

5

Análise da Hiperbolicidade do Modelo de Dois Fluidos

O presente trabalho busca a previsão da hidrodinâmica do escoamento bifásico no regime de golfadas, através do emprego do Modelo de Dois Fluidos em sua forma unidimensional e transiente. Isto requer a solução de um sistema de quatro equações diferenciais parciais não-lineares, representando a conservação de massa e o balanço de quantidade de movimento para cada fase. Conforme apontado em inúmeras referências, é preciso tomar bastante cuidado com o uso deste modelo no que diz respeito ao caráter matemático das suas equações.

Foi mencionado na seção 2.1 que a formulação do Modelo de Dois Fluidos é capaz de prever corretamente o crescimento das instabilidades hidrodinâmicas presentes no escoamento bifásico, com a subsequente formação do regime de golfadas. Isto é atingido de maneira natural, sem que haja a necessidade de se aplicar perturbações nas condições de entrada ou na interface entre as fases; e sem que, como normalmente ocorre na maioria dos códigos existentes, a transição estratificado-golfadas seja determinada segundo algum critério arbitrário, a partir do qual um modelo fortemente empírico é acionado para simular o comportamento do escoamento no regime de golfadas; ou, simplesmente, uma configuração inicial em golfadas é previamente assumida, a partir da qual a simulação se inicia.

No processo de solução numérica das equações, o crescimento da altura do filme de líquido ocorre fundamentalmente por dois fatores: devido a uma condição momentânea de “não-equilíbrio” no escoamento (a qual pode ocorrer devido à condição inicial, com uma fração de líquido diferente do *hold-up* de equilíbrio— o efeito desta condição inicial será comentado no capítulo seguinte), ou por pequenos erros numéricos de truncamento e de “*round-off*” do computador. Estes fatores fazem obviamente parte (em maior ou menor escala) de qualquer processo de simulação numérica de escoamentos, aparecendo na forma de perturbações aleatórias infinitesimais nos campos de solução. No entanto, apesar de aparentemente artificiais, encontram analogia direta num escoamento real, pois

variações infinitesimais aleatórias estão sempre presentes em qualquer escoamento.

Infelizmente, conforme dito, o Modelo de Dois Fluidos possui uma característica extremamente indesejada: a natureza de sua formulação matemática o faz constituir um problema mal-posto sob determinadas condições. Um modelo matemático é dito bem-posto quando as equações constituintes admitem uma solução única que depende continuamente das condições iniciais e de contorno (*Courant e Lax, 1949*). Um problema mal-posto não possui solução única; e qualquer solução obtida em problemas deste tipo faz parte de um conjunto infinito de soluções, todas elas igualmente válidas.

Podemos determinar se um problema é bem-posto ou não através do caráter matemático do conjunto de equações diferenciais parciais (eq. 5.1), o qual é determinado pelo problema de autovalor, eq. (5.2):

$$\mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mathbf{C} \quad (5.1)$$

$$\det[\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}] = 0 \quad (5.2)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são as matrizes *Jacobianas* de dimensão $n \times n$, ϕ é o vetor solução do sistema e \mathbf{C} é um vetor coluna de dimensão n . O problema de valor inicial em consideração é achar solução para o sistema na região $0 \leq x \leq L$, onde L é o comprimento do duto, e $t \geq 0$; sujeito à condição inicial $\phi(0, x) = G(x)$. O problema é dito bem-posto, se a solução da eq.(5.2) fornece apenas autovalores (λ 's) reais. Se autovalores complexos existirem, o problema é mal-posto (para as condições em que isto acontecer), e haverá um crescimento irreal das perturbações, em todos os comprimentos de onda, na ausência de fontes estabilizantes nas equações do modelo (*Lyczkowski et al. 1978; Stewart e Wendroff 1984*).

É preciso fazer uma distinção entre a instabilidade do escoamento (uma característica física) e as instabilidades artificiais geradas pelo fato de um problema ser mal-posto. A estabilidade do escoamento está associada à tendência em retornar ao seu estado original após ter sido perturbado. O crescimento ou decaimento destas perturbações é determinado pela dinâmica do escoamento. Já a

questão da boa ou má-colocação (usados aqui como tradução de “*well-*” e “*ill-posedness*”) das equações é uma propriedade da modelagem, e não do escoamento (há de se reconhecer, no entanto, que a acurácia do modelo, mesmo que bem-posto, também pode alterar significativamente a estabilidade do escoamento nas simulações). Portanto, a princípio, pelo que foi visto acima, para prever corretamente a transição do regime estratificado para o de golfadas, duas condições são necessárias: primeiro, que o escoamento seja instável; e segundo, que o sistema de equações seja bem-posto.

Na verdade, segundo J.D. Ramshaw e J.A. Trapp (1977), mesmo que o sistema de equações constituindo o Modelo de Dois Fluidos possua características complexas, é possível obter resultados plausíveis, desde que os efeitos artificiais estabilizantes introduzidos através da representação do sistema de equações diferenciais por diferenças finitas (o esquema *upwind* de interpolação seria um bom exemplo) forem suficientes para tal.

Cabe aqui analisar a questão da malha com um pouco mais de detalhe. De acordo com Richtmyer e Morton (1967), a representação das equações diferenciais por diferenças finitas por si só introduz perturbações de comprimento de onda da ordem do espaçamento da malha. Além disso, deve se ter em mente que a malha funciona como um filtro, uma vez que o menor comprimento de onda nela representável é $2 \Delta x$ (sendo Δx o espaçamento da malha). Assim, à medida que a resolução da malha aumenta, é preciso que haja efeitos que estabilizem os menores comprimentos de onda artificialmente introduzidos, já que o modelo é válido apenas para longos comprimentos de onda. Sabe-se que, em todo o processo de solução de equações diferenciais pelo método dos volumes finitos, é preciso utilizar uma resolução da malha fina o suficiente para que o resultado não seja consideravelmente afetado pela difusão numérica e a dinâmica dos longos comprimentos de onda seja corretamente prevista (o que, na realidade, controla as características mais importantes das golfadas). Há, no entanto, um complicador para o tipo de problema aqui analisado: o espaçamento não pode ser muito pequeno, de modo que a má-colocação das equações não se manifeste.

O Modelo de Dois Fluidos em sua forma unidimensional está restrito a longos comprimentos de onda, porém, conforme visto, à medida que o espaçamento da malha diminui, perturbações de menores comprimentos de onda aparecem naturalmente. De fato, a má-colocação das equações se manifesta

quando as menores escalas do escoamento bifásico começam a surgir. Se, para malhas finas, a difusão numérica já não é suficiente para estabilizar estas perturbações, outros efeitos precisam ser considerados no modelo. O que se observa na prática é uma impossibilidade de se atingir uma solução única com o refinamento da malha, o que é claramente uma característica de sistemas mal-postos.

Conforme visto na seção anterior, o processo de média das equações permite uma formulação unidimensional, mas exige, por outro lado, que os termos de interação interfacial sejam modelados. A modelagem destes termos possui um profundo efeito sobre a natureza do sistema de equações. De maneira geral, é um consenso na literatura que os fenômenos físicos presentes no escoamento bifásico (na realidade, em qualquer escoamento) devam encontrar sua expressão matemática em termos de problemas bem-postos. Neste sentido, houve, e ainda há uma extensiva busca na literatura em torno da correta descrição da interação interfacial para tentar resolver o problema da má-colocação do sistema de equações. Lyczkowski et al. (1978) estudaram a influência de diversos tipos de interação interfacial (arrasto, massa virtual, entre outros) no espaço de soluções do Modelo de Dois Fluidos. No e Kazimi (1984) estudaram os efeitos da massa virtual nas equações do Modelo de Dois Fluidos. Foi demonstrado que a região em que autovalores reais são encontrados aumenta, mas existe uma certa arbitrariedade no formato apresentado para o termo a ser incorporado pela equação. Para considerar este efeito na formulação apresentada aqui, uma avaliação mais criteriosa se faria necessária, sendo fundamental a realização de validações experimentais.

Conforme dito na seção 2.1, para simular corretamente o escoamento num determinado regime, mapas de padrões de escoamento são necessários para determinar condições iniciais e de contorno representativas de tal regime. Adicionalmente, de acordo com o que foi dito acima, ao utilizar o Modelo de Dois Fluidos deve-se levar ainda em consideração a existência de regiões no mapa para as quais a má-colocação do modelo deve se manifestar. Porém, é preciso tomar cuidado com o fato de que a análise característica é realizada diretamente nas equações diferenciais do modelo; as quais serão discretizadas para serem resolvidas numericamente, havendo obviamente erros numéricos intrínsecos neste processo. Assim, é possível que, de acordo com as condições iniciais e de

contorno, o problema seja aparentemente bem-posto (ou mal-posto), mas na prática isto não se observe, uma vez que o sistema de equações discretizado não corresponde exatamente ao sistema de equações diferenciais (pressupõe-se, é claro, que o Modelo de Dois Fluidos é consistente; i.e., o sistema de equações diferenciais parciais é fielmente representado no limite em que o espaçamento da malha e o passo de tempo tendem a zero). Apesar de a difusão numérica possuir sabidamente o efeito de estabilizar as perturbações, o que faria da análise característica diretamente nas equações diferenciais um procedimento até mesmo conservativo; esta análise característica não foi realizada neste trabalho, pois foge do escopo do mesmo. Por outro lado, para obter maior confiança nas simulações, outras medidas devem ser tomadas, como por exemplo verificar localmente (em cada ponto da malha) se o critério para o qual o modelo é bem-posto não está sendo violado. Na realidade, a medida mais indicada (também utilizada aqui) para decidir se o modelo é bem- ou mal-posto, para determinadas condições de contorno, é a incapacidade de se obter uma solução única com sucessivos refinamentos da malha. Assim, recomenda-se que testes de malha sejam sempre realizados.

Bonizzi (2003) determinou os autovalores dados pela eq. (5.2) para a versão compressível do Modelo de Dois Fluidos, sem salto de pressão na interface. Em sua análise, concluiu que os autovalores mais importantes geram o mesmo critério para definir as regiões em que o sistema é bem- ou mal-posto que a forma incompressível do modelo. Além disso, dois autovalores extras (associados à velocidade do som) foram encontrados.

O presente trabalho estende a análise contemplando os casos incompressível e compressível, para o sistema com o salto de pressão interfacial. A introdução do salto de pressão na interface é motivada pelo sabido efeito estabilizante da tensão superficial em diversos tipos de problemas, conforme extensivamente reportado na literatura (Richtmeyer e Morton, 1967; Ramshaw e Trapp, 1977; Stewart e Wendroff, 1984; Banerjee, 2002).

5.1

Caso Incompressível

As equações de conservação de massa e de quantidade de movimento linear das fases, eqs. (3.2) a (3.5), encontram-se escritas na forma conservativa. Visando

facilitar a presente análise é conveniente reescrevê-las na forma não-conservativa, tomando, para escoamentos de fluidos incompressíveis, a seguinte forma:

Conservação de Massa:

$$\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + U_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} + \alpha_G \frac{\partial U_G}{\partial x} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + U_L \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} + \alpha_L \frac{\partial U_L}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

Balço de Quantidade de Movimento Linear:

$$\alpha_G \frac{\partial U_G}{\partial t} + \alpha_G U_G \frac{\partial U_G}{\partial x} + \frac{\alpha_G}{\rho_G} \frac{\partial p_{iG}}{\partial x} + \alpha_G g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos \beta = S_{U_G} \quad (5.5)$$

$$\alpha_L \frac{\partial U_L}{\partial t} + \alpha_L U_L \frac{\partial U_L}{\partial x} + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \frac{\partial p_{iL}}{\partial x} + \alpha_L g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos \beta = S_{U_L} \quad (5.6)$$

onde

$$S_{U_G} = -\alpha_G g \sin \beta - \frac{\tau_{wG} S_G}{A \rho_G} - \frac{\tau_i S_i}{A \rho_G} \quad (5.7)$$

$$S_{U_L} = -\alpha_L g \sin \beta - \frac{\tau_{wL} S_L}{A \rho_L} + \frac{\tau_i S_i}{A \rho_L} \quad (5.8)$$

Adicionalmente tem-se as seguintes equações de restrição:

Restrição de fração volumétrica:

$$\alpha_L + \alpha_G = 1 \quad (5.9)$$

Condição de pressão interfacial:

$$p_{iG} - p_{iL} = \sigma \kappa \quad \text{onde} \quad \kappa = \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} \quad (5.10)$$

logo

$$\Rightarrow \frac{\partial p_{iL}}{\partial x} = \frac{\partial p_{iG}}{\partial x} - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial x} = \frac{\partial p_{iG}}{\partial x} - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_L} \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} \quad (5.11)$$

Relacionando a variação do nível de líquido com a fração volumétrica e usando a eq. (3.27) tem-se:

$$\frac{\partial h_L}{\partial x} = \frac{\partial h_L}{\partial \alpha_L} \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} \quad (5.12)$$

onde

$$\mathcal{D} = \frac{\partial h_L}{\partial \alpha_L} = \frac{A}{dA_L / dh_L} = \frac{\pi D}{4 \text{sen}(\gamma/2)} \quad (5.13)$$

Substituindo as equações de restrição (1.9) e (1.11) nas equações de conservação para o líquido, assim como a eq. (5.12) tem-se:

$$-\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} - U_L \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} + \alpha_L \frac{\partial U_L}{\partial x} = 0 \quad (5.14)$$

$$\alpha_L \frac{\partial U_L}{\partial t} + \alpha_L U_L \frac{\partial U_L}{\partial x} + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \frac{\partial p_{iG}}{\partial x} + \alpha_L \wp \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} = S_{U_L} \quad (5.15)$$

onde

$$\wp = g \mathcal{D} \text{cos} \beta - \frac{\sigma}{\rho_L} \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_L} \quad (5.16)$$

O vetor das variáveis primitivas Φ é dado por:

$$\Phi = [\alpha_G \quad U_G \quad U_L \quad p_{iG}]^T \quad (5.17)$$

As matrizes **A**, **B** e o vetor coluna **C** que aparecem na eq. (5.1) correspondendo ao sistema de equações do Modelo de Dois Fluidos, para fluidos incompressíveis, definido pelas eqs. (5.3), (5.14), (5.6) e (5.15), são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_L & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} U_G & \alpha_G & 0 & 0 \\ -U_L & 0 & \alpha_L & 0 \\ -\alpha_G g \mathcal{D} \cos \beta & \alpha_G U_G & 0 & \alpha_G / \rho_G \\ -\alpha_L \wp & 0 & \alpha_L U_L & \alpha_L / \rho_L \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad S_{U_G} \quad S_{U_L}]^T \quad (5.20)$$

Resolvendo-se a eq. (5.2), os quatro autovalores são dados por:

$$[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad 0 \quad 0] \quad (5.21)$$

Os dois autovalores diferentes de zero são dados pelas raízes da equação quadrática na forma característica $a\lambda^2 + b\lambda + \tilde{c} = 0$, i.e.:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (5.22)$$

$$a = \alpha_G \rho_L + \alpha_L \rho_G \quad (5.23)$$

$$b = -2(\alpha_G \rho_L U_L + \alpha_L \rho_G U_G) \quad (5.24)$$

$$\tilde{c} = \alpha_L \rho_G U_G^2 + \alpha_G \rho_L U_L^2 - \alpha_G \alpha_L \left[(\rho_L - \rho_G) g \cos \beta \mathcal{D} - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_L} \right] \quad (5.25)$$

$$\Delta = b^2 - 4a\tilde{c} \quad (5.26)$$

Para garantir a hiperbolicidade do sistema de equações, é necessário que $\Delta \geq 0$, que por sua vez leva ao seguinte critério:

$$(U_G - U_L)^2 \leq \left[(\rho_L - \rho_G) g \cos \beta \mathcal{D} - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_L} \right] \left(\frac{\alpha_L}{\rho_L} + \frac{\alpha_G}{\rho_G} \right) \quad (5.27)$$

Dadas as condições iniciais e de contorno, pode-se determinar se o problema é bem-posto ou não através da desigualdade dada pela eq. (5.27). Vale ressaltar que, fazendo-se $\sigma = 0$ na relação acima, obtém-se o mesmo critério obtido quando o salto de pressão é desconsiderado inicialmente nas equações do modelo.

Para avaliar a importância do termo associado ao salto de pressão, é preciso saber avaliar o termo $\partial\kappa/\partial\alpha_L$, onde κ é a curvatura da interface dada por $\kappa = \partial^2 h_L / \partial x^2$ (ver Apêndice A). Com esse objetivo, pode-se rescrever o critério representado pela eq. (5.27), utilizando-se a eq. (5.13); que $g_x = g \cos \beta$ é o componente da aceleração da gravidade na direção contrária ao escoamento. e que $\partial\kappa/\partial\alpha_L = [\partial\kappa/\partial h_L][\partial h_L/\partial\alpha_L]$, tem-se

$$(U_G - U_L)^2 \leq \left[(\rho_L - \rho_G) g_x - \sigma \frac{\partial\kappa}{\partial h_L} \right] \left(\frac{\partial h_L}{\partial \alpha_L} \right) \left(\frac{\alpha_L}{\rho_L} + \frac{\alpha_G}{\rho_G} \right) \quad (5.28)$$

Para estimar o termo associado ao salto de pressão, pode-se introduzir uma perturbação na altura da interface de acordo com a eq. (3.21)

$$h_L = h_{Leq} + h_{L0} e^{[i(\omega t - k_p x)]} \quad (5.29)$$

onde h_{Leq} é o nível de equilíbrio; h_{L0} , ω , e k são, respectivamente a amplitude inicial, frequência angular e o número de onda (relacionado ao comprimento de onda λ_p através de $k_p = 2\pi/\lambda_p$) da perturbação. Logo, assumindo-se o número de onda k_p constante ao longo de x , tem-se

$$\kappa = \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} = -k_p^2 h_L \quad (5.30)$$

e, portanto:

$$\frac{\partial\kappa}{\partial h_L} = -k_p^2 \quad (5.31)$$

Substituindo o resultado de (5.31) em (5.28) e rearranjando tem-se

$$\left[(\rho_L - \rho_G) g_x + \sigma k_p^2 \right] = \frac{[(\rho_L - \rho_G) g_x D^2 + \sigma k_p^2 D^2]}{D^2} = \left[Eo + (k_p D)^2 \right] \frac{\sigma}{D^2} \quad (5.32)$$

onde $Eo = (\rho_L - \rho_G) g_x D^2 / \sigma$ é o número de *Eötvös*, e indica a razão entre as forças de empuxo e as forças de tensão superficial. O parâmetro $(k_p D)^2$ é uma medida do tamanho relativo do comprimento de onda da perturbação em relação ao diâmetro do tubo (uma vez que $k_p = 2\pi/\lambda_p$). É possível argumentar que, quando o número de *Eötvös* for muito maior do que $(k_p D)^2$, o termo que aparece devido ao salto de pressão na interface torna-se desprezível no critério. Mas, conforme já comentado na seção 3.1, o Modelo de Dois Fluidos em sua forma unidimensional carrega a hipótese intrínseca de que o comprimento de onda das perturbações é grande se comparado ao diâmetro do tubo. Assim, $k_p D \ll 1$ e logicamente $(k_p D)^2 \ll 1$. Portanto, apenas quando $Eo \ll 1$, a curva que delimita as regiões em que o Modelo de Dois Fluidos é bem- ou mal-posto será afetada pelo salto de pressão na interface entre os fluidos. Para os casos simulados no presente trabalho (tomando a ordem de grandeza das variáveis como $\rho_L \sim 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_G \sim 1 \text{ kg/m}^3$, $g \sim 10 \text{ m/s}^2$, $D \sim 0,1 \text{ m}$ e $\sigma \sim 0,1 \text{ N/m}$), $Eo \sim 1000$. Assim, para longos comprimentos de onda nenhum efeito deve ser esperado na natureza das equações. Um procedimento de adimensionalização realizado diretamente nas equações de quantidade de movimento do Modelo de Dois Fluidos mostra que, para $Eo \gg 1$, o termo da tensão superficial pode ser desprezado diretamente, portanto, nestas condições, de fato a tensão superficial não deveria ter qualquer efeito sobre o critério (vide apêndice B).

Neste ponto, vale enfatizar que o intuito aqui é apenas demonstrar que o salto de pressão interfacial, mesmo sendo um efeito fisicamente existente, não traz vantagens adicionais ao modelo para os casos práticos de interesse; e isto é demonstrado através de experimentos numéricos apresentados nas seções seguintes. Assim, não serão testados casos em que $Eo \ll 1$, mesmo porque haveria dúvidas quanto à validade do modelo para estes casos, uma vez que, mantendo o mesmo sistema bifásico ar-água, seria necessário um diâmetro da ordem do milímetro para atingir um Eo tão pequeno. Desta forma, os termos de interação interfacial teriam de ser reavaliados.

Há ainda uma questão a ser esclarecida: na análise apresentada acima, o número de onda foi fixado num determinado valor k_p , e foi assumido que apenas longos comprimentos de onda estariam presentes. Porém, pelo que foi dito anteriormente, perturbações de menores comprimentos de onda são introduzidas se a malha for continuamente refinada. É possível, portanto, que para malhas mais finas o termo adicional devido ao salto de pressão possua algum efeito estabilizante, ao menos para as perturbações cujos comprimentos de onda são da ordem do espaçamento da malha. A figura (5.1), permite estimar o valor de um número de onda representativo de modo que algum efeito possa ser observado no sistema. Tomando um valor de $k_p = 50/D$, a resolução mínima da malha ($\Delta x = \lambda_p / 2$) para que se possa representar um comprimento de onda desta ordem seria: $2 \pi / \lambda_p = \pi / \Delta x = 50/D$, logo $\Delta x \sim 0,06D$. Utilizar tamanha resolução seria certamente impraticável para a maioria dos casos de interesse. Mas ainda assim, mesmo que uma resolução de malha bastante fina fosse utilizada, o uso de gráficos como o apresentado na Fig. 5.1 se restringe à análise individual de cada comprimento de onda.

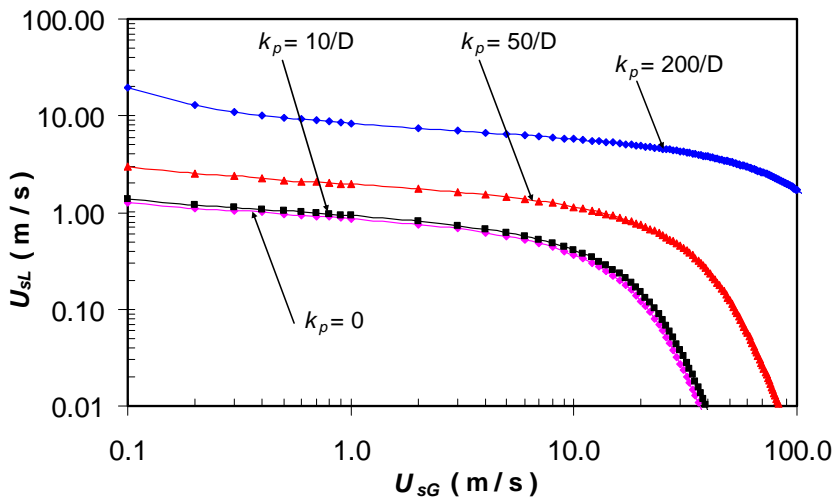


Figura 5.1 – Mapas de U_{SL} vs. U_{SG} : Influência do número de onda nas curvas de transição entre as regiões em que o modelo é bem- e mal-posto.

J.D. Ramshaw e J.A. Trapp (1977) apresentam um argumento qualitativo para mostrar que a consideração do salto de pressão seria insuficiente para estabilizar o sistema como um todo. Os autores especulam que a tensão

superficial, apesar de exercer um efeito estabilizante sobre as menores escalas, não é capaz de dissipar a energia recebida pela interação com as demais bandas do espectro. Assim, imaginando um comprimento de onda cresça até atingir uma amplitude tal que os efeitos não-lineares comecem a ser importantes, cuja consequência seria a de transferir energia aos demais comprimentos de onda. Mesmo que os pequenos comprimentos de onda sejam estáveis devido à tensão superficial, suas amplitudes crescerão, não devido à instabilidade, mas provavelmente pelo fato de a energia transferida pelos outros comprimentos de onda não ser suficientemente dissipada. A incapacidade da tensão superficial em manter a estabilidade dos menores comprimentos de onda, mesmo nas malhas finas, é evidenciada nas simulações realizadas pelo presente trabalho, uma vez que um crescimento irreal das perturbações também foi observado nos casos malpostos rodados com estas malhas.

5.2 Caso Compressível

No caso em que o gás é compressível, considera-se que o mesmo é um gás ideal, sendo a massa específica dada por

$$\rho_G = \frac{p_{iG}}{R T} = \frac{\gamma}{c^2} p_{iG} \quad ; \quad \gamma^* = \frac{c_p}{c_v} \quad (5.33)$$

onde R e T são a constante do gás e a temperatura de referência, γ^* é a razão de calores específicos à pressão (c_p) e volume (c_v) constante. Substituindo esta equação de estado no conjunto de equações de conservação, eqs. (3.2) a (3.5), reescritas na forma não conservativa, obtém-se

$$\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + U_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} + \frac{1}{\rho_G} \left[\alpha_G \frac{\partial \rho_G}{\partial t} + \alpha_G U_G \frac{\partial \rho_G}{\partial x} \right] + \alpha_G \frac{\partial U_G}{\partial x} = 0 \quad (5.34)$$

$$-\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} - U_L \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} + \alpha_L \frac{\partial U_L}{\partial x} = 0 \quad (5.35)$$

$$\alpha_G \frac{\partial U_G}{\partial t} + \alpha_G U_G \frac{\partial U_G}{\partial x} + \frac{c^2}{\gamma^* \rho_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial x} + \alpha_G g \mathcal{D} \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} \cos \beta = S_{U_G} \quad (5.36)$$

$$\alpha_L \frac{\partial U_L}{\partial t} + \alpha_L U_L \frac{\partial U_L}{\partial x} + \frac{\alpha_L c^2}{\rho_L \gamma^*} \frac{\partial \rho_G}{\partial x} + \alpha_L \wp \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} = S_{U_L} \quad (5.37)$$

Procedendo da mesma forma que no caso incompressível para determinar os autovalores do sistema de equações, sendo o vetor das variáveis primitivas Φ dado por

$$\Phi = [\alpha_G \quad U_G \quad U_L \quad \rho_G]^T \quad (5.38)$$

e as matrizes **A**, **B** e **C** que aparecem na eq. (5.1) correspondendo ao sistema de equações do Modelo de Dois Fluidos, para fluidos compressíveis (definido pelas eqs. 5.34 a 5.37), são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_G / \rho_G \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_L & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} U_G & \alpha_G & 0 & \alpha_G U_G / \rho_G \\ -U_L & 0 & \alpha_L & 0 \\ -\alpha_G g \mathcal{D} \cos \beta & \alpha_G U_G & 0 & (c^2 / \gamma^*) (\alpha_G / \rho_G) \\ -\alpha_L \wp & 0 & \alpha_L U_L & (c^2 / \gamma^*) (\alpha_L / \rho_L) \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad S_{U_G} \quad S_{U_L}]^T \quad (5.41)$$

Para resolver $\det[\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}] = 0$ é necessário encontrar as quatro raízes de

$$\begin{aligned} & \lambda^4 - 2(U_L + U_G)\lambda^3 + \\ & + \left[(U_L + U_G)^2 + 2U_L U_G + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \left(\rho_L g \mathcal{D} \cos \beta - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_L} - \frac{\rho_G c^2}{\alpha_G \gamma^*} \right) \right] \lambda^2 + \\ & - \left[U_L U_G (U_L + U_G) + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \left(\rho_L g \mathcal{D} \cos \beta - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_L} - \frac{\rho_G c^2}{\alpha_G \gamma^*} \right) U_G + \frac{c^2}{\gamma^*} U_L \right] \lambda + \\ & + U_L^2 U_G^2 - \frac{c^2}{\gamma^*} U_L^2 + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \left(\rho_L g \mathcal{D} \cos \beta - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_L} - \frac{\rho_G c^2}{\alpha_G \gamma^*} \right) U_G^2 + \\ & - \frac{c^2}{\gamma^*} \frac{\alpha_L}{\rho_L} \left((\rho_L - \rho_G) g \mathcal{D} \cos \beta - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha_L} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Neste caso, tem-se quatro autovalores não nulos. É fácil perceber, da eq (5.42), que para as mesmas condições em que o efeito do salto de pressão é

desprezível no caso incompressível, também o será neste caso, já que os termos devido à gravidade e à tensão superficial sempre aparecem juntos. Mais uma vez, a consideração do salto de pressão não contribui de forma significativa para aumentar a região em que o problema é bem posto. De acordo com Bonizzi (2003), dois dos autovalores da eq. (5.42) são relacionados com a velocidade do som c , enquanto que os outros dois são relacionados com a velocidade de propagação das ondas de continuidade (Wallis, 1969), cuja magnitude é comparável às velocidades das fases. Estes dois últimos autovalores apresentam características próximas daqueles encontrados para o escoamento incompressível, de forma que o critério para a definir a região em que o problema é bem posto não varia significativamente.