - w\| \cdot \|\tilde{\gamma}'_i(t)\| d\zeta dt \\ &\leq R/4 + R/4 = R/2 \end{aligned}$$

Terceiro passo.- Limitando as expressões. Como $\gamma_i(t) \sim V_i$ e $\tilde{\gamma}_i(t) \sim V_i$ então Se $\|\tilde{\gamma}_i - \gamma_i\| < \delta$ então $\|\tilde{\gamma}'_i(t) - \gamma'_i(t)\| < R/2C$ onde

$$C = \sup\{\|D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1}\|/t \in [0, 1]\}$$

$$\begin{aligned} \|B_1 - B_0\| &= \left\| \int_0^1 [D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1}](\tilde{\gamma}'_i(t) - \gamma'_i(t)) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|D\tilde{\theta}_{\gamma_i(t)}^{-1}\| \cdot \|\tilde{\gamma}'_i(t) - \gamma'_i(t)\| dt \end{aligned}$$

$$\leq R/2$$

Sabemos por suposição que

$$\begin{aligned} 0 = \|A_1 + B_1\| &= \|(A_0 + B_0) + (A_1 - A_0) + (B_1 - B_0)\| \\ &\geq \|A_0 + B_0\| - \|A_1 - A_0\| - \|B_1 - B_0\| \\ &\geq 2R - R/2 - R/2 = R > 0 \end{aligned}$$

chegamos assim a uma contradição.

□