



Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

**Estudo da estabilidade de um exemplo de  
ação compacta de codimensão 2**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Nicolau Saldanha

Rio de Janeiro  
janeiro de 2006



**Rosa Elvira Quispe Ccoyllo**

**Estudo da estabilidade de um exemplo de  
ação compacta de codimensão 2**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Nicolau Saldanha**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Tania Begazo**

UFPa

**Prof. María Herminia de Paula e Leite Mello**

UERJ

**Prof. Sebastião Marcos Antunes Firmo**

UFF

**Prof. Paul Schweitzer**

PUC-Rio

**Prof. Derek Douglas Jack Hacon**

PUC-Rio

**Prof. Carlos Frederico Palmeira**

PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 18 de janeiro de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

Graduação: Matemática-Universidad Nacional Mayor de San Marcos-Lima-Perú (1994-1998).

Mestrado: Matemática-Universidade Federal Fluminense (1999-2001).

Doutorado: Matemática-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2001-2005).

#### Ficha Catalográfica

Quispe Ccoyllo, Rosa Elvira

Estudo da estabilidade de um exemplo de ação compacta de codimensão 2 / Rosa Elvira Quispe Ccoyllo; orientador: Nicolau Saldanha. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2006.

v., 56 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Folheações. 3. Estabilidade. 4. Codimensão 2. 5. Ações de  $\mathbb{R}^n$ . I. Saldanha, Nicolau. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

A meu orientador Nicolau Saldanha.

A minha família.

A Michel G.

Aos Professores e funcionários do departamento.

Aos meus amigos e colegas do departamento.

À CAPES e à PUC-Rio.

## Resumo

Quispe Ccoyllo, Rosa Elvira; Saldanha, Nicolau. **Estudo da estabilidade de um exemplo de ação compacta de codimensão 2**. Rio de Janeiro, 2006. 56p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

N. Saldanha no seu artigo “Stability of compact actions of  $\mathbb{R}^n$  of codimension one” de 1994 considerou uma ação do grupo  $\mathbb{R}^n$  sobre uma variedade de dimensão  $n + 1$ , a qual é gerada por  $n$  campos de vetores  $X_1, \dots, X_n$  com a propriedade de que todas as suas órbitas são compactas (ação compacta). Aqui ele definiu dois tipos de estabilidade para uma folha: estabilidade local e total, os quais são equivalentes no caso da ação acima e sob certas condições. Em um outro trabalho, Tania Begazo e N. Saldanha tomando uma ação do grupo de Heisenberg sobre uma variedade de dimensão 4 concluíram que estas classes de estabilidade não eram mais equivalentes. Agora, neste trabalho tentaremos encontrar condições de estabilidade de uma folha em sua forma mais geral (ie as folhas da ação perturbada continuam compactas) para uma ação de codimensão 2, usando para isso um exemplo muito conveniente.

## Palavras-chave

Folheações. Estabilidade. Codimensão 2. Ações de  $\mathbb{R}^n$ .

## Abstract

Quispe Ccoyllo, Rosa Elvira; Saldanha, Nicolau. **Study of stability of an example of a compact action of codimension 2** Rio de Janeiro, 2006. 56p. PhD Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

N. Saldanha in his paper “Stability of compact actions of  $\mathbb{R}^n$  of codimension one” of 1994, considered an action of  $\mathbb{R}^n$  on a manifold of dimension  $n + 1$  which is generated by  $n$  vector fields  $X_1, \dots, X_n$  such that all its orbits are compact. Here he defined two kinds of stability for an orbit, local and total stability, proving that under certain conditions, these kinds of stability were equivalent. In another work, Tania Begazo and N. Saldanha proved that this equivalence fails for compact actions of the Heisenberg group. In the present work we will try to find conditions of stability of an orbit for an action of codimension 2, using for this a very convenient example.

## Keywords

Foliations. Stability. 2-codimension.  $\mathbb{R}^n$ -Actions.

## Sumário

1	Introdução	<b>9</b>
2	Preliminares	<b>12</b>
2.1	Noções básicas de uma ação	12
2.2	Ações do $\mathbb{R}^k$	13
2.3	Teorema de Estabilidade Local	14
3	Inexistência de órbitas do tipo $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$	<b>16</b>
3.1	A aplicação $\vartheta$	17
3.2	Holonomia de $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$	18
3.3	Primeira Afirmação	21
4	Inexistência de órbitas do tipo $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$	<b>31</b>
4.1	Holonomia de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$	32
4.2	Deduções e Projeções	39
4.3	Número de Translação	43
4.4	Demonstração da Segunda Afirmação	46
	Referências Bibliográficas	<b>56</b>

## Lista de figuras

1.1	Os campos $X_1$ e $X_2$	10
3.1	aplicação $\vartheta_p$	17
3.2	Aplicações $f$ e $\varphi$	20
3.3	Levantamentos dos $\alpha_i$	23
3.4	Projeção sobre o plano $\{Y_i, Z_2\}$	24
3.5	Projeção sobre o espaço $\{Y_i, Z_1, Z_2\}$	25
3.6	impossível torção	26
3.7	a função $\zeta(t)$	27
4.1	Levantamentos dos $\alpha_i$ em $F_p$	34
4.2	$w_i \simeq (r, 0)$ para $i = 1, 2, 3$	36
4.3	Região $\mathcal{R}$	38
4.4	Região sequencial	39
4.5	Aplicação $\tilde{\psi}_P$	40
4.6	Curvas quase verticais	41
4.7	Continuidade de $\check{g}_j$	45
4.8	Conjugação de $f_j$	48
4.9	Região $Q$	50