# 1
# Introdução

Seja $M$ uma variedade suave de dimensão $n+2$. O objetivo inicial deste trabalho seria estudar a $C^k$- estabilidade de ações $\theta : \mathbb{R}^n \times M \to M$ suaves, localmente livres e de codimensão 2. Mas por enquanto apresentaremos uma ação específica deste tipo, onde o grupo $\mathbb{R}^4$ age numa variedade de dimensão 6, esperando que o estudo deste exemplo no futuro nos conduza a resultados mais gerais.

Em detalhes, seja $\theta_0$ uma ação localmente livre de $\mathbb{R}^4$ na variedade $M = \mathbb{T}^4 \times B_0^2(\epsilon)$, onde $\mathbb{T}^4$ é o toro de dimensão 4 (em geral $\mathbb{T}^n$ é o toro de dimensão $n$) e $B_0^2(\epsilon)$ é a bola bidimensional de centro (0,0) e raio $\epsilon$, e tal ação é gerada pelos campos de vetores:

$$\begin{aligned}
X_1(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2) &= \cos 2\pi z_1 Y_1 + \sin 2\pi z_1 Y_2 \\
X_2(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2) &= -\sin 2\pi z_1 Y_1 + \cos 2\pi z_1 Y_2 \\
X_3(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2) &= \cos 2\pi z_2 Y_3 + \sin 2\pi z_2 Y_4 \\
X_4(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2) &= -\sin 2\pi z_2 Y_3 + \cos 2\pi z_2 Y_4
\end{aligned}$$

linearmente independentes em cada ponto $(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2) \in M$ e satisfazendo $[X_i, X_j] = 0$, onde os $Y_i$ ; $1 \leq i \leq 4$ são os campos de vetores canônicos correspondentes as coordenadas $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ de $\mathbb{T}^4$. Denotemos também como $Z_1, Z_2$ os campos de vetores correspondentes as coordenadas $(z_1, z_2)$ com respeito a $B_0^2(\epsilon)$. Nota-se que todas as órbitas da ação são compactas.

Este caso particular foi motivado pela ação $\theta_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ que foi dada como exemplo no artigo "Stability of compact actions of $\mathbb{R}^n$ of codimension one" (Sal), apresentado por N. Saldanha. Esta ação é gerada pelos campos:

$$\begin{aligned}
X_1(y_1, y_2, z) &= \cos 2\pi z Y_1 + \sin 2\pi z Y_2 \\
X_2(y_1, y_2, z) &= -\sin 2\pi z Y_1 + \cos 2\pi z Y_2
\end{aligned}$$

Seja $\tilde{\theta}$ uma outra ação $C^1$-próxima satisfazendo as mesmas relações.

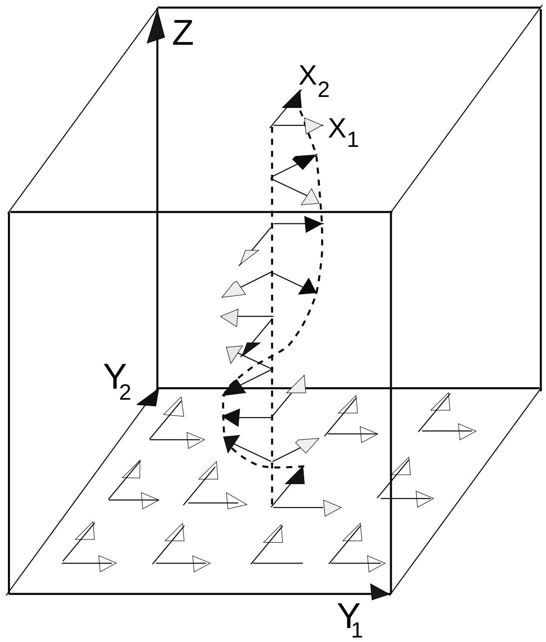


Figura 1.1: Os campos $X_1$ e $X_2$



Queremos saber se $\tilde{\theta}$ ainda conserva propriedades ou características semelhantes à ação inicial $\theta_0$, como a compacidade das folhas. Para afirmar esta compacidade devemos ter que toda folha definida por$\tilde{\theta}$ seja compacta, ou seja, esta tenha a forma $\mathbb{T}^4$ porém aqui só chegamos a provar por negação que a folha não tem a forma $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$ e nem $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ faltando provar que tal folha não tería a forma $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^3$ e nem $\mathbb{R}^4$ para completar a afirmação da compacidade da ação.

O método usado para provar as duas primeiras afirmações mediante a negação está baseado no desenvolvimento do artigo de N. Saldanha (Sal) o qual foi mencionado acima. Ao analisarmos estas provas vemos que este método não poderia ser mais usado para demonstrar as outras duas afirmações que completariam o resultado requerido. Métodos futuros a encontrar determinarão se efectivamente $\tilde{\theta}_0$ é uma ação compacta. Por enquanto a compacidade fica como conjetura.

Para desenvolver nossa demonstração como primeiro passo vamos supor condições iniciais que favoreçam resultados imediatos como dotar de uma $C^1$-topologia ($C^1$-distância) os campos de vetores e suavizar as ações e seus respectivos campos de vetores .

Resultados parecidos a este, mas com outras condições, foram tratados anteriormente e foram a causa do estudo deste tema. Por exemplo, o estudo da $C^1$-estabilidade de ações compactas no caso de codimensão 1 e quando o domínio da ação é $\mathbb{R}^n$ foi realizado por N. Saldanha (Sal). Ele definiu e analisou dois tipos de estabilidade de uma órbita da ação como a seguir :

Uma órbita $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ é **totalmente estável** ($C^1$-T-estável) se para toda vizinhança $U$ da órbita $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ existe $\delta > 0$ tal que toda familia $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n\}$ de campos de vetores que geram uma ação local $\tilde{\theta}$ definida em $U$ com $d_{C^1}(X_j, \tilde{X}_j) < \delta;\ j = 1, ..., n$ tem a propriedade que as órbitas que interceptam $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ são compactas. Caso contrário, $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ é dita $C^1$ **totalmente instável** ($C^1$-T-instável).

Uma órbita $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ é $C^1$ **localmente instável** ($C^1$-L-instável) se para todo $\delta > 0$ existe uma familia $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n\}$ de campos de vetores definidos sobre $M$, que geram uma ação local $\tilde{\theta}$, que coincide com $\theta$ fora de $\mathbb{T}^n \times (-\delta, \delta)$ com $d_{C^1}(X_j, \tilde{X}_j) < \delta;\ j = 1, .., n$ e tal que as órbitas de $\tilde{\theta}$ que interceptam $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ são não compactas. Caso contrário, $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ é dita $C^1$ **localmente estável** ($C^1$-L-estável).

No mesmo trabalho provou que estas classes eram equivalentes sob certas condições.

Também, T. Begazo e N. Saldanha (Bes) realizaram um trabalho de $C^1$-estabilidade no caso em que o domínio da ação é o grupo de Heisenberg e a variedade é de dimensão 4, ou seja uma ação também de codimensão 1, porém eles provaram que neste caso os tipos de estabilidade não são mais equivalentes.

Como vimos o objetivo inicial deste trabalho foi ver se ainda se conservam a estabilidade de uma folha no caso em que a codimensão é 2. Para uma ação em geral porém dadas as dificuldades viu-se melhor começar por um caso em particular (a ação dada acima) e generalizar para qualquer ação da mesma codimensão e com condições análogas a esta.

Logo neste trabalho provaremos, para o exemplo $\theta_0$ como definido acima, o seguinte resultado no capítulo 3:

**Teorema 1.1** *Seja $\theta_0$ a açao definida acima e $p$ o ponto origem. Se $\tilde{\theta}$ é uma $C^1 - \delta$-próxima de $\theta_0$ para $0 < \delta < R$, onde $R$ é tal que $||D^2(\theta_0)_p^{-1}|| \geq 2R$ então não existem órbitas do tipo $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$ para a ação $\tilde{\theta}$.*

E no capítulo 4 se provará a afirmação seguinte:

**Teorema 1.2** *Seja $\theta_0$ a açao definida acima e $p$ o ponto origem. Se $\tilde{\theta}$ é uma $C^1 - \delta$-próxima de $\theta_0$ para $0 < \delta < R$, onde $R$ é tal que $||D^2(\theta_0)_p^{-1}|| \geq 2R$ então não existem órbitas do tipo $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ para a ação $\tilde{\theta}$.*