

### 3 Formulação matemática

Neste capítulo descrevem-se sucintamente as equações governantes dos escoamentos de interesse, as condições de contorno impostas na modelagem do problema e o método numérico empregado para solucionar estas equações. Uma vez que neste trabalho foi utilizado o programa de cálculo comercial *Fluent*<sup>2</sup>, o qual não necessitou de modificações para tratar o problema de interesse, não se dará ênfase aos aspectos relativos à modelagem da turbulência. Note-se, porém que a complexidade dos escoamentos modelados requer uma análise detalhada da influência da escolha do modelo de turbulência sobre os resultados obtidos. Para ser efetuada, esta análise necessita de resultados experimentais detalhados para fins de validação, os quais não se encontram disponíveis.

#### 3.1 Equações governantes

As equações de Navier-Stokes constituem a formulação mais geral governando o escoamento de fluidos, admitida a hipótese de contínuo. Estas equações para o caso de um escoamento não permanente de um fluido contínuo, compressível, viscoso e com condução de calor, que exprimem o transporte de massa, de quantidade de movimento e de energia, e quando escritas em forma diferencial, são<sup>19</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial (\rho H)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho H \vec{u}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{\tau} \cdot \vec{u} - \vec{q}]. \quad (3.3)$$

Nestas equações,  $\rho$  é a densidade,  $\vec{u}$  é o vetor velocidade,  $p$  é a pressão,  $\bar{\tau}$  é o tensor de tensões viscosas,  $H$  é a entalpia total específica e  $\vec{q}$  é o vetor fluxo de calor. Os termos de força de campo e o termo de adição de calor de volume foram negligenciados, posto que é sabido que estes termos não são importantes para as aplicações em aerodinâmica de alta velocidade. Nestas equações, o termo que corresponde ao calor que é transportado por condução se encontra incluído no vetor fluxo de calor,  $\vec{q}$ .

O sistema de equações acima, equações (3.1), (3.2) e (3.3), não é um sistema fechado, pois existem mais incógnitas que equações. Portanto estas necessitam de um conjunto de relações constitutivas que permita fechar o problema. Uma das relações constitutivas a ser considerada é a equação de estado para o fluido que está sendo analisado. No caso em questão, é considerada a equação de gases perfeitos, a qual para o caso de escoamentos compressíveis pode ser expressa como<sup>19</sup>

$$\rho = \frac{p_{op} + p}{\frac{R}{M_w} T}, \quad (3.4)$$

onde  $p_{op}$  é a pressão de operação, a qual é geralmente fixada como sendo zero (0) para números de Mach maiores a 0,1,  $R$  é a constante do gás,  $T$  é a temperatura, calculada a partir da equação da energia e  $M_w$  é a massa molecular do fluido.

O vetor fluxo de calor,  $\vec{q}$ , é obtido pela lei de Fourier para condução de calor

$$\vec{q} = -k\nabla T. \quad (3.5)$$

Note-se que foi negligenciada a transferência de calor por radiação.

Neste trabalho admite-se que o fluido de trabalho, ar, comporta-se como fluido newtoniano. Assim, os componentes do tensor de tensões viscosas são dados por

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right], \quad (3.6)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker.

Da definição da entalpia total específica,  $H$ ,

$$H = e_i + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2, \quad (3.7)$$

as equações de Navier-Stokes podem ser escritas em forma conservativa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(e + p)u_j - \tau_{ij}u_i + q_j] = 0, \quad (3.10)$$

onde a energia total por unidade de volume,  $e$ , é definida como

$$e = \rho \left[ e_i + \frac{1}{2} (u_j u_j) \right]. \quad (3.11)$$

sendo que a energia interna específica,  $e_i$ , é dada por

$$e_i = C_v T, \quad (3.12)$$

onde  $C_v$  é o calor específico a volume constante.

As limitações computacionais, em termos de memória e velocidade de processamento, fazem com que seja necessário o uso de modelos para simular os efeitos da turbulência. Ainda hoje, na faixa de números de Reynolds de interesse prático, a modelagem numérica é incapaz de capturar a totalidade de escalas de movimento associada aos escoamentos turbulentos. Uma maneira de se contornar este problema é se fazer uma média no tempo das equações de Navier-Stokes:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \phi dt, \quad (3.13)$$

onde  $\bar{\phi}$  é o resultado do operador média sobre  $\phi$  e  $\Delta t$  é um intervalo de tempo suficientemente grande quanto comparado com a escala de tempo do movimento turbulento.

Neste processo perde-se informação sobre os detalhes das flutuações turbulentas, porém as características do escoamento médio são preservadas na descrição. Do ponto de vista da engenharia, o conhecimento das propriedades médias do escoamento é muitas vezes suficiente.

Este processo de média temporal, conhecido como média de Reynolds, leva às equações conhecidas como equações de Navier-Stokes com média de Reynolds, RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*). As propriedades ( $\phi$ ) do escoamento são expandidas em uma parte correspondente ao escoamento médio e outra à porção flutuante:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi', \text{ onde } \overline{\phi'} = 0. \quad (3.14)$$

Mediante à utilização desta média, é possível reescrever as equações (3.8) e (3.9) (para a equação (3.10) obtém-se uma expressão análoga), em termos das grandezas médias<sup>19</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{u}_i) = 0, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \\ - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'_i u'_j}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

No caso de escoamentos em que a densidade flutua sob efeito da turbulência, as equações (3.15) e (3.16) podem ser interpretadas como equações de Navier-Stokes com média de Favre, com a velocidade representando valores ponderados pela densidade.<sup>19</sup>

Nas equações (3.15) e (3.16), os termos abertos que requerem hipóteses de fechamento são

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} \rightarrow \text{termos de tensões de Reynolds}, \quad (3.17)$$

os quais representam os efeitos da turbulência e envolvem correlações de segunda ordem entre propriedades flutuantes.

A partir deste ponto do desenvolvimento, dois procedimentos são possíveis; (1) derivar novas equações para estes termos abertos, ou (2) modelar estes termos. A primeira opção, embora possa parecer mais completa, eventualmente encontra uma barreira difícil de ser vencida. O que ocorre é que, ao se derivar uma equação para cada um destes termos abertos aparece pelo menos mais um termo aberto, o qual representa correlações de terceira ordem entre propriedades flutuantes.<sup>20</sup> Portanto, uma questão é decidir onde deter-se, seja por truncamento, seja por modelagem destes termos. Entretanto, independentemente do tipo de abordagem, é indispensável representar corretamente cada um destes termos abertos, os quais representam os processos de transporte devido à turbulência do escoamento.

O processo de análise dos escoamentos através do primeiro tipo de abordagem, i.e., derivar novas equações de transporte para os termos abertos (tensões ou fluxos de Reynolds), passa pela utilização das equações de Navier-Stokes. Estes modelos, os quais são frequentemente chamados de modelos de fechamento de segunda ordem, são apropriados para a modelagem de escoamentos complexos. Eles representam uma alternativa quando as escalas de comprimento e velocidade variam significativamente com a direção; como é o caso de escoamentos anisotrópicos ou espiralados.<sup>21</sup> A desvantagem destes modelos é o custo computacional associado, o qual é geralmente maior quando comparado aos modelos clássicos de viscosidade turbulenta.<sup>21</sup>

Neste trabalho se adota um caminho mais simples, isto é, ao invés de derivar equações de transporte tanto para as tensões, fluxos e dissipação turbulentos, estes termos são modelados utilizando-se o conceito de viscosidade turbulenta introduzido por Boussinesq em 1877.<sup>22</sup> Através deste conceito se assume que, em analogia às tensões viscosas presentes em escoamentos laminares, as tensões turbulentas são proporcionais ao gradiente da velocidade média.<sup>22</sup>

A viscosidade molecular (ou absoluta),  $\mu_l$ , é definida como sendo a resultante da transferência de quantidade de movimento resultante da colisão de moléculas, ( $\mu_l \approx \rho a \ell$ ), onde  $a$  é a velocidade do som e  $\ell$  é o livre caminho médio entre colisões. O conceito de viscosidade turbulenta foi concebido presumindo uma analogia entre o movimento molecular e o movimento turbulento. Assim, em analogia à definição da viscosidade laminar, a viscosidade turbulenta,  $\mu_t$ , é

definida como sendo resultante da transferência de quantidade de movimento resultante da colisão de turbilhões turbulentos, podendo ser estimada como

$$\mu_t \approx \rho V_C L_C, \quad (3.18)$$

onde  $V_C$  e  $L_C$  são respectivamente, a velocidade e o comprimento característicos do movimento turbulento.<sup>22</sup> Assim, esta abordagem requer somente a determinação do valor da viscosidade turbulenta,  $\mu_t$ , ao invés dos termos das tensões e fluxos de Reynolds.

A seguir se descreve com maior detalhe alguns modelos para a viscosidade turbulenta, ou modelos de turbulência, os quais diferem entre si na forma através da qual os valores característicos da escala turbulenta são determinados. Diante da diversidade de modelos existentes, somente serão apresentados aqueles que foram utilizados neste trabalho.

### 3.2 Modelos de viscosidade turbulenta

Os modelos de viscosidade turbulenta são baseados na hipótese de Boussinesq, que liga as tensões turbulentas às taxas de deformações e aos gradientes das propriedades médias<sup>19</sup>

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \left( \rho k + \mu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

onde  $\mu_t$  é o coeficiente de viscosidade turbulenta e  $k$  é a energia cinética média de turbulência.

Neste trabalho foram utilizados dois modelos de viscosidade turbulenta: o modelo de Spalart e Allmaras<sup>23</sup> e um dos modelos correspondente à família dos modelos  $k-\varepsilon$ , o modelo  $k-\varepsilon$  realizável.<sup>24</sup> A faixa de validade dos modelos utilizados foi avaliada a priori analisando (i) a faixa de aplicabilidade dos modelos e (ii) o grau de precisão dos resultados obtidos usando estes modelos. Um modelo é aplicável a um escoamento quando as equações do modelo descrevem adequadamente o escoamento e podem ser resolvidas, independente do grau de precisão destas. Por outro lado, o grau de exatidão de um modelo pode ser

determinado através de comparações entre os resultados obtidos numericamente e valores medidos experimentalmente.

Em relação à aplicabilidade destes modelos, o modelo de Spalart e Allmaras, embora possa, a princípio, ser aplicado a qualquer escoamento turbulento, foi desenvolvido para aplicações aerodinâmicas.<sup>21</sup> Já os modelos  $k-\varepsilon$ , em particular o modelo  $k-\varepsilon$  realizável, podem ser aplicados a qualquer tipo de escoamento turbulento.<sup>21</sup> A forma de avaliar a exatidão de um modelo de turbulência é através de comparações com resultados obtidos a partir de testes experimentais. Assim, comparações de resultados obtidos com o modelo de Spalart e Allmaras com dados experimentais indicam que este modelo permite obter resultados satisfatórios em aplicações envolvendo escoamentos aerodinâmicos, para os quais o modelo foi desenvolvido.<sup>19,21</sup> Porém, este modelo tem algumas limitações, como por exemplo, a incapacidade de prever o decaimento da turbulência homogênea e isotrópica e o escoamento de jatos.<sup>19,21,23</sup> Por sua parte, o modelo  $k-\varepsilon$  realizável prevê com relativa exatidão o comportamento de escoamentos envolvendo rotação, camadas limites com severos gradientes de pressão adversos, separação e recirculação.<sup>19</sup> Uma limitação conhecida deste modelo é que viscosidades turbulentas não físicas podem aparecer quando encontram-se presentes zonas de fluido tanto rotacionais como estacionárias.<sup>19</sup>

### 3.2.1 Modelo de Spalart e Allmaras

O modelo de Spalart-Allmaras<sup>23</sup>, o qual pertence a uma nova classe dos modelos de uma equação, envolve a solução de uma equação diferencial para o coeficiente de viscosidade turbulenta modificada,  $\tilde{\nu}$ ,

$$\rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j \tilde{\nu}}) = G_\nu + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_\nu, \quad (3.20)$$

a qual foi especificamente desenvolvida para aplicações aerodinâmicas envolvendo escoamento com fronteiras sólidas. Nesta equação  $G_\nu$  é a produção da

viscosidade turbulenta e  $Y_v$  é a destruição da viscosidade turbulenta que ocorre na região próxima da parede devido ao bloqueio pela parede e amortecimento viscoso,  $\sigma_{\tilde{v}}$  e  $C_{b2}$  são constantes empíricas.

Neste modelo, o coeficiente de viscosidade turbulenta é definido como

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad (3.21)$$

onde  $f_{v1}$  é uma função de amortecimento

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad (3.22)$$

e  $C_{v1}$  é uma constante empírica.

O termo de produção da viscosidade turbulenta,  $G_v$ , é calculado em função da distância à parede mais próxima,  $d$ , e em função de uma medida da taxa de deformação média do escoamento,  $S$ . Assim, pode-se escrever que

$$G_v = C_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu}, \quad (3.23)$$

onde

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{\chi + \chi f_{v1}}, \quad (3.24)$$

$C_{b1}$  e  $k$  são constantes e  $d$  é a distância à parede mais próxima.

Na equação (3.24), a taxa de deformação média do escoamento,  $S$ , é definida em função do módulo do tensor vorticidade,  $\Omega$ ,

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad (3.25)$$

onde

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.26)$$

A avaliação da taxa de deformação média do escoamento,  $S$ , segundo a equação (3.25) a qual corresponde à formulação original proposta por Spalart e Allmaras, é recomendada quando a turbulência é devida principalmente à geração

de vorticidade nas regiões próximas às paredes sólidas, como ocorre no caso em questão.

### 3.2.2 Modelos $k$ - $\varepsilon$

Os modelos do tipo  $k$ - $\varepsilon$  resolvem uma equação para a energia cinética média de turbulência,  $k$ ,

$$k = \frac{1}{2} \overline{(u'_j u'_j)}, \quad (3.27)$$

e outra para a taxa de dissipação de  $k$ ,  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}. \quad (3.28)$$

Com estas duas propriedades do escoamento, formula-se uma viscosidade turbulenta:

$$\nu_t = \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon}. \quad (3.29)$$

onde  $C_\mu$  é uma constante.

O modelo  $k$ - $\varepsilon$  mais simples é o modelo  $k$ - $\varepsilon$  *padrão* proposto por Launder e Spalding.<sup>25</sup> Este modelo é bastante utilizado por ser robusto, econômico e por apresentar razoável validade para um ampla gama de tipos de escoamentos usados na indústria. Porém, em algumas situações comuns, tais como escoamentos na presença de curvatura das linhas de corrente, escoamentos sob a ação de gradientes de pressão adversos, sob a ação de campos de força, escoamentos com regiões de separação, jatos ou escoamentos com rotação, este modelo apresenta discrepâncias significativas com relação aos experimentos.<sup>21</sup> Conhecidas as limitações do modelo  $k$ - $\varepsilon$  *padrão*, modificações a este modelo foram propostas, dando origem assim ao modelo  $k$ - $\varepsilon$  *realizável*.<sup>24</sup>

O modelo  $k$ - $\varepsilon$  *realizável* difere do modelo  $k$ - $\varepsilon$  *padrão* principalmente em dois aspectos. Primeiro, o modelo  $k$ - $\varepsilon$  *realizável* contém uma nova formulação para a viscosidade turbulenta e, segundo, o uso de uma nova equação de transporte para dissipação da energia cinética turbulenta,  $\varepsilon$ . O termo “realizável”

significa que o modelo satisfaz certas restrições matemáticas sobre a tensão de Reynolds, consistente com a fenomenologia dos escoamentos turbulentos. Este modelo foi amplamente validado<sup>19,24</sup> e os resultados mostraram sua maior adequação a escoamentos envolvendo rotação, camada limites sob a ação de intensos gradientes de pressão adversos, separação e recirculação, do que o modelo *k-ε padrão*. Neste modelo, as equações de transporte de *k* e de *ε* podem ser escritas, usando uma variável genérica  $\phi$ , como

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\phi u_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + G_\phi - Y_\phi, \quad (3.30)$$

onde  $\Gamma_\phi$  representa a difusividade de  $\phi$ ,  $G_\phi$  representa o termo de produção e o termo  $Y_\phi$  representa a destruição. Em uma forma geral, o termo que representa a difusividade,  $\Gamma_\phi$ , é definido como,

$$\Gamma_\phi = \frac{\nu_t}{Pr_{t\phi}}, \quad (3.31)$$

onde  $Pr_{t\phi}$  representa a número de Prandtl em regime turbulento.

A principal diferença entre os tipos de modelos *k-ε* reside na forma como os termos de produção e destruição das quantidades turbulentas nas suas respectivas equações de transporte são obtidos.<sup>26</sup> A Tabela 3-1 mostra, de forma resumida, como estes termos de produção e destruição são calculados para o modelo *k-ε* utilizado neste trabalho.

Tabela 3-1. Termos de produção e destruição do modelo *k-ε realizável*.<sup>26</sup>

Modelo	Termo	Equação para $\kappa$	Equação para $\epsilon$
<i>κ-ε Realizável</i>	Produção	$G_\kappa = 2\mu_t S^2$	$G_\epsilon = \rho C_1 S \epsilon$ $C_1 = \max [0,43; \eta / (\eta + 5)]$
	Destruição	$Y_\kappa = \rho \epsilon$	$Y_\epsilon = \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{\kappa + \sqrt{\mu \epsilon / \rho}}$ $C_1 = 1,9$

É notório que não existe um único modelo de turbulência que seja universalmente aceito como sendo superior aos demais. Qualquer que seja o escoamento tratado, a escolha do modelo de turbulência mais adequado depende

de considerações que envolvem a fenomenologia esperada do escoamento, a prática conhecida para um tipo específico de problema, o nível de aproximação requerido, a potência computacional disponível e o tempo disponível para a simulação. A escolha mais adequada a uma determinada aplicação depende das capacidades e limitações dos diversos modelos de turbulência, as quais podem ser encontradas na literatura.<sup>21,22</sup>

### 3.3 Tratamento da região da parede

#### 3.3.1 Considerações iniciais

Nos escoamentos turbulentos envolvendo a presença de fronteiras sólidas, como é o caso em questão, estas superfícies originam diversos efeitos sobre o transporte das quantidades turbulentas devidos, por exemplo, ao baixo número de Reynolds e à alta tensão de cisalhamento,<sup>21</sup> os quais levam à necessidade de modificações dos modelos de turbulência clássicos, como o modelo  $k-\varepsilon$ . Uma vez que as paredes são as principais fontes de vorticidade e turbulência, o tipo de abordagem adotado na modelagem da região da parede pode influenciar significativamente a fidelidade das soluções obtidas numericamente. Portanto, uma representação apropriada desta região pode determinar o sucesso da resolução dos escoamentos com presença de paredes.

As hipóteses envolvidas restringem os modelos  $k-\varepsilon$  a aplicações envolvendo escoamentos afastados das paredes sólidas.<sup>19,21</sup> Isto é devido, por exemplo, ao fato de que o valor da constante  $C_\mu$ , na equação (3.29), diminui na região viscosa próxima à parede sólida.<sup>21</sup> Assim, estes modelos de turbulência precisam de modelos adicionais apropriados para simular escoamentos com presença de paredes. Estes modelos adicionais, chamados de funções de parede (*wall-functions*<sup>27</sup>), possibilitam a aplicação de condições de contorno a uma certa distância desta, de tal forma que as equações do modelo de turbulência não são resolvidas na região próxima à parede. Por outro lado, o modelo Spalart-Allmaras, o qual foi desenvolvido para aplicações envolvendo escoamentos com presença de paredes sólidas, não requer modelo algum para a vizinhança da parede, desde que

a malha computacional utilizada seja refinada o suficiente como para resolver a região afetada pela viscosidade.

No caso de escoamentos turbulentos, como mostrado na Figura 3-1, o escoamento é dividido em duas grandes regiões, a camada externa, caracterizada pela ausência da turbulência, e a camada interna, caracterizada pelo movimento flutuante aleatório dentro da camada limite turbulenta.<sup>28</sup> A camada limite turbulenta pode ser dividida em três sub-regiões ou subcamadas. Na subcamada mais interna, chamada de subcamada laminar, o escoamento é quase laminar e a viscosidade molecular,  $\mu_l$ , possui um papel predominante na transferência de quantidade de movimento, calor e massa. Na sub-região mais externa, chamada de subcamada logarítmica, os efeitos da turbulência são predominantes. Finalmente, há uma sub-região entre a subcamada laminar e a subcamada logarítmica, chamada de subcamada amortecedora, onde os efeitos da viscosidade molecular e da turbulência são de importância semelhante.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0412755/CA

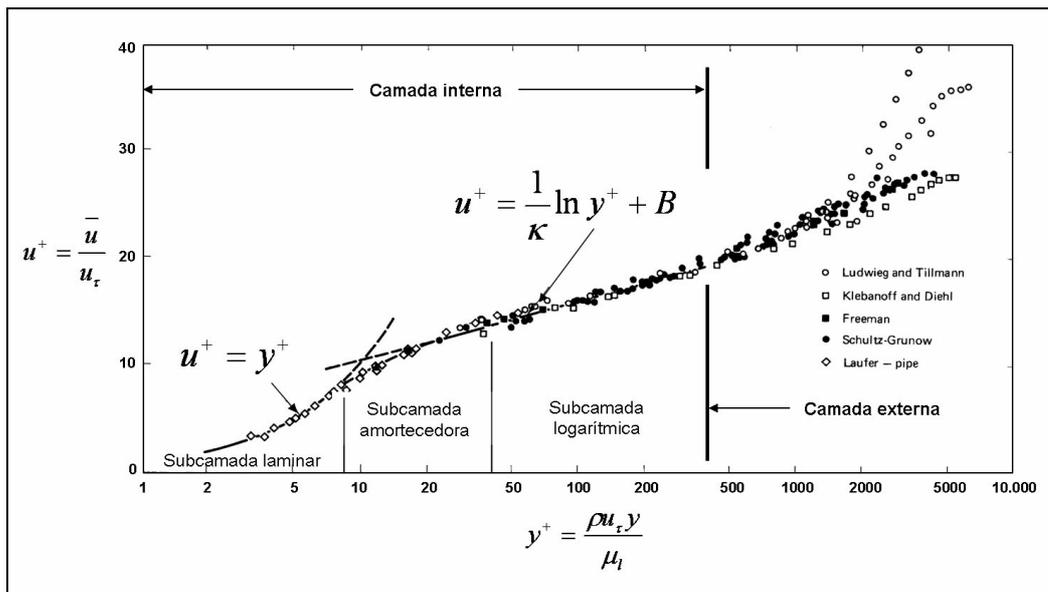


Figura 3-1. Lei da parede universal – Camada limite turbulenta sobre superfícies lisas.<sup>29</sup>

Utilizando as definições dos parâmetros adimensionais  $y^+$  e  $u^+$ , conhecidos como escalas viscosas, dados por

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu_l}, \quad (3.32)$$

onde  $\bar{u}$  representa a velocidade do escoamento médio,  $y$  é a distância à parede,  $\rho$  e  $\mu_l$  são a densidade e a viscosidade do fluido, respectivamente, e  $u_\tau$  é a velocidade de atrito definida como

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (3.33)$$

onde  $\tau_w$  é a tensão de cisalhamento na parede, Prandtl<sup>21</sup> postulou que perto da parede existe uma região onde a velocidade média pode ser determinada apenas utilizando-se as escalas viscosas,  $y^+$  e  $u^+$ ,<sup>21</sup>

$$u^+ = f_w(y^+), \quad (3.34)$$

onde  $f_w$  é uma função apenas de  $y^+$ .

Na subcamada laminar ( $y^+ < 5 - 7$ ), a lei da parede é expressa como

$$u^+ = y^+, \quad (3.35)$$

e na subcamada logarítmica,  $y^+ > 30 - 60$ , a lei da parede, conhecida nesta região como lei de parede logarítmica, pode ser expressa como

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B, \quad (3.36)$$

onde  $\kappa$  é a constante de von Kármán,  $\kappa = 0,41$ , e  $B = 5,2$ .<sup>21</sup>

Para a sub-região amortecedora,  $5 - 7 < y^+ < 30 - 60$ , van Driest<sup>21</sup> derivou uma expressão empírica baseado na hipótese de comprimento de mistura,<sup>21</sup>

$$u^+ = f_w(y^+) = \int_0^{y^+} \frac{2dy'}{1 + [1 + 4\ell_m^+(y')^2]^{1/2}}, \quad (3.37)$$

onde

$$\ell_m^+ = \kappa y^+ [1 - \exp(-y^+ / A^+)]. \quad (3.38)$$

Na equação (3.38),  $A^+ = 26$  e o termo entre colchetes é conhecido como a função de amortecimento de van Driest. Para grandes valores de  $y^+$  ( $> 30 - 60$ ), esta função de amortecimento tende à unidade e a lei logarítmica é reproduzida.

### 3.3.2 Funções de parede

As funções de parede (*wall functions*<sup>27</sup>) são uma coleção de relações semi-empíricas as quais, como indicado na seção anterior, possibilitam a aplicação de condições de contorno a uma certa distância desta, de tal forma que as equações do modelo de turbulência não são resolvidas na região próxima à parede. Assim, é possível determinar os valores médios da velocidade e temperatura ou outros escalares na região próxima à parede.<sup>19</sup>

Neste estudo, quando o modelo *k-ε realizável* foi utilizado, dois tipos diferentes de funções de parede foram empregados, a função de parede “padrão” (*standard wall functions*) e a função de parede de “não-equilíbrio” (*non-equilibrium wall functions*). A função de parede “padrão”, a qual é baseada na proposta de Launder e Spalding,<sup>27</sup> é amplamente usada na simulação de escoamentos. Neste tipo de função de parede, a lei da parede para a velocidade média é expressa como

$$U^* = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^*), \quad (3.39)$$

onde

$$U^* \equiv \frac{U_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\tau_w / \rho}, \quad y^* \equiv \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P}{\mu_l}. \quad (3.40)$$

Nestas equações,  $E = 9,793$  é uma constante empírica,  $U_P$  é a velocidade média do fluido no ponto “P”,  $k_P$  é a energia cinética da turbulência no ponto “P” e  $y_P$  é a distância do ponto “P” à parede.

A lei logarítmica para a velocidade média é admitida válida para  $y^* > 30 - 60$ .<sup>19</sup> No *Fluent*,<sup>2</sup> a lei logarítmica é empregada quando  $y^* > 11,225$ . Quando  $y^* < 11,225$ , nos elementos adjacentes à parede utiliza-se

$$U^* = y^*. \quad (3.41)$$

Note-se que, no *Fluent*, as leis da parede para os valores médios da velocidade e a temperatura são expressos em função de  $y^*$  e não em função de  $y^+$ . Estas quantidades são aproximadamente iguais em camadas limites turbulentas em equilíbrio.<sup>19</sup>

Analogamente à lei da parede para a velocidade média, na função de parede “padrão”, a lei da parede para a temperatura média é constituída por duas partes:<sup>19</sup>

(i) a lei linear para a subcamada térmica condutiva, onde os efeitos da condução de calor são importantes, e (ii) a lei logarítmica para a região turbulenta, onde os efeitos da turbulência dominam a condução de calor.

Nos modelos  $k$ - $\varepsilon$ , a equação da energia cinética da turbulência,  $k$ , é resolvida em todo o domínio de cálculo, incluindo os elementos adjacentes à parede. A condição de contorno imposta para  $k$  na parede é

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0, \quad (3.42)$$

onde  $n$  é a coordenada local normal à parede. A taxa de produção da energia cinética da turbulência,  $G_k$ , e sua taxa de dissipação,  $\varepsilon$ , nos elementos adjacentes à parede são calculadas considerando-se a hipótese de equilíbrio local.<sup>19</sup> Através desta hipótese, assume-se que a taxa de produção de  $k$  e sua taxa de dissipação são iguais nos volumes de controle adjacentes à parede. Assim, a taxa de produção de  $k$  é calculada como

$$G_k \approx \tau_w \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_w \frac{\tau_w}{\kappa \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P}. \quad (3.43)$$

A equação da taxa de dissipação de  $k$ ,  $\varepsilon$ , não é resolvida nos elementos adjacentes às paredes, esta é calculada como

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa y_P}. \quad (3.44)$$

A função de parede “padrão” descreve razoavelmente uma ampla faixa de escoamentos com presença de fronteiras sólidas. Porém, o uso deste tipo de função de parede tende a ser menos confiável quando utilizada em situações onde os escoamentos se afastam das condições que foram assumidas para sua derivação. Entre outras, as hipóteses de cisalhamento constante e equilíbrio local são as que mais restringem a universalidade da função de parede “padrão”.<sup>19</sup> Assim, quando os escoamentos nas regiões próximas à parede estão sujeitos a gradientes de pressão severos ou quando encontram-se em forte não equilíbrio, existe a possibilidade que as predições se vejam comprometidas. Em tais

situações, a função de parede de “não-equilíbrio” pode levar a melhores resultados.<sup>19</sup>

Os dois elementos chave nas funções de parede de “não-equilíbrio” (*non-equilibrium wall functions*<sup>30</sup>) são: (i) a lei logarítmica para a velocidade média de Launder e Spalding sensibilizada aos efeitos do gradiente de pressão, e (ii) o conceito de duas camadas adotado para calcular o balanço da energia cinética da turbulência (produção, dissipação) nos elementos de fluido da vizinhança da parede. A lei da parede para a temperatura média permanece idêntica à da função de parede “padrão”.

Na função de parede de “não-equilíbrio”, a lei logarítmica para a velocidade média, sensibilizada aos efeitos do gradiente de pressão, é expressa como

$$\frac{\overline{U} C_{\mu}^{1/4} k_P^{1/2}}{\tau_w / \rho} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( E \frac{\rho C_{\mu}^{1/4} k_P^{1/2} y}{\mu_l} \right), \quad (3.45)$$

onde

$$\overline{U} = U - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{y_v}{\rho \kappa \sqrt{k}} \ln \left( \frac{y}{y_v} \right) + \frac{y - y_v}{\rho \kappa \sqrt{k}} + \frac{y_v^2}{\mu_l} \right], \quad (3.46)$$

e  $y_v$  é a espessura da subcamada viscosa, a qual é calculada como

$$y_v = \frac{\mu_l y_v^*}{\rho C_{\mu}^{1/4} k_P^{1/2}}, \quad (3.47)$$

onde  $y_v^* = 11,225$ .

A função de parede de “não-equilíbrio” utiliza o conceito de duas camadas para calcular o balanço da energia cinética da turbulência nos elementos de fluido adjacentes às paredes. Este balanço de energia é necessário para resolver a equação de  $k$  nos elementos de fluido situados na vizinhança da parede. Assume-se que os elementos na vizinhança da parede são constituídos de uma subcamada viscosa e uma camada completamente turbulenta. Para as quantidades características da turbulência são prescritas as seguintes dependências funcionais:

$$\begin{aligned}
\tau_t &= \begin{cases} 0, y < y_v \\ \tau_w, y > y_v \end{cases}, \\
k &= \begin{cases} \left(\frac{y}{y_v}\right)^2 k_P, y < y_v, \\ k_P, y > y_v \end{cases}, \\
\varepsilon &= \begin{cases} \left(\frac{2\mu k}{\rho y^2}\right), y < y_v \\ \left(\frac{k^{3/2}}{C_l y}\right), y > y_v \end{cases},
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde

$$C_l = \kappa C_\mu^{-3/4}, \tag{3.49}$$

e  $y_v$  é a espessura da subcamada viscosa, definida na equação (3.47).

As relações (3.48) e (3.49) são utilizadas, nos elementos de fluido situados na vizinhança da parede, para determinar a taxa de produção de  $k$ ,  $G_k$ , e sua taxa de dissipação,  $\varepsilon$ , ambas ponderadas pelo número de elementos, podem ser calculadas a partir dos valores de  $G_k$  e  $\varepsilon$ , necessários ao fechamento das equações de transporte de  $k$  e de  $\varepsilon$ . Este procedimento relaxa a hipótese de equilíbrio local entre produção e dissipação, adotada na função de parede “padrão” para calcular o balanço da energia cinética da turbulência nos elementos da vizinhança da parede.<sup>19</sup>

A capacidade da função de parede de “não equilíbrio” de parcialmente levar em consideração os efeitos do gradiente de pressão e o afastamento da condição de equilíbrio, faz com que este tipo de função de parede seja recomendado para simular escoamentos complexos, onde o escoamento médio e a turbulência estão sujeitos a gradientes de pressão severos e mudanças repentinas.<sup>19</sup>

### 3.4 Condições de contorno

Nas simulações dos escoamentos apresentados neste trabalho, foram utilizados quatro tipos de condições de contorno. Estas condições foram

denominadas “Entrada”, “Saída”, “Superfície” e “Centro”. Nos contornos denominados de “Entrada”, foram fixadas as propriedades do escoamento não perturbado, número de Mach, temperatura e pressão estática, a direção do escoamento, e os parâmetros que caracterizam a turbulência, a viscosidade turbulenta modificada,  $\tilde{\nu}$ , quando é usado o modelo de Spalart e Allmaras, ou a intensidade da turbulência,  $I$ , e a razão de viscosidade turbulenta,  $\mu_t / \mu_l$ , quando o modelo  $k$ - $\epsilon$  é utilizado.

Nos contornos denominados de “Saída” foi fixada uma pressão estática constante,  $p_s$ . Também, para esta condição de contorno, foi fixada a temperatura e os parâmetros de turbulência, i.e., a viscosidade turbulenta modificada,  $\tilde{\nu}$ , no caso do uso do modelo de Spalart e Allmaras, ou a intensidade da turbulência,  $I$ , e o diâmetro hidráulico,  $d_H$ , no caso do modelo  $k$ - $\epsilon$ , os quais vão caracterizar o escoamento reverso no caso deste existir. Nos contornos denominados de “Superfície”, condições de não escorregamento e parede adiabática foram impostas, e, adicionalmente, quando o modelo de Spalart e Allmaras é usado, a viscosidade turbulenta modificada,  $\tilde{\nu}$ , é considerada como sendo igual a zero em todas as superfícies sólidas. Finalmente, condições de simetria, i.e., velocidade normal ao plano de simetria igual a zero e gradientes de todas as variáveis na direção normal ao plano de simetria nulos, foram estabelecidas nos contornos denominados de “Centro”.

Na Tabela 3-2 sumariza-se as condições de contorno utilizadas nas simulações do nosso problema.

Tabela 3-2. Resumo das condições de contorno.

Contorno	Condição Imposta
Entrada:	$M_0, p_0, T_0, \tilde{\nu}$ ou $I$ e $\mu_t / \mu_l$
Saída:	$p_s$ Escoamento reverso: $T, \tilde{\nu}$ ou $I$ e $d_H$
Superfície:	$V_n = 0, V_t = 0, \tilde{\nu} = 0,$ $\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \frac{\partial k}{\partial n} = 0$
Centro:	$V_n = 0,$ $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \phi$ : variável genérica

### 3.5 Método numérico

Nesta seção se descreve, resumidamente, o método numérico que o programa de cálculo *Fluent*<sup>2</sup> utiliza para a resolução das equações governantes do caso em estudo, isto é, equações (3.15), (3.16) e a equação da energia. Uma vez que neste trabalho não foram implementadas modificações no programa de cálculo, os detalhes dos algoritmos de resolução poderão ser encontrados nas referências indicadas abaixo.

A técnica utilizada é baseada no método de volumes finitos para converter as equações (3.15), (3.16) e a equação da energia em um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidas numericamente. Esta técnica consiste em: (i) divisão do domínio de cálculo em um conjunto de volumes de controle discretos usando uma malha computacional; (ii) integração das equações governantes sobre os volumes de controle individuais para construir equações algébricas para as variáveis dependentes discretas, isto é, componentes de velocidade, pressão, temperatura, energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação ou viscosidade turbulenta modificada,  $\tilde{\nu}$ , no caso do uso do modelo de Spalart e Allmaras; (iii) linearização das equações discretizadas e solução do sistema de equações resultante, a fim de atualizar os valores das variáveis dependentes.

O *Fluent* armazena os valores discretos de um escalar qualquer no centróide dos elementos. Porém, como resultado do processo de discretização das equações governantes, valores na face dos elementos são requeridos para os termos convectivos, que serão obtidos utilizando esquemas de interpolação. Neste trabalho, para calcular os valores dos termos convectivos na face dos elementos foi utilizado o esquema de interpolação *Second-Order Upwind*.<sup>19</sup> O termo “upwind” significa que os valores das propriedades na face do elemento são derivados a partir das quantidades no elemento a montante, ou “upwind”, relativo à direção da velocidade normal à face. Assim, quando este esquema de interpolação é utilizado, o valor na face do elemento,  $\phi_f$ , é calculado como

$$\phi_f = \phi + \nabla \phi \cdot \Delta \vec{s}, \quad (3.50)$$

onde  $\phi$  e  $\nabla \phi$  são valores de  $\phi$  e seu gradiente no centróide do elemento a montante, respectivamente, e  $\Delta \vec{s}$  é o vetor deslocamento que une o centróide do

elemento a montante ao centróide da face do elemento. Esta formulação requer a determinação do gradiente  $\nabla\phi$  em cada elemento, o qual é calculado empregando o teorema da divergência.

Uma vez que o *Fluent* armazena os valores da pressão no centróide dos elementos e, que o processo de discretização da equação de conservação de quantidade de movimento requer estes valores na face dos elementos, neste trabalho foi utilizado um esquema de interpolação de segunda ordem (*Second-Order Scheme*<sup>19</sup>) a fim de se obter os valores da pressão na face dos elementos. Através deste esquema, os valores da pressão na face dos elementos são reconstruídos em uma maneira semelhante ao esquema usado para os termos convectivos.<sup>19</sup>

Em nossas simulações foi utilizado um algoritmo de solução segregado e implícito, isto é, as equações governantes foram resolvidas sequencialmente, uma após a outra. Uma vez que, ao utilizar este procedimento, os valores dos componentes da velocidade obtidos da resolução das equações de quantidade de movimento podem não satisfazer à equação da continuidade, uma equação de Poisson é empregada para corrigir a pressão, a qual pode ser obtida a partir das equações de continuidade e de quantidade de movimento. O algoritmo numérico usado para resolver o acoplamento pressão-velocidade, foi o esquema conhecido como *SIMPLE* (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*).<sup>19</sup>