2
Preliminares

2.1
Noções basicas de uma ação

Uma **ação suave** de um grupo de Lie G numa variedade M é uma aplicação de classe C^∞ , $\theta : G \times M \to M$, satisfazendo às propriedades abaixo:

(i) $\theta(gh, x) = \theta(g, \theta(h, x))$

(ii) $\theta(e, x) = x$

para todo $g, h \in G$ e $x \in M$ onde e é a identidade de G.

Denotaremos por $\theta_g : M \to M$ à aplicação $\theta_g(x) = \theta(g, x)$. Da definição segue-se que $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$ para todo $g \in G$, o que mostra que $\theta_g : M \to M$ é um difeomorfismo C^∞.

A **órbita** de um ponto $x \in M$ pela ação θ é o subconjunto

$$\mathcal{O}_x(\theta) = \{\theta(g, x) \in M : g \in G\}$$

Dizemos que θ é uma **ação compacta** quando todas as suas órbitas são compactas. O **grupo de isotropia** de $x \in M$ é o subgrupo

$$G_x = G_x(\theta) = \{g \in G : \theta(g, x) = x\}$$

É claro que G_x é fechado em G. Dado $x \in M$, a aplicação $\theta_x : G \to M$ dada por $\theta_x(g) = \theta(g, x)$ induz uma imersão injetiva $G/G_x \to M$ cuja imagem é $\mathcal{O}_x(\theta)$. Portanto caso G/G_x seja compacto tal aplicação será um difeomorfismo de G/G_x sobre a órbita de x.

Quando para todo $x \in M$ $\dim \mathcal{O}_x = \dim G$ dizemos que a ação θ é **localmente livre**.

Os subgrupos fechados G_x de $G = \mathbb{R}^4$ são da forma $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l$ com $0 \leq k \leq 4$, $0 \leq l \leq 4$ e $0 \leq k + l \leq 4$. Se a ação considerada é localmente livre os G_x serão da forma $\mathbb{Z}^l$ com $0 \leq l \leq 4$. Portanto as órbitas da ação localmente livre serão homeomorfas a $\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$ com $k + l = 4$.

2.2 Ações do $\mathbb{R}^k$

No caso em que G é o grupo aditivo $\mathbb{R}^k$, uma ação $\theta : \mathbb{R}^k \times M \to M$ de classe $C^r(r \geq 1)$ é gerada por k campos de vetores de M. Com efeito, seja $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ uma base do $\mathbb{R}^k$ e para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$ coloquemos $\theta_j(t, p) = \theta(tw_j, p)$. Como é fácil verificar, para todo $j \in \{1, 2, ..., k\}$, θ_j é um fluxo de classe C^r, ao qual esta associado o campo de vetores X^j, de classe C^{r-1}, definido por $X^j(p) = \frac{d}{dt}\theta_j(t, p)|_{t=0}$. É fácil ver que o fluxo de X^j é θ_j e denotando $\theta_j(t, p) = X^j_t(p)$ podemos escrever

$$\theta\Big(\sum_i^k t_i w_i, p\Big) = X^1_{t_1} \circ X^2_{t_2} \circ ... \circ X^k_{t_k}(p)$$

Dizemos que os campos $X^1, X^2, ..., X^k$ são **geradores da ação** θ. Como a soma em $\mathbb{R}^k$ é comutativa, temos que

$$X^i_t \circ X^j_s = X^j_s \circ X^i_t$$

Para quaisquer $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$ e $s, t \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1 *Sejam $X^1, X^2, ..., X^k$ k campos de vetores de classe $C^r(r \geq 1)$ definidos em M. Suponhamos que para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$, o fluxo X^i_t está definido em $\mathbb{R} \times M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *Os campos $X^1, X^2, .., X^k$ são geradores de uma ação de classe C^r, $\theta : \mathbb{R}^k \times M \to M$.*

b) *Para quaisquer $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$ e $s, t \in \mathbb{R}$ temos $X^i_t \circ X^j_s = X^j_s \circ X^i_t$.*

c) *Para quaisquer $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$, temos $[X^i, X^j] = 0$.*

Demonstração

Ver (Cam).

Seja θ uma ação suave de $\mathbb{R}^4$ sobre $M = \mathbb{T}^4 \times B^2_0(\epsilon)$ definida pelos campos de vetores X_1, X_2, X_3, X_4. Usando o fato de que $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$, podemos dar coordenadas $(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2)$ para M; Sejam $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Z_1, Z_2$ os correspondentes campos de vetores. Assuma que θ é tal que

$$X_j(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2) = \sum_{i=1}^4 a_{ij}(z_1, z_2) Y_i$$

chamaremos a tal ação de **horizontal homogênea**.

Em nosso caso o grupo é $\mathbb{R}^4$ e $M = \mathbb{T}^4 \times B_0^2(\epsilon)$ é uma variedade de dimensão 6 podendo também ser o toro $\mathbb{T}^6$. Agora para cada base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de T_eG satisfazendo $[v_i, v_j] = 0$ para $i \neq j$, a ação $\theta : G \times M \to M$ localmente livre define uma familia X_1, X_2, X_3, X_4 de campos de vetores em M:

$$X_i(x) = D\theta_x(e)(v_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

os quais são linearmente independentes em cada ponto e satisfazem a relação $[X_i, X_j] = 0$ para $i \neq j$. Numa variedade aberta, tal familia define o que chamamos de ação local.

Se M é compacta e tem uma métrica Riemanniana suave, o espaço das ações em M tem uma métrica definida pela correspondente C^r métrica nos campos de vetores. Mais precisamente, para esta métrica, uma perturbação $\tilde{\theta}$ de θ é tal que as derivadas até a ordem r de $\tilde{X}_i$ e X_i estão próximas em todos os pontos de M. Se M não é compacta, cada subconjunto compacto de M define uma pseudo-métrica e este conjunto de pseudo-métricas definem uma C^r-topologia no espaço de campos de vetores.

2.3 Teorema de Estabilidade Local

Nosso interesse em ações homogêneas horizontais do grupo $\mathbb{R}^4$, na variedade M é justificada pelo seguinte teorema chamado de **Teorema da estabilidade local**.

Teorema 2.2 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^1 e codimensão n de uma variedade M e F uma folha compacta com grupo de holonomia finito. Existe uma vizinhança U de F, saturada por $\mathcal{F}$, na qual todas as folhas são compactas com grupo de holonomia finito. Além disso, podemos definir uma retração $\pi : U \to F$ tal que para toda folha $F' \subset U$, $\pi/F' : F' \to F$ é um recobrimento com um número finito de folhas e para todo $y \in F$, $\pi^{-1}(y)$ é homeomorfo a um disco de dimensão p e é transversal a $\mathcal{F}$. A vizinhança U pode ser tomada arbitrariamente pequena.*

Demonstração

Ver (Cam).

Vejamos um corolário deste teorema.

Corolário 2.3 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^1 e codimensão n de uma variedade M e F uma folha compacta com grupo de holonomia finito.Então* *existe uma vizinhança* U *de* F*, saturada por* $\mathcal{F}$*, na qual todas as folhas são compactas com grupo fundamental finito.*