5
Um Modelo de Programação Linear Inteira para o MTTP

A resolução exata do Problema do Torneio com Viagens foi tratada e.g. em [21, 60]. A maior instância resolvida de forma exata com um único processador envolve apenas seis equipes. Easton et al. [21] resolveram uma instância com oito equipes de uma variante do problema que não contempla as restrições de não repetição, usando um *cluster* com 20 processadores em cerca de quatro dias de processamento.

Neste capítulo, aborda-se a resolução exata do MTTP para as instâncias disponíveis em [59], para as instâncias de teste com até seis equipes, modelando-se o problema por programação linear inteira [65] e resolvendo-o com um resolvedor comercial. A resolução exata de instâncias de teste realistas com mais de seis equipes em tempos de processamento razoáveis está, hoje em dia, além do estado da arte do problema.

Definem-se as seguintes variáveis para $1 \leq t, i, j \leq n$ e $1 \leq q \leq 2n-1$:

$$x_{tijq} = \begin{cases} 1, & \text{se a equipe } t \text{ vai da sede da equipe } i \text{ à sede da equipe } j \\ & \text{para jogar na rodada } q, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consideram-se $2n-1$ rodadas em vez das $2n-2$ de todo torneio DRR. Cria-se uma rodada fictícia de índice $2n-1$ (que não é propriamente uma rodada, pois nela não há jogos), onde todas as equipes retornam para suas próprias sedes. Quando uma equipe i não muda de sede durante duas rodadas consecutivas $q-1$ e q (isto é, ela tem dois jogos consecutivos em casa) considera-se que ela faz uma viagem fictícia da sede onde está para esta mesma sede (isto é, $x_{iiiq} = 1$).

5.1 Modelo

Dada a matriz de distâncias, define-se o seguinte modelo de programação linear inteira para o MTTP usando as variáveis definidas acima:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mínimizar } \sum_{q=1}^{2n-1}\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}x_{tijq} & & \\
\text{sujeito a:} & & \\
\sum_{q=1}^{2n-2}\sum_{i=1}^{n} x_{tijq} = 1 & \forall\, 1 \le t, j \le n, j \ne t & (1) \\
\sum_{q=1}^{2n-1}\sum_{i=1}^{n} x_{titq} = n & \forall\, 1 \le t \le n & (2) \\
\sum_{t=1,t\ne j}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{tijq} = \sum_{i=1}^{n} x_{jijq} & \forall\, 1 \le q \le n-1, 1 \le j \le n & (3) \\
\sum_{j=1}^{n} x_{iij1} = 1 & \forall\, 1 \le i \le n & (4) \\
\sum_{j=1}^{n} x_{tijq} = \sum_{j=1}^{n} x_{tji,q-1} & \forall\, 2 \le q \le 2n-1, 1 \le t, i \le n & (5) \\
\sum_{s=q-3}^{q}\sum_{i=1}^{n} x_{tits} <= 3 & \forall\, 4 \le q \le n+2, 1 \le t \le n & (6) \\
\sum_{s=q-3}^{q}\sum_{i=1}^{n} x_{tits} >= 1 & \forall\, 4 \le q \le n+2, 1 \le t \le n & (7) \\
\sum_{i=1}^{n} x_{tijq} = \sum_{i=1}^{n} x_{jit,q-(n-1)} & \forall\, n \le q \le 2n-2, 1 \le t, j \le n, & \\
 & j \ne t & (8) \\
x_{tijq} \in \{0,1\} & \forall\, 1 \le t, j, i \le n\, , 1 \le q \le 2n-1 &
\end{array}
$$

A função objetivo minimiza a soma das distâncias viajadas por todas as equipes ao longo do campeonato. As restrições (1) garantem que toda equipe tem que passar exatamente uma vez pela sede de cada uma das outras equipes nas rodadas verdadeiras (da primeira rodada até a de número $2n-2$). As restrições (2) garantem que toda equipe tem que estar na sua própria sede exatamente n vezes ($n-1$ vezes para jogar e uma vez ao retornar ao final do campeonato). As restrições (3) garantem que uma única equipe irá jogar na sede de uma segunda equipe se e somente se esta última estiver na sua própria sede nessa rodada, para cada uma das rodadas do primeiro turno. Como a tabela é espelhada, o mesmo acontecerá no segundo turno.

As restrições (4) e (5) podem ser interpretadas como restrições de fluxo. Cada equipe pode ser interpretada como uma unidade de fluxo que sai de sua própria sede, passa pelas sedes de outras equipes e retorna à sua sede uma determinada quantidade de vezes. As restrições (4) impõem que toda equipe viaja de sua própria sede para jogar na primeira rodada (ou faz uma viagem fictícia para sua própria sede se tem um jogo em casa). Isto corresponde ao fluxo inicial de cada equipe. As restrições (5) garantem que uma equipe pode viajar a partir de uma determinada sede se e somente se viajou para essa sede na rodada anterior, o que corresponde a uma restrição de conservação de fluxo para cada equipe. Estas restrições, junto com as de integralidade, garantem que cada equipe está em uma única sede em cada rodada. Como as restrições (1) garantem que cada equipe passa pela sede das $n-1$ demais equipes exatamente uma vez durante as $2n-2$ rodadas verdadeiras, nas restantes $n-1$ rodadas verdadeiras a equipe tem que jogar em sua própria sede. Em conseqüência, as restrições (2) poderiam ser substituída por uma restrição que forçasse as equipes a voltar para suas próprias sedes na rodada $2n-1$. Contudo, resultados experimentais mostraram que o desempenho do resolvedor é melhor quando o modelo é definido como acima.

As restrições (6) garantem que, em qualquer seqüência de quatro rodadas consecutivas, a quantidade de vezes que uma equipe qualquer viaja para sua própria sede é menor ou igual a três, garantindo que nenhuma equipe jogue mais de três jogos consecutivos em casa. Analogamente, as restrições (7) exprimem que, em qualquer seqüência de quatro rodadas consecutivas, pelo menos uma vez a equipe viaja para sua própria sede, garantindo que nenhuma equipe jogue mais de três jogos consecutivos fora de casa. Estas restrições só são necessárias para as $n-1$ rodadas do primeiro turno e para as primeiras três rodadas do segundo turno, já que a tabela é espelhada. As três primeiras rodadas do segundo turno têm que ser consideradas separadamente, porque nelas poderia haver uma seqüência de quatro ou mais jogos consecutivos na mesma condição de jogo, como resultado das atribuições das sedes nas últimas rodadas do primeiro turno.

Por último, as restrições (8) impõem que a tabela seja espelhada. Uma equipe joga na sede de uma outra equipe durante o segundo turno do campeonato se e somente se esta última jogou na sede da primeira na rodada correspondente no primeiro turno.

Junto com as restrições de integralidade, as restrições descritas acima modelam o MTTP. Contudo, as restrições (1) e (2) podem ser relaxadas para obter-se uma modelagem alternativa do problema.

Observe-se que as restrições de fluxo (4) e (5) forçam toda equipe a estar em alguma sede em cada rodada e que as restrições (3) obrigam a que $n/2$ equipes joguem fora em cada rodada. Em conseqüência, em $n/2 \cdot (2n-2) = n \cdot (n-1)$ vezes as equipes jogam em sedes de outras equipes como visitantes. Então, ao forçar-se todas as equipes a passarem no máximo uma vez pela sede de cada uma das outras, conclui-se que em toda solução viável do problema todas as equipes têm que passar exatamente uma vez pela sede de cada uma das outras equipes. Portanto, as restrições (1) podem ser relaxadas como abaixo:

$$\sum_{q=1}^{2n-2} \sum_{j=1}^{n} x_{tjiq} \leq 1 \quad \forall\, 1 \leq t, i \leq n, i \neq t \ (1').$$

Como em toda solução viável cada equipe está em sedes alheias em $n-1$ rodadas verdadeiras, ela têm que estar na sua própria sede nas $n-1$ rodadas verdadeiras restantes. Então, se cada equipe é forçada a estar na sua própria sede em pelo menos n rodadas (entre as verdadeiras e a fictícia) em toda solução viável, cada uma delas estará na sua própria sede exatamente em n rodadas (em $n-1$ das verdadeiras e na fictícia). Portanto, as restrições (2) podem ser relaxadas como abaixo:

$$\sum_{q=1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{n} x_{tjtq} \geq n \quad \forall\, 1 \leq t \leq n \ (2').$$

5.2 Desigualdades válidas

Uma desigualdade válida é uma restrição de desigualdade satisfeita por toda solução viável de um problema definido por um modelo de programação linear inteira. A inserção de desigualdades válidas em modelos de programação linear altera, positiva ou negativamente, o desempenho dos algoritmos de busca implementados pelos resolvedores.

Nesta seção são propostas três famílias de desigualdades válidas para o MTTP. A efetividade destas desigualdades é testada na próxima seção.

5.2.1 Desigualdades de capacidade

Considerando-se a seqüência de viagens de cada equipe ao longo do torneio, observa-se que cada equipe sai de (e retorna a) sua própria sede uma determinada quantidade de vezes, visitando em cada uma destas saídas um máximo de três sedes. Os trajetos de cada equipe podem ser vistos como soluções viáveis para um problema de roteamento de veículos (VRP) onde sua própria sede representa o depósito, as outras sedes representam os clientes, a demanda de cada cliente é igual a um e a capacidade dos veículos é igual a três.

Portanto, toda desigualdade válida para o VRP pode ser usada para cada equipe no MTTP. Uma família de desigualdades válidas para o VRP é a das chamadas desigualdades de capacidade. Essas desigualdades impõem que para todo subconjunto de clientes, a quantidade de veículos saindo desse subconjunto tem que ser maior ou igual do que o resultado da divisão da soma das demandas de todos os clientes neste subconjunto pela capacidade dos veículos. $N = \{1, 2 \ldots, n\}$ representa o conjunto de equipes que participam do torneio, então esta família de desigualdades válidas para o MTTP pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\sum_{q=1}^{2n-1} \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{tijq} \geq \lceil |S|/3 \rceil \quad \forall\, 1 \leq t \leq n, S \subset N, t \notin S, S \neq \emptyset.$$

Estas restrições garantem que a quantidade de trajetos diferentes (um trajeto corresponde a uma seqüência de jogos que uma equipe disputa desde que sai de sua sede até lá retornar pela primeira vez) em que uma equipe visita um determinado conjunto de equipes é pelo menos um terço da cardinalidade deste conjunto, pois não mais de três equipes podem ser visitadas em cada trajeto.

A dificuldade computacional associada a estas restrições é devida a haver $2^{(n-1)} - 1$ delas. Contudo, como aqui não se pretende resolver o modelo para instâncias com mais de seis equipes, opta-se pela inclusão das $n \cdot 2^{(n-1)} - 1$ restrições deste tipo no modelo (186 desigualdades para $n = 6$).

5.2.2
Desigualdades de mínimo número de viagens por equipe

Para jogar um número p de jogos consecutivos fora de casa e retornar à sua sede, uma equipe precisa fazer $p+1$ viagens (uma para chegar na sede de cada um dos oponentes e outra para voltar à sua sede). Como uma equipe não pode jogar mais do que três jogos consecutivos fora de casa, ela faz um mínimo de $4\lfloor (n-1)/3 \rfloor$ viagens para jogar todos os seus jogos fora de casa. Se $(n-1) \mod 3 \neq 0$, a equipe deverá fazer mais $((n-1) \mod 3)+1$ viagens para jogar com as demais equipes que não pôde enfrentar em trajetos de três sedes. Logo, cada equipe tem que fazer pelo menos $4(n-1)/3$ viagens se $(n-1) \mod 3 = 0$ e $4\lfloor (n-1)/3 \rfloor + ((n-1) \mod 3) + 1$ em caso contrário.

Em conseqüência, a seguinte família de restrições pode ser acrescentada ao modelo quando $(n-1) \mod 3 \neq 0$:

$$\sum_{q=1}^{2n-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{tijq} \geq \lfloor (n-1)/3 \rfloor + ((n-1) \mod 3) + 1 \quad \forall\, 1 \leq t \leq n$$

5.2.3
Desigualdade de número mínimo de viagens

No capítulo anterior mostrou-se que $MNV(n)$ é um limite inferior para o número de viagens durante um torneio DRR com as restrições do MTTP. Então, é possível acrescentar ao modelo a seguinte desigualdade válida a partir do resultado obtido no capítulo anterior:

$$\sum_{q=1}^{2n-1} \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{tijq} \geq MNV(n)$$

5.3
Resultados computacionais

Os resultados computacionais apresentados ao longo deste capítulo foram obtidos utilizando-se a versão 9.0 do CPLEX em um computador Pentium IV com freqüência de 2 Ghz e 512 Mbytes de memória RAM. As instâncias de teste utilizadas foram `circ4`, `nl4`, `circ6` e `nl6`, ou seja, as instâncias circulares e da MLB com até seis equipes. Estas são as maiores instâncias que podem ser resolvidas de forma exata em um tempo razoável no atual estado da arte. Para as instâncias maiores, foi resolvida apenas sua relaxação linear na busca de limites inferiores para o custo das soluções ótimas.

Para quebrar parte da simetria das instâncias circulares, acrescenta-se a seguinte restrição aos modelos para a resolução desse tipo de instâncias:

$$x_{1111} = 1.$$

Desta maneira, a equipe 1 jogará em casa na primeira rodada. Devido à simetria das instâncias, a numeração absoluta das equipes não é relevante, pois qualquer equipe pode ser a equipe 1 sempre que a numeração relativa for mantida (por exemplo: se a equipe 3 passa a ser a equipe 1, a equipe 4 passa a ser a equipe 2, a equipe 5 a 3 e assim sucessivamente; a equipe 2 passa a ser a equipe n e a equipe 1 a $n-1$). Ou seja, para toda instância circular existe pelo menos uma solução ótima na qual a equipe 1 joga em casa na primeira rodada. Comprovou-se experimentalmente que os modelos desenvolvidos são resolvidos mais rápidamente quando está restrição é incluída.

Os custos das melhores soluções encontradas pela heurística apresentada no Capítulo 3 são usados como limites superiores. Isto é, todo nó cujo limite inferior a ele associado for maior do que o limite superior é cortado da árvore de busca mantida pelo resolvedor.

Quando a diferença entre o limite inferior e a melhor solução obtida é menor do que um, o algoritmo pode ser interrompido. Neste caso, assegura-se que esta última já é a solução ótima, pois como as distâncias nas instâncias de teste são todas inteiras, o custo de toda solução também é inteiro. Além disso, para as instâncias circulares, o algoritmo já pode ser interrompido quando a diferença entre o limite inferior e a melhor solução obtida for menor do que dois, dado que toda solução viável para essas instâncias tem valor par.

O modelo foi testado com as restrições (1) e (2) originais e com estas últimas substituídas pelas restrições (1') e (2'). Avaliou-se também o efeito dos diferentes tipos de desigualdades válidas acrescentadas às duas versões do modelo. Cada versão do modelo é resolvida com um limite de tempo de execução de duas horas.

As Tabelas 5.1 a 5.4 mostram os resultados numéricos obtidos para as instâncias `circ4`, `nl4`, `circ6` e `nl6`, respectivamente. Cada uma destas tabelas identifica cada modelo (mod: modelo original; mod': modelo com restrições (1) e (2) substituídas pelas restrições (1') e (2'); mod+cap: modelo original com desigualdades de capacidade; mod'+cap: modelo alterado com desigualdades de capacidade; mod+vxe: modelo original com desigualdades de mínimo número de viagens por equipe; mod'+vxe: modelo alterado com desigualdades de mínimo número de viagens por equipe; mod+v: modelo original com desigualdade de mínimo número de viagens; e mod'+v: modelo alterado com desigualdade de mínimo número de viagens) na primeira coluna. Na segunda e terceira colunas, as tabelas mostram o valor da relaxação linear e o tempo de processamento associado em segundos. A quarta coluna apresenta a diferença percentual entre o limite inferior obtido pelo CPLEX em um tempo máximo de duas horas e o custo da solução ótima do problema. A quinta coluna fornece o tempo em segundos necessário para obter e testar a otimalidade da solução obtida. A sexta coluna mostra a quantidade de nós visitados pelo algoritmo e a última a quantidade de nós em aberto quando as duas horas de processamento se esgotaram.

Modelo	Relaxação linear		CPLEX			
	Valor	T(s)	Dif. (%)	T(s)	Visitados	Abertos
mod	8.0	0.01	-	0.47	11	-
mod'	8.0	0.02	-	0.67	15	-
mod+cap	16.0	0.04	-	0.72	8	-
mod'+cap	16.0	0.04	-	0.74	8	-
mod+vxe	16.0	0.03	-	0.53	6	-
mod'+vxe	16.0	0.03	-	0.71	5	-
mod+v	18.0	0.04	-	0.29	0	-
mod'+v	18.0	0.04	-	0.66	1	-

Tabela 5.1: Resultados computacionais para a instância `circ4` (custo da solução ótima: 20).

Modelo	Relaxação linear		CPLEX			
	Valor	T(s)	Dif. (%)	T(s)	Visitados	Abertos
mod	3650.0	0.01	-	0.61	3	-
mod'	3650.0	0.01	-	0.59	2	-
mod+cap	8044.0	0.04	-	1.06	19	-
mod'+cap	8044.0	0.05	-	1.53	15	-
mod+vxe	5933.0	0.03	-	0.89	21	-
mod'+vxe	5933.0	0.02	-	0.58	3	-
mod+v	6175.4	0.03	-	0.52	4	-
mod'+v	6175.4	0.04	-	0.66	6	-

Tabela 5.2: Resultados computacionais para a instância `nl4` (custo da solução ótima: 8276).

As instâncias `circ4` e `nl4` são pequenas e sua resolução é rápida. Contudo, uma comparação dos resultados numéricos obtidos para estas instâncias com aqueles obtidos para as instâncias com seis equipes dá uma idéia do grau de explosão combinatória associado ao problema.

As Tabelas 5.3 e 5.4 mostram que as desigualdades de capacidade e de viagens por equipe, embora melhorem em muito o valor da relaxação linear do modelo, pioram o desempenho do algoritmo *branch and bound* implementado pelo CPLEX. Já a desigualdade de número mínimo de viagens, além de melhorar muito o valor da relaxação linear do modelo, ela também melhora significativamente o desempenho do algoritmo *branch and bound*. Para `circ6`, o modelo que apresenta melhor desempenho é o original com a desigualdade de número mínimo de viagens (mod+v). O tempo de processamento para resolver o modelo com a desigualdade é apenas 28.2% do tempo necessário para resolvê-lo sem a desigualdade. Já para a instância `nl6`, o modelo que é resolvido em menor tempo de

Modelo	Relaxação linear		CPLEX			
	Valor	T(s)	Dif. (%)	T(s)	Visitados	Abertos
mod	14.91	0.33	-	5219.3	120880	-
mod'	14.91	0.36	-	4901.4	109399	-
mod+cap	60.0	3.89	15.3	7200.0	25307	17918
mod'+cap	60.0	3.54	14.2	7200.0	33904	23040
mod+vxe	48.0	2.21	10.1	7200.0	127278	36163
mod'+vxe	48.0	1.52	7.7	7200.0	134016	22212
mod+v	60.0	2.00	-	1473.9	32830	-
mod'+v	60.0	1.85	-	1763.9	34165	-

Tabela 5.3: Resultados computacionais para a instância `circ6` (custo da solução ótima: 72).

Modelo	Relaxação linear		CPLEX			
	Valor	T(s)	Dif. (%)	T(s)	Visitados	Abertos
mod	3896.8	0.26	-	2309.0	66303	-
mod'	3896.8	0.28	-	5554.4	125380	-
mod+cap	22562.0	7.47	11.9	7200.0	44694	29193
mod'+cap	22562.0	3.89	12.4	7200.0	39128	25004
mod+vxe	16940.9	1.80	6.8	7200.0	121536	33168
mod'+vxe	16940.9	1.44	5.2	7200.0	131001	23667
mod+v	20725.3	1.36	-	788.1	16317	-
mod'+v	20725.3	1.32	-	466.3	10013	-

Tabela 5.4: Resultados computacionais para a instância `nl6` (custo da solução ótima: 26588).

processamento é o alterado com as restrições (1') e (2') e com a desigualdade de número mínimo de viagens (mod'+v). O tempo para resolvê-lo é apenas 8.4% daquele necessário para resolvê-lo sem a desigualdade.

A título de comparação, e sempre levando em conta que os problemas são diferentes, considera-se o modelo de programação linear inteira proposto por Trick [60] para o TTP não-espelhado. Sua formulação é baseada na técnica de geração de colunas usada para o problema de seqüenciamento de tripulações. Cada variável nesse modelo corresponde a uma seqüência de jogos consecutivos em casa ou fora para determinada equipe, começando em uma determinada rodada. Como as seqüências de jogos consecutivos em casa ou fora estão limitadas a no máximo três, a quantidade de variáveis no modelo cresce com n^5 e não exponencialmente, como seria se as seqüências de jogos consecutivos em casa ou fora não fossem limitadas. Os resultados computacionais apresentados em [60] foram obtidos em um processador Intel de 3 Ghz com 2 Gbytes de RAM e usando a versão 15.20.5 do resolvedor

XPRESS-MP. Apenas os resultados para a instância nl16 foram publicados nesse artigo [60]. O algoritmo de busca termina após 4136 segundos e 66000 nós foram processados.

Para as instâncias maiores, procura-se, neste capítulo, obter bons limites inferiores que permitam avaliar a qualidade das soluções obtidas pela heurística (as soluções achadas pela heurística para as instâncias com até seis equipes foram sempre ótimas). Limites inferiores para as instâncias de teste do TTP não-espelhado (que são também válidos para o MTTP) estão disponíveis em [59]. Foi resolvida a relaxação linear do modelo alterado para o MTTP com todas as desigualdades válidas para as instâncias de teste com até dez equipes e sem as desigualdades de capacidade para cada uma das demais instâncias. As restrições de capacidade não foram incluídas devido à sua enorme quantidade.

A Tabela 5.5 fornece nas duas primeiras colunas o nome da instância e o valor (LS) de sua melhor solução conhecida para o MTTP (aquela encontrada pela heurística apresentada no Capítulo 3). A terceira coluna apresenta o valor (RL) da relaxação linear do modelo. A quarta coluna apresenta o melhor limite inferior (LI) conhecido para o MTTP antes desta tese (limites do TTP não-espelhado disponíveis em [59]). A última coluna fornece a diferença porcentual entre a melhor solução conhecida e o valor da relaxação linear.

Instância	LS	RL	LI [59]	Diferença (%)
circ8	140	128	128	8.6
circ10	276	240(*)	220	13.0
circ12	456	288	384	36.8
circ14	714	364	588	49.0
circ16	990	580	832	41.4
circ18	1358	756	1188	44.3
circ20	1882	880	-	53.2
nl8	41928	38670	39479	7.8
nl10	63832	58190(*)	57500	8.8
nl12	120655	92931	107483	23.0
nl14	208086	137377	182797	34.0
nl16	281161	172517	248852	38.6

(*) Novos melhores limites inferiores para o MTTP

Tabela 5.5: Valor da relaxação linear do modelo.

Para as instâncias com oito e dez equipes, para as quais foi possível incluir as desigualdades de capacidade, o valor da relaxação linear do modelo obteve limites inferiores que ficaram sempre dentro de 13% do valor da melhor solução viável conhecida. Os limites inferiores obtidos para as duas instâncias com dez equipes tornaram-se os melhores limites inferiores conhecidos para o problema. Já para as instâncias maiores, para as quais não foi possível incluir as restrições de capacidade, a diferença percentual entre o valor da melhor solução conhecida e o valor da relaxação linear do modelo ficou sempre acima de 23%, aparentemente crescendo para as maiores instâncias.

5.4 Conclusões

Neste capítulo, desenvolveu-se e testou-se um modelo de programação linear inteira para o MTTP. Com este modelo, conseguiu-se resolver instâncias do problema com até seis equipes. Apresentaram-se três famílias de desigualdades válidas, uma das quais surgiu como conseqüência dos resultados descritos no capítulo anterior. Mostrou-se empiricamente que esta última é a única das famílias de desigualdades válidas testadas que consegue melhorar o rendimento do algoritmo *branch and bound* do CPLEX.

Os modelos resolvidos serviram para mostrar a otimalidade das soluções achadas pela heurística desenvolvida no Capítulo 3 para as instâncias menores.

Para as instâncias maiores, limites inferiores foram obtidos resolvendo-se a relaxação linear do modelo. Os limites obtidos foram mais justos para as instâncias com até dez equipes, para as quais foi possível incluir as restrições de capacidade. Os limites obtidos para as maiores instâncias ficaram muito abaixo do custo da melhor solução conhecida, o que ilustra a importância das desigualdades de capacidade.