

3

Teoria de Microestrutura de Mercado

3.1

Introdução

A análise das microestruturas de mercado estuda a estrutura institucional, na qual as transações envolvendo ativos financeiros são, efetivamente, concluídas. Na grande maioria dos casos, ao se realizar estudos envolvendo instrumentos financeiros, principalmente no que tange às análises de longo prazo, muitas das características apresentadas, tais como, o caráter discreto dos preços, são deixadas de lado. A determinação de quais estruturas devem ser consideradas ao modelar os fenômenos econômicos requer cuidado e atenção.

Dentre as estruturas presentes quando da realização de transações envolvendo ativos financeiros, destacam-se: a adoção de incrementos fixos para as cotações dos ativos – *ticks*; o intervalo irregular de tempo observado entre as diferentes transações ocorridas ao longo do dia (ou sua não-observância); a existência de *spreads* entre os preços de compra (*bid prices*) e venda (*ask prices*) ofertados pelos formadores de mercado (*marketmakers*); e a variação do volume (número de contratos) referente a cada operação realizada ao longo do dia.

Conforme já colocado, dependendo do tipo de análise a ser implementada, tais estruturas podem ser deixadas de lado sem maiores danos. Entretanto, para outros propósitos, tais como mensuração dos custos de execução, liquidez, comparação de diferentes mecanismos de formação de mercado etc, a análise das chamadas microestruturas é de extrema importância. Atualmente este tipo de análise tem enorme relevância dentro da pesquisa aplicada em Economia e Finanças.

A seguir serão apresentadas três das principais questões abordadas no estudo das microestruturas de mercado.

3.2

Dados de alta frequência

Esta seção é dedicada à definição das variáveis de interesse utilizadas na tese. Cabe lembrar que tais variáveis são obtidas a partir da manipulação das informações referentes aos registros das operações envolvendo ativos financeiros, tanto no que diz respeito à sua própria definição, quanto no que se refere ao conceito do que se considera “novo negócio” – transação onde o nível de preços é alterado, tendo ocorrido em intervalo de tempo não nulo em relação ao último registro efetuado.

- Instante de tempo do i-ésimo negócio: t_i (medido em segundos);
- Preço do i-ésimo negócio: P_i (medido em unidades monetárias);
- Oferta de compra (*marketmakers*) no instante do i-ésimo negócio: *Ask Price_i* (medido em unidades monetárias);
- Oferta de venda (*marketmakers*) no instante do i-ésimo negócio: *Bid Price_i* (medido em unidades monetárias);
- Retorno do i-ésimo negócio: $y_i = \ln(P_i / P_{i-1})$;
- Variação de preços do i-ésimo negócio: $Y_i = P_i - P_{i-1}$ (medido em unidades monetárias);
- Valor do *tick* (menor unidade de variação de preços admitida nas negociações): medido em unidades monetárias;
- Variação de preços* do i-ésimo negócio: $Y_i^* = (P_i - P_{i-1}) / tick$ (medido em unidades – múltiplo do *tick*);
- Duração do i-ésimo negócio: $x_i = t_i - t_{i-1}$ (medida em segundos);
- Volume do i-ésimo negócio: v_i (medido em unidades monetárias);
- *Spread* do i-ésimo negócio: $s_i = Bid Price_i - Ask Price_i$ (medido em unidades monetárias);
- Volatilidade do i-ésimo negócio: y_i^2 .

Vale ressaltar que enquanto um “novo negócio” (alteração de preços e intervalo de tempo não-nulo), conforme definido anteriormente, não ocorre, as variáveis vão sendo acumuladas. A exceção à regra é o *spread* de compra e venda, onde o novo valor corresponde à média dos *spreads*, ponderados pelos volumes das transações não caracterizadas como “novo negócio”.

3.3

Modelagem de dados oriundos de transações financeiras

Um dos mais importantes avanços verificados na área de Econometria aplicada a Finanças foi, sem dúvida alguma, a criação das bases de dados contendo o registro das transações financeiras negócio-a-negócio. Assim, informações relevantes do próprio processo de fechamento das operações (instante de tempo entre os diferentes negócios, preços praticados, volumes transacionados,...) e da dinâmica das estruturas presentes (preços de compra e venda ofertados pelos formadores de mercado, condições de mercado,...) podem ser analisadas e estudadas cuidadosamente.

Na contramão do que fora mencionado, a complexidade das bases de dados disponíveis representam um desafio adicional aos pesquisadores, tendo em vista que a informação contida nestas não se mostra adequada à estrutura conhecida até então. Negócios espaçados de forma irregular ao longo do tempo, dificuldade de identificação e captura de padrões sazonais intradiários e problemas na definição de um modelo de previsão (o instante de tempo ao qual corresponderá uma determinada transação financeira é estocástico) são apenas alguns dos “novos problemas” a serem enfrentados pelos estudiosos do assunto.

Outro ponto que merece destaque diz respeito ao caráter discreto do processo de evolução de preços observados – *ticks*, cujos efeitos atingem de maneira diferente as propriedades observadas nas séries temporais de preço e retorno. Com relação aos efeitos sobre os preços, pode-se destacar a formação de grupos – determinados valores são observados com mais frequência do que

outros. Já no que diz respeito aos retornos, deve-se considerar tanto o período de análise quanto o nível de preços; em outras palavras, como a variação de preços entre transações sucessivas será da ordem de um ou dois *ticks*, então, o retorno a ser determinado será inversamente proporcional ao nível de preços praticados.

3.3.1

Modelo *probit* ordenado

Hausman, Lo e MacKinlay (1992) propuseram um modelo estatístico alternativo para capturar diretamente as mudanças de preço, a partir de técnicas freqüentemente empregadas nos estudos empíricos de variáveis dependentes enumeráveis (ordenamento natural).

Heuristicamente, o modelo *probit* ordenado corresponde a uma generalização do modelo de regressão linear, para casos onde a variável dependente é discreta. Dentre as formulações existentes para modelar preços de ativos financeiros, considerando seu caráter discreto, o *probit* ordenado é a única que captura, de maneira simples e direta, tanto o impacto de variáveis explicativas no nível de preços dos ativos, quanto o intervalo de tempo irregular verificado entre os diferentes negócios.

3.3.1.1

Especificação básica

Considere uma determinada seqüência de preços de transação $P(t_0)$, $P(t_1), \dots, P(t_n)$ referentes aos instantes de tempo t_0, t_1, \dots, t_n , e sejam Y_1, Y_2, \dots, Y_n as variações de preços observadas, ou seja, $Y_k = P(t_k) - P(t_{k-1})$, sendo assumido como múltiplo inteiro de algum divisor – *tick*. Assumindo Y_k^* como sendo uma determinada variável aleatória contínua não observável, tal que:

$$Y_k^* = X_k' \cdot \beta + \varepsilon_k \quad (3.3.1)$$

$$E[\varepsilon_k | X_k] = 0 \quad (3.3.2)$$

$$\varepsilon_k \sim INID N(0, \sigma_k^2) \quad (3.3.3)$$

onde o vetor (qx1) $X_k = [X_{1k} \dots X_{qk}]'$ corresponde ao conjunto das variáveis explicativas consideradas, sendo necessária a determinação da média condicional de Y_k^* e “INID” indica que a seqüência de ruídos (ε_k 's) se mostra independente mas não identicamente distribuída – sendo esta uma das principais diferenças das características deste modelo e aquelas apresentadas pelos modelos econométricos padrão. É importante ressaltar que, nos procedimentos apresentados nesta seção, faz-se referência tanto ao evento (ordem) das transações financeiras, quanto ao instante de tempo no qual as mesmas ocorrem (t_k).

A principal característica dos modelos *probit* ordenados é o pressuposto de que as variações dos preços observados Y_k estão relacionadas à variável Y_k^* , a partir do seguinte modelo probabilístico:

$$Y_k = \begin{cases} s_1 & \rightarrow Y_k^* \in A_1 \\ s_2 & \rightarrow Y_k^* \in A_2 \\ \vdots & \\ s_m & \rightarrow Y_k^* \in A_m \end{cases} \quad (3.3.4)$$

onde os conjuntos A_j formam partições do espaço de estado S^* de Y_k^* , isto é, $S^* = \bigcup_{j=1}^m A_j$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e s_j 's são valores discretos que compreendem o espaço de estado S de Y_k . De modo a simplificar os procedimentos subseqüentes, as partições do espaço de estado S^* são definidas como intervalos fixos.

$$A_1 \equiv (-\infty, \alpha_1] \quad (3.3.5)$$

$$A_2 \equiv (\alpha_1, \alpha_2] \quad (3.3.6)$$

$$\vdots$$

$$A_i \equiv (\alpha_{i-1}, \alpha_i] \quad (3.3.7)$$

$$\vdots$$

$$A_m \equiv (\alpha_{m-1}, \infty) \quad (3.3.8)$$

Embora as variações observadas para os preços dos ativos financeiros possam corresponder a qualquer múltiplo inteiro do *tick*, positivo ou negativo, assume-se que “m” (3.3.4) seja finito, de modo a delimitar o conjunto de parâmetros desconhecidos a serem estimados. Tal procedimento não introduz maiores problemas à modelagem, uma vez que estes estados podem representar múltiplos valores (englobando alterações de grande magnitude) para as variações observadas dos preços. Por exemplo, seja s_k definido como a variação de preço de -5 *ticks* ou menos e s_i definido como a variação de preço de 6 *ticks* ou mais; dessa forma o modelo proposto não faz distinção alguma entre alterações de preços da ordem de 6 ou valores acima, nem de -5 ou valores abaixo. Cabe ressaltar que a cada estado corresponderá uma determinada probabilidade discreta de ocorrência – π_i .

Com relação ao número de estados a serem utilizados na especificação do modelo, tem-se que a escolha dependerá exclusivamente do tipo de análise a ser implementada, estando o número de estados “m” isento de responsabilidade no que diz respeito à acurácia do modelo, mais especificamente, à estimação do vetor de sensibilidade da variável de interesse com relação às variáveis explicativas (β) – grandes amostras (resultado assintótico). Para o caso de pequenas amostras, a introdução de mais estados **pode** prejudicar os resultados do modelo e o próprio processo de estimação.

Na prática, os próprios dados irão impor limites no que tange ao número de estados a serem utilizados, uma vez que simplesmente não existirão

observações para os chamados “estados extremos”, impossibilitando sua estimação.

3.3.1.2

Distribuição condicional das variações de preço

Conforme já mencionado, os distúrbios ε_k 's (3.3.3) não se mostram identicamente distribuídos, quando condicionados a um determinado estado da natureza (X_k 's). A principal razão deste pressuposto se deve à forma irregular e aleatória do espaçamento de tempo entre as diferentes transações financeiras. Se, por exemplo, os preços das transações (Y_k 's) correspondessem a incrementos de Movimentos Brownianos Aritméticos (conforme proposto por Marsh e Rosenfeld - 1986) com variância proporcional a $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, então σ_k^2 seria uma função linear de Δt_k , que varia de transação para transação.

De modo a tornar possível formulações mais genéricas para a questão da heterocedasticidade, pode-se supor que σ_k^2 corresponda a uma função linear de um vetor de variáveis pré-determinadas $W_k = [W_{1k} \dots W_{Lk}]'$, tal que:

$$E[\varepsilon_k | X_k, W_k] = 0, \quad \varepsilon_k \text{ INID } N(0, \sigma_k^2) \quad (3.3.9)$$

$$\sigma_k^2 = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 \cdot W_{1k} + \dots + \gamma_L^2 \cdot W_{Lk} \quad (3.3.10)$$

onde, (3.3.9) e (3.3.10) substituem a hipótese implícita nas equações (3.3.1), (3.3.2) e (3.3.3) e os coeficientes da volatilidade condicional (γ_j) estão elevados ao quadrado, garantindo assim a não-negatividade da mesma. Nesta formulação mais genérica, poder-se-ia acomodar facilmente aquela proposta por Marsh e Rosenfeld (1986), cabendo para tal as seguintes substituições:

$$X_k' \cdot \beta = \mu \cdot \Delta t_k \quad (3.3.11)$$

$$\sigma_k^2 = \gamma^2 \cdot \Delta t_k \quad (3.3.12)$$

Neste caso, W_k contém apenas uma variável (Δt_k) – mesma variável contida em X_k . O fato de a mesma variável estar incluída em X_k e W_k não causa multicolinearidade perfeita (o que impossibilitaria o processo de estimação), pois o primeiro afeta a média condicional de Y_k^* , enquanto que o segundo diz respeito à sua variância condicional.

A estrutura de dependência do processo de variações de preços observado (Y_k) se mostra claramente induzida por Y_k^* e as definições de A_j 's, vez que:

$$P(Y_k = s_j | Y_{k-1} = s_i) = P(Y_k^* \in A_j | Y_{k-1}^* \in A_i) \quad (3.3.13)$$

Como conseqüência, se X_k e W_k são independentes ao longo do tempo, o processo Y_k (observável) também será. Este pressuposto se mostra menos restritivo, não invalidando quaisquer das inferências estatísticas que serão apresentadas a seguir. O único pressuposto que deverá ser respeitado diz respeito à independência condicional dos resíduos (ε_k 's), de modo que toda dinâmica de dependência serial apresentada pela variável de interesse seja capturada por X_k e W_k . Conseqüentemente, a independência dos ε_k 's não necessariamente implica que os Y_k^* 's sejam independentemente distribuídos, uma vez que nenhuma restrição sobre a dependência temporal de X_k 's e W_k 's foi colocada.

A distribuição das variações observadas de preços Y_k , condicionada em X_k e W_k , pode ser determinada a partir dos limites das partições e da função de distribuição de probabilidades de ε_k . Para o caso onde os resíduos se mostram normalmente distribuídos (Gaussianos), a distribuição condicional será:

$$P(Y_k = s_i | X_k, W_k) = P(X_k' \cdot \beta + \varepsilon_k \in A_i | X_k, W_k) \quad (3.3.14)$$

$$P(Y_k = s_i | X_k, W_k) = \begin{cases} P(X_k' \cdot \beta + \varepsilon_k \leq \alpha_1 | X_k, W_k) & \rightarrow i = 1 \\ P(\alpha_{i-1} < X_k' \cdot \beta + \varepsilon_k \leq \alpha_i | X_k, W_k) & \rightarrow 1 < i < m \\ P(\alpha_{m-1} < X_k' \cdot \beta + \varepsilon_k | X_k, W_k) & \rightarrow i = m \end{cases} \quad (3.3.15)$$

$$P(Y_k = s_i | X_k, W_k) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\alpha_1 - X_k' \cdot \beta}{\sigma_k(W_k)}\right) & \rightarrow i = 1 \\ \Phi\left(\frac{\alpha_i - X_k' \cdot \beta}{\sigma_k(W_k)}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_{i-1} - X_k' \cdot \beta}{\sigma_k(W_k)}\right) & \rightarrow 1 < i < m \\ 1 - \Phi\left(\frac{\alpha_{m-1} - X_k' \cdot \beta}{\sigma_k(W_k)}\right) & \rightarrow i = m \end{cases} \quad (3.3.16)$$

Onde,

$\sigma_k(W_k)$ – desvio padrão condicional, ou seja, expresso como função de W_k 's;

$\Phi(\cdot)$ – função de distribuição acumulada (normal padrão).

Pode-se perceber que a probabilidade, associada a uma determinada variação observada de preços, é determinada pela posição da média condicional com relação aos limites das partições do espaço de estados S. Além disso, para uma determinada média condicional $X_k' \cdot \beta$, qualquer deslocamento dos limites associados às partições irá alterar a probabilidade de se observar os respectivos estados.

Cabe ressaltar ainda, conforme mencionado, que o modelo *probit* ordenado pode ser utilizado, independentemente da função de distribuição de probabilidades associada aos distúrbios.

Assim, dados os limites das partições, uma média condicional de valor elevado indicaria uma probabilidade alta de se observar um estado positivo “extremo”. Porém, a denominação do estado associado a tal probabilidade pode estar “oculto” (processo de escolha do número de partições).

Outra vantagem dos modelos apresentados diz respeito ao uso de regressores com significado econômico com relação à variável de interesse, possibilitando a extração de métrica que represente não só o tipo de influência exercida, como também o grau desta em comparação com as demais, presentes na formulação proposta.

Como o processo de estimação dos limites das partições α , dos coeficientes β e da variância condicional σ_k^2 toma por base a informação contida

na amostra (*data-driven*), pode-se dizer que o modelo *probit* ordenado captura a relação empírica entre o espaço de estados (não-observável) contínuo S^* e o espaço de estados discreto (observável) S , como função de variáveis econômicas X_k e W_k .

3.3.1.3

Processo de estimação (máxima verossimilhança)

Seja $I_k(i)$ uma variável indicadora, a qual assume valor um, quando a realização da k -ésima observação Y_k corresponde ao i -ésimo estado s_i , e zero em caso contrário. Então a função log-verossimilhança condicional L do vetor de variações de preços $Y = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]'$, condicionada nas variáveis explicativas $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]'$ e $W = [W_1 \ W_2 \ \dots \ W_n]'$ será:

$$L(Y|X, W) = \sum_{k=1}^n \{A_k + B_k + C_k\} \quad (3.3.17)$$

$$A_k = I_k(1) \log \Phi \left(\frac{\alpha_1 - X_k' \beta}{\sigma_k(W_k)} \right) \quad (3.3.18)$$

$$B_k = \sum_{i=2}^{m-1} I_k(i) \log \left[\Phi \left(\frac{\alpha_i - X_k' \beta}{\sigma_k(W_k)} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha_{i-1} - X_k' \beta}{\sigma_k(W_k)} \right) \right] \quad (3.3.19)$$

$$C_k = I_k(m) \log \left[1 - \Phi \left(\frac{\alpha_{m-1} - X_k' \beta}{\sigma_k(W_k)} \right) \right] \quad (3.3.20)$$

Embora σ_k^2 tenha sido definido como uma função linear de W_k , existem algumas restrições que precisam ser imposta aos parâmetros, de modo a tornar possível a identificação dos mesmos. Por exemplo, pode-se notar que o valor da função log-verossimilhança permanece inalterado, caso os valores dos parâmetros α 's, β 's e σ_k^2 sejam multiplicados por uma mesma constante K – um procedimento típico é definir $\gamma_0 = 1$.

Ainda no que tange aos procedimentos a serem tomados antes do processo de estimação, três pontos merecem destaque:

- A determinação do número de estados m ;
- A especificação dos regressores a serem utilizados;
- A especificação da variância condicional σ_k^2 .

A escolha do número de estados, conforme já comentado, deve tomar por base a amostra disponível (por exemplo, a distribuição de frequência – empírica), evitando-se assim a incorporação de estados aos quais não estejam associadas realizações da variável de interesse.

Com relação à determinação da fórmula funcional para média e variância condicionais, cabe ressaltar que estas dependerão, principalmente, do tipo de análise a ser implementada. Se o objetivo final for a realização de previsões, em geral, a utilização de defasamentos da própria variação de preços e índices de mercado contribuem para a obtenção de bons resultados.

3.3.2

Modelo *logit* ordenado

O modelo *logit* ordenado corresponde a uma extensão do modelo *logit* (binário) padrão, onde o pressuposto básico a ser assumido faz menção à existência de um ordenamento natural nas partições do espaço de estado onde a variável dependente é definida.

Supondo que y_n possa assumir k valores “ordenáveis”, e que $y = 1$ corresponda ao “menor de todos” e $y = k$ ao “maior de todos”. Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P_{1n} &= F(X_n' \cdot \beta) \\
P_{1n} + P_{2n} &= F(\alpha_2 + X_n' \cdot \beta) \\
&\vdots \\
P_{1n} + P_{2n} + \dots + P_{k-1,n} &= F(\alpha_{k-1} + X_n' \cdot \beta) \\
P_{kn} &= 1 - F(\alpha_{k-1} + X_n' \cdot \beta)
\end{aligned}
\tag{3.3.21}$$

onde, P_{in} é a probabilidade condicional da escolha i ocorrer na n -ésima observação, X_n é um vetor de variáveis independentes, β é o vetor de parâmetros, $\alpha_{k-1} > \alpha_{k-2} > \dots > \alpha_2 > \alpha_1$ são os limites das partições do espaço de definição de y_n e

$$F(\alpha_i + X_n' \cdot \beta) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_i - X_n' \cdot \beta)} \tag{3.3.22}$$

é a função logística acumulada.

A motivação por trás deste modelo (McKelvey e Zavoina, 1975; Greene, 1990) é a existência de uma variável contínua não-observável Y_n que corresponde a uma função linear de um conjunto de variáveis explicativas X_n e uma variável estocástica logística padrão ε_n . Assim,

$$Y_n = -X_n' \cdot \beta + \varepsilon_n \tag{3.3.23}$$

Em contrapartida ao modelo *probit* ordenado, onde é assumida normalidade, no modelo *logit* ordenado não são feitas quaisquer considerações com relação à função distribuição de probabilidades das variáveis explicativas.

A estimativa dos parâmetros é feita por máxima verossimilhança e tanto o vetor de parâmetros quanto o limite das partições são estimados conjuntamente.

Neste ponto, cabe ressaltar que o problema de programação não-linear com restrições (modelo *probit/logit* ordenado) pode ser transformado num problema sem restrições, mediante emprego de transformações. São elas:

- Limites das partições monotonicamente crescentes: sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ os parâmetros originais, então define-se $\alpha^*_1, \alpha^*_2, \dots, \alpha^*_N$ como sendo os parâmetros do problema sem restrição e reescreve-se os parâmetros originais como sendo: $\alpha_1 = \alpha^*_1$ e $\alpha_i = \alpha^*_{i-1} + (\alpha^*_i)^2 \rightarrow i = 2, \dots, N$.
- Parâmetros (variância) sempre positivos no modelo *probit* ordenado: sejam γ_0, γ_1 e γ_2 os parâmetros originais, então define-se γ^*_0, γ^*_1 e γ^*_2 como sendo os parâmetros do problema de programação não-linear sem restrições. Assim, deve-se redefinir os parâmetros originais da seguinte forma: $\gamma_i = (\gamma^*_i)^2$.