

## 4 Método Numérico

Para a solução numérica das equações de conservação do Modelo de Dois Fluidos, o método dos volumes finitos (Patankar, 1980) foi escolhido. Na abordagem apresentada aqui, as equações de conservação de cada fase, eqs. (3.2) a (3.5), são discretizadas utilizando uma malha deslocada, isto é, as velocidades são armazenadas numa posição deslocada em relação aos nós onde as grandezas escalares (frações volumétricas, massas específicas e pressão) são armazenadas. Os símbolos maiúsculos  $P$ ,  $W$  e  $E$  referem-se aos pontos nodais principal e seus vizinhos da esquerda e direita, respectivamente, e são ao mesmo tempo os centros dos volumes de controle escalares e as faces dos volumes de controle vetoriais (Fig. 4.1a). Já os símbolos minúsculos  $w$ ,  $w_w$  e  $e$ , referem-se às faces dos volumes de controle escalares e seus vizinhos da esquerda e direita, respectivamente, sendo também os centros dos volumes de controle vetoriais (Fig. 4.1b). A malha foi considerada uniforme, com espaçamento definido por  $\Delta x$ .

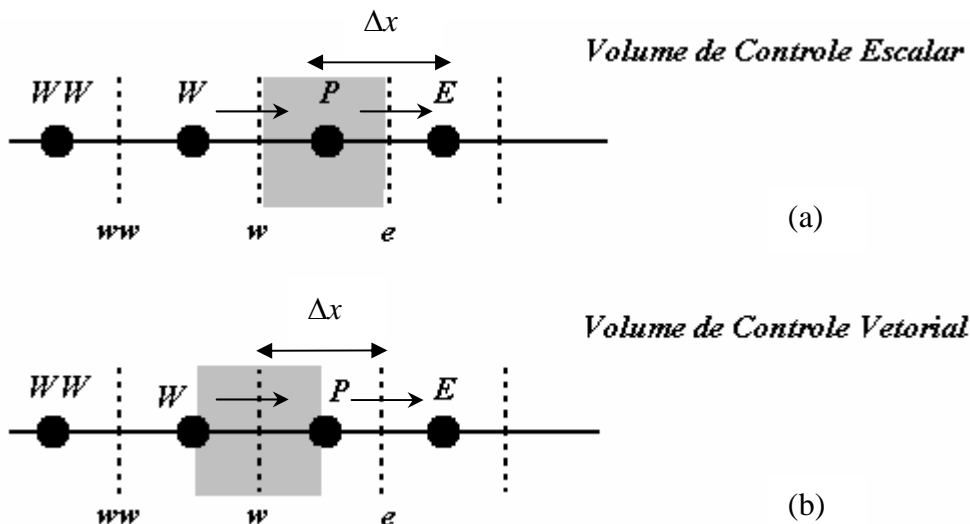


Figura 4.1 – Volumes de controle escalar (a) e vetorial (b) utilizados

Uma formulação conservativa é escolhida em detrimento da não-conservativa, por garantir a conservação de massa e quantidade de movimento de

cada fase. Além disto, no trabalho de Ortega Malca (2004), observou-se que a formulação não-conservativa é muito dissipativa, suprimindo as instabilidades que dão origem às golfadas e formando apenas ondas de amplitude aproximadamente constante que viajam ao longo da tubulação.

A seguir, os detalhes numéricos da formulação serão apresentados.

#### 4.1 Fração Volumétrica

A equação de conservação de massa da fase gasosa (eq. 3.2) é integrada no volume de controle escalar (de volume  $dV = A\Delta x$ ) ao longo do intervalo de tempo  $\Delta t$ , de modo que:

$$A \int_w^{t+\Delta t} \int_t \frac{\partial(\rho_G \alpha_G)}{\partial t} dt dx + A \int_t^{t+\Delta t} \int_w \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G)}{\partial x} dx dt = 0 \quad (4.1)$$

A integração da derivada temporal se dá primeiramente no tempo, depois no espaço; considerando que as variáveis armazenadas no ponto nodal do volume de controle escalar prevalecem em todo domínio de integração. O termo da derivada espacial é integrado primeiro no espaço depois no tempo. Um esquema *upwind* de interpolação é utilizado para avaliar o valor da fração volumétrica nas faces do volume de controle; e um esquema implícito de *Euler* para efetuar a integração no tempo, o qual considera que o integrando assume o valor do instante  $t + \Delta t$ .

Assim, a equação discretizada assume a forma:

$$\frac{(\rho_G \alpha_G)_P - (\rho_G \alpha_G)_P^o}{\Delta t} A \Delta x + (\rho_G U_G)_e A \hat{\alpha}_{G,e} - (\rho_G U_G)_w A \hat{\alpha}_{G,w} = 0 \quad (4.2)$$

onde  $\rho_{G,P}^o$  e  $\alpha_{G,P}^o$  são referentes ao instante de tempo anterior. A fração volumétrica de gás avaliada nas faces do volume de controle, de acordo com o esquema *upwind*, é dada por:

$$\hat{\alpha}_{G,e} = \left\| \text{sign}(U_{G,e}), 0 \right\| \alpha_{G,P} - \left\| -\text{sign}(U_{G,e}), 0 \right\| \alpha_{G,E} \quad (4.3)$$

$$\hat{\alpha}_{G,w} = \left\| \text{sign}(U_{G,w}), 0 \right\| \alpha_{G,W} - \left\| -\text{sign}(U_{G,w}), 0 \right\| \alpha_{G,P} \quad (4.4)$$

Nas eqs. (4.3) e (4.4), o símbolo  $\|a, b\|$  denota o máximo valor entre  $a$  e  $b$ .

Para determinar o segundo e o terceiro termo da eq.(4.2), é preciso avaliar o valor da massa específica do gás nas faces do volume de controle, a qual é desconhecida. Para tal, um esquema *upwind* também foi utilizado, fornecendo:

$$\hat{\rho}_{G,e} = \left\| \text{sign}(U_{G,e}), 0 \right\| \rho_{G,P} - \left\| -\text{sign}(U_{G,e}), 0 \right\| \rho_{G,E} \quad (4.5)$$

$$\hat{\rho}_{G,w} = \left\| \text{sign}(U_{G,w}), 0 \right\| \rho_{G,W} - \left\| -\text{sign}(U_{G,w}), 0 \right\| \rho_{G,P} \quad (4.6)$$

Pode-se definir os “pseudo” fluxos convectivos como:

$$\tilde{F}_e = \hat{\rho}_{G,e} U_{G,e} A \quad ; \quad \tilde{F}_w = \hat{\rho}_{G,w} U_{G,w} A \quad (4.7)$$

Com as definições acima, a eq. (4.2) é reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{(\rho_G \alpha_G)_P - (\rho_G \alpha_G)_P^o}{\Delta t} A \Delta x + \left\| \tilde{F}_e, 0 \right\| \alpha_{G,P} - \left\| -\tilde{F}_e, 0 \right\| \alpha_{G,E} - \left\| \tilde{F}_w, 0 \right\| \alpha_{G,W} + \left\| -\tilde{F}_w, 0 \right\| \alpha_{G,P} = 0 \quad (4.8)$$

Assim, o sistema de equações algébricas resultante para a fração volumétrica de gás possui a seguinte forma:

$$a_P \alpha_{G,P} = a_E \alpha_{G,E} + a_W \alpha_{G,W} + b \quad (4.9)$$

onde os coeficientes  $a_P$ ,  $a_E$ ,  $a_W$  e  $b$  são dados pelas seguintes expressões:

$$a_E = \left\| -\tilde{F}_e, 0 \right\| \quad ; \quad a_W = \left\| \tilde{F}_w, 0 \right\| \quad ; \quad b = a_P^o \alpha_{G,P}^o \quad ; \quad a_P^o = \rho_{G,P}^o A \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.10)$$

$$a_P = \rho_{G,P} A \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left\| \tilde{F}_e, 0 \right\| + \left\| -\tilde{F}_w, 0 \right\| \quad (4.11)$$

Nas eqs. (4.10) a (4.11), nota-se que todos os coeficientes são sempre positivos, o que garante que a fração volumétrica do gás seja sempre maior ou igual a zero, conforme desejado.

A fração volumétrica da fase líquida pode ser diretamente determinada através da relação (3.7):

$$\alpha_{L,P} = 1 - \alpha_{G,P} \quad (4.12)$$

## 4.2 Velocidades

O procedimento de discretização das equações de quantidade de movimento para a determinação das velocidades das fases líquida e gasosa é análogo ao utilizado na equação para a fração volumétrica. No entanto, deve-se ter em vista que a integração se dá no volume de controle deslocado (volume de controle vetorial, Fig. 4.1b). Será detalhada aqui apenas a integração do termo do salto de pressão na equação para a velocidade do líquido, eq. (3.18), mostrada a seguir:

$$A \int_t^{t+\Delta t} \int_w \left( -\alpha_L \sigma \frac{\partial^3 h_L}{\partial x^3} \right) dx dt = A \int_t^{t+\Delta t} \left[ -\tilde{\alpha}_{L,w} \sigma \left( \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} \Big|_P - \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} \Big|_W \right) \right] dt \quad (4.13)$$

Na eq. (4.13),  $\tilde{\alpha}_{L,w}$  é calculado através de uma média aritmética entre  $\alpha_{L,P}$  e  $\alpha_{L,W}$ . As segundas derivadas da altura de líquido  $h_L$  são avaliadas segundo um perfil parabólico, centrado nos pontos  $P$  e  $W$ , como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} \Big|_P - \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} \Big|_W \right) &= \frac{h_{L,E} + h_{L,W} - 2h_{L,P}}{\Delta x^2} - \frac{h_{L,P} + h_{L,W} - 2h_{L,W}}{\Delta x^2} = \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} (h_{L,E} + 3h_{L,W} - h_{L,W} - 3h_{L,P}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Novamente, os esquemas de interpolação *upwind* e implícito de *Euler* foram utilizados nos termos convectivos e de integração temporal.

Na equação discretizada, a pressão é considerada explicitamente, uma vez que também é uma incógnita. Adicionalmente, aplicou-se um fator de sub-relaxação ( $\gamma = 0,7$ ) devido ao fato de as equações serem fortemente não-lineares. Assim, o sistema resultante de equações algébricas para a determinação das velocidades das fases possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{a_w}{\gamma} U_{K,w} &= a_{ww} U_{K,ww} + a_e U_{K,e} + b + \\ (1 - \gamma) \frac{a_w}{\gamma} U_{K,w}^* &- \alpha_{K,w} A (P_{Gi,P} - P_{Gi,W}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Na eq. (4.15), a variável  $U_{K,w}^*$  refere-se à velocidade da fase  $K$  na iteração anterior. Os coeficientes são determinados através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} a_{ww} &= \|F_w, 0\| \quad ; \quad a_e = \|-F_p, 0\| \quad ; \quad a_w^o = \rho_{K,w}^o \alpha_{K,w}^o A \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ a_w &= a_{ww} + a_e + a_w^o + SP\Delta x \quad ; \quad b = a_w^o U_{K,w}^o + SC\Delta x \end{aligned} \quad (4.16)$$

As faces do volume de controle vetorial correspondem aos pontos nodais do volume de controle escalar, onde os fluxos convectivos  $F_w$  e  $F_p$  devem ser avaliados. Para garantir a conservação de massa também para o volume deslocado, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} F_p &= (\rho_K \alpha_K U_K)_P A = (F_w + F_e) / 2 \quad ; \\ F_w &= (\rho_K \alpha_K U_K)_W A = (F_{ww} + F_w) / 2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Os fluxos convectivos nas faces do volume de controle principal são dados por:

$$F_w = (\rho_K \alpha_K U_K)_W A = \tilde{\rho}_{K,w} \tilde{\alpha}_{K,w} U_{K,w} A \quad (4.18)$$

As expressões para  $F_{ww}$  e  $F_e$  são análogas. Para avaliar  $\tilde{\rho}_{K,w}$  e  $\tilde{\alpha}_{K,w}$ , uma média aritmética entre os valores dos pontos nodais  $P$  e  $W$  é realizada.

As eqs. (4.15) a (4.18) são válidas para o cálculo das velocidades de ambas as fases. No entanto, há uma pequena diferença entre os termos fonte  $SC$  e  $SP$  da eq. (4.16) referentes às equações para o líquido e para o gás. Para a fase gasosa, tem-se:

$$\begin{aligned} SC &= b_{grav,G} + b_{h,G} + b_{interface,G} U_{L,w} \\ SP &= b_{parede,G} + b_{interface} \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde:

$$b_{grav,G} = -\rho_{G,w} \alpha_{G,w} g A \sin \beta \quad (4.20)$$

$$b_{h,G} = -\rho_{G,w} \alpha_{G,w} g A \cos \beta \frac{h_{L,P} - h_{L,W}}{\Delta x} \quad (4.21)$$

$$b_{parede,G} = \frac{1}{2} f_{G,w} \rho_{G,w} S_{G,w} |U_{G,w}| \quad (4.22)$$

$$b_{\text{interface}} = \frac{1}{2} f_{i,w} \rho_{G,w} S_{\text{interface},w} |U_{G,w} - U_{L,w}| \quad (4.23)$$

Por outro lado, para a fase líquida:

$$\begin{aligned} SC &= b_{\text{salto}} + b_{\text{grav},L} + b_{h,L} + b_{\text{interface},L} U_{G,w} \\ SP &= b_{\text{parede},L} + b_{\text{interface}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde:

$$b_{\text{salto}} = \begin{cases} \frac{-\tilde{\alpha}_{L,w} \sigma A}{\Delta x^2} (h_{L,E} + 3h_{L,W} - h_{L,WW} - 3h_{L,P}), & \text{se } P_{Gi} \neq P_{Li} \\ 0, & \text{se } P_{Gi} = P_{Li} \end{cases} \quad (4.25)$$

$$b_{\text{grav},L} = -\rho_{L,w} \alpha_{L,w} g A \sin \beta \quad (4.26)$$

$$b_{h,L} = -\rho_{L,w} \alpha_{L,w} g A \cos \beta \frac{h_{L,P} - h_{L,W}}{\Delta x} \quad (4.27)$$

$$b_{\text{parede},L} = \frac{1}{2} f_{L,w} \rho_{L,w} S_{L,w} |U_{L,w}| \quad (4.28)$$

Nas equações acima, os perímetros molhados  $S_L$  e  $S_G$  são calculados através de (3.9). A altura de líquido  $h_L$  é obtida através da resolução da equação não-linear (3.8), a qual é feita pelo método das secantes (Press, 1992). Os fatores de atrito são obtidos através das relações apresentadas na Tabela 3.1, utilizando-se as relações geométricas apropriadas. Vale ressaltar que todas as propriedades que aparecem nas eqs. (4.16 – 4.28) são avaliadas nas faces, uma vez que as velocidades são aí armazenadas.

### 4.3 Pressão

A equação para a pressão é derivada para o volume de controle escalar, a partir da combinação das equações de continuidade de líquido e gás, as quais são ponderadas pelas massas específicas de referência das respectivas fases. Esta normalização é realizada de modo a evitar que a equação do líquido predomine sobre a do gás, o que pode levar a sérios problemas de convergência (Issa e Kempf, 2003; Bonizzi, 2003). A equação de continuidade global é mostrada a seguir (com a hipótese implícita de incompressibilidade da fase líquida):

$$\frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_L U_L)}{\partial x} + \frac{1}{\rho_G^{ref}} \left[ \frac{\partial(\rho_G \alpha_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G)}{\partial x} \right] = 0 \quad (4.29)$$

A integração da eq. (4.29) é realizada de maneira análoga à integração da equação para a determinação da fração volumétrica da fase gasosa, resultando em:

$$\left[ \frac{1}{\rho_G^{ref}} (\rho_{G,P} \alpha_{G,P} A - \rho_{G,P}^o \alpha_{G,P}^o A) + (\alpha_{L,P} A - \alpha_{L,P}^o A) \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{\rho_G^{ref}} (\hat{\rho}_{G,e} \hat{\alpha}_{G,e} U_{G,e} A - \hat{\rho}_{G,w} \hat{\alpha}_{G,w} U_{G,w} A) + \hat{\alpha}_{L,e} U_{L,e} A - \hat{\alpha}_{L,w} U_{L,w} A = 0 \quad (4.30)$$

A dependência com a pressão é introduzida ao substituir expressões para as velocidades nas faces, derivadas da equação da quantidade de movimento discretizada, a qual pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U_{K,w} = \hat{U}_{K,w} - \frac{\tilde{\alpha}_{K,w} A}{a_w / \gamma} (P_{Gi,P} - P_{Gi,W}) \quad (4.31)$$

$$U_{K,e} = \hat{U}_{K,e} - \frac{\tilde{\alpha}_{K,e} A}{a_e / \gamma} (P_{Gi,E} - P_{Gi,P}) \quad (4.32)$$

com

$$\hat{U}_{K,w} = \frac{a_{ww} U_{K,ww} + a_e U_{K,e} + b + (1-\gamma)(a_w / \gamma) U_{K,w}^*}{a_w / \gamma} \quad (4.33)$$

$$\hat{U}_{K,E} = \frac{a_W U_{K,w} + a_{ee} U_{K,ee} + b + (1-\gamma)(a_e / \gamma) U_{K,e}^*}{a_e / \gamma} \quad (4.34)$$

A massa específica do gás no ponto nodal depende da pressão através da equação dos gases ideais:

$$\rho_{G,P} = \frac{P_P}{RT} = \frac{P_P}{P_{ref}} \rho_G^{ref} \quad (4.35)$$

Substituindo as eqs. (4.31 – 4.35) em (4.30) e rearrumando, obtém-se a seguinte equação discretizada para determinar a pressão:

$$a_P P_P = a_W P_W + a_E P_E + b \quad (4.36)$$

onde os coeficientes são dados pelas seguintes expressões:

$$a_W = \left( \frac{\rho_{G,w} \tilde{\alpha}_{G,w}}{\rho_G^{ref}} \frac{\alpha_{G,w}}{a_{w,G} / \gamma} + \tilde{\alpha}_{L,w} \frac{\alpha_{L,w}}{a_{w,L} / \gamma} \right) A^2 \quad (4.37)$$

$$a_E = \left( \frac{\rho_{G,e} \tilde{\alpha}_{G,e}}{\rho_G^{ref}} \frac{\alpha_{G,e}}{a_{e,G} / \gamma} + \tilde{\alpha}_{L,e} \frac{\alpha_{L,e}}{a_{e,L} / \gamma} \right) A^2$$

$$a_P = a_W + a_E + SP \Delta x \quad ; \quad SP = \frac{\alpha_{G,P}}{P_{ref}} \frac{A}{\Delta t} \quad (4.38)$$

$$b = \left[ \left( \frac{\rho_{G,w} \tilde{\alpha}_{G,w}}{\rho_G^{ref}} \hat{U}_{G,w} + \tilde{\alpha}_{L,w} \hat{U}_{L,w} \right) - \left( \frac{\rho_{G,e} \tilde{\alpha}_{G,e}}{\rho_G^{ref}} \hat{U}_{G,e} + \tilde{\alpha}_{L,e} \hat{U}_{L,e} \right) \right] A + \left[ \frac{P_P^o \alpha_{G,P}^o}{P_{ref}} - (\alpha_{L,P} - \alpha_{L,P}^o) \right] A \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.39)$$

#### 4.4 Condições de Contorno

Na entrada da tubulação (Fig. 4.2) a fração volumétrica da fase gasosa ( $\alpha_{G,entrada}$ ) é fornecida, assim como as velocidades superficiais do líquido ( $U_{sL,entrada}$ ) e do gás ( $U_{sG,entrada}$ ). De acordo com (3.7) e (3.17), a fração volumétrica do líquido assim como as velocidades das fases podem ser



diretamente calculadas. Para determinar a pressão, a equação de conservação (4.32) para o volume de controle na entrada é utilizada, impondo-se  $a_w = 0$ . A massa específica na entrada pode ser determinada através da equação de estado, eq. (4.35).

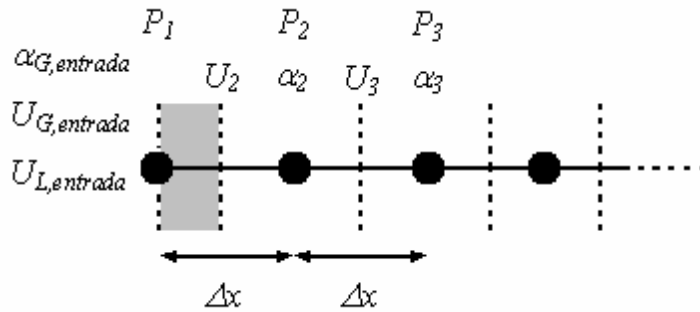


Figura 4.2 – Volumes de controle próximos à entrada do domínio.

Na saída do domínio, apenas a pressão é especificada. Neste caso, equações adicionais para a fração volumétrica e para ambas as velocidades devem ser derivadas. Para determinar estas variáveis, uma extrapolação linear utilizando-se os dois primeiros vizinhos internos é realizada, Fig. 4.3.

$$\frac{U_{N+1} - U_N}{\Delta x / 2} = \frac{U_N - U_{N-1}}{\Delta x} \quad \therefore \quad U_{N+1} = \frac{3U_N - U_{N-1}}{2} \tag{4.40}$$

$$\frac{\alpha_N - \alpha_{N-1}}{\Delta x} = \frac{\alpha_{N-1} - \alpha_{N-2}}{\Delta x} \quad \therefore \quad \alpha_N = 2\alpha_{N-1} - \alpha_{N-2}$$

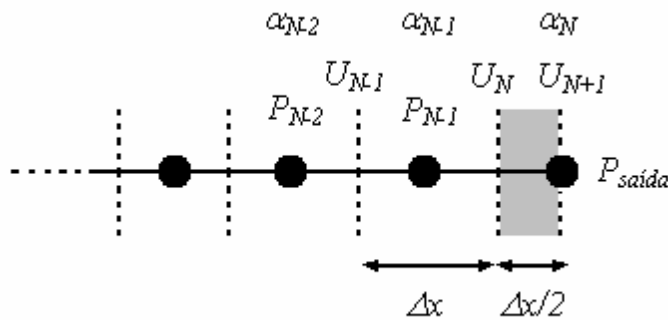


Figura 4.3 – Volumes de controle próximos à saída do domínio.

## 4.5 Procedimento de Execução

O sistema de equações resultante consiste de duas equações para determinar as velocidades das fases, uma equação que fornece a fração volumétrica de gás, e uma equação para a pressão. Estas equações são não-lineares e acopladas, sendo necessário utilizar um procedimento iterativo de solução. No presente trabalho, o algoritmo PRIME (Maliska, 1981) foi utilizado para tratar o acoplamento velocidade-pressão. No trabalho de Ortega Malca (2004), este algoritmo se mostrou mais eficiente do que o algoritmo PISO (Issa, 1986), uma vez que apresentou um menor tempo de processamento (possivelmente porque o algoritmo PISO resolve duas equações para determinar a pressão; portanto uma a mais do que o PRIME). O fluxograma de solução do algoritmo PRIME encontra-se ilustrado na Fig. 4.4.

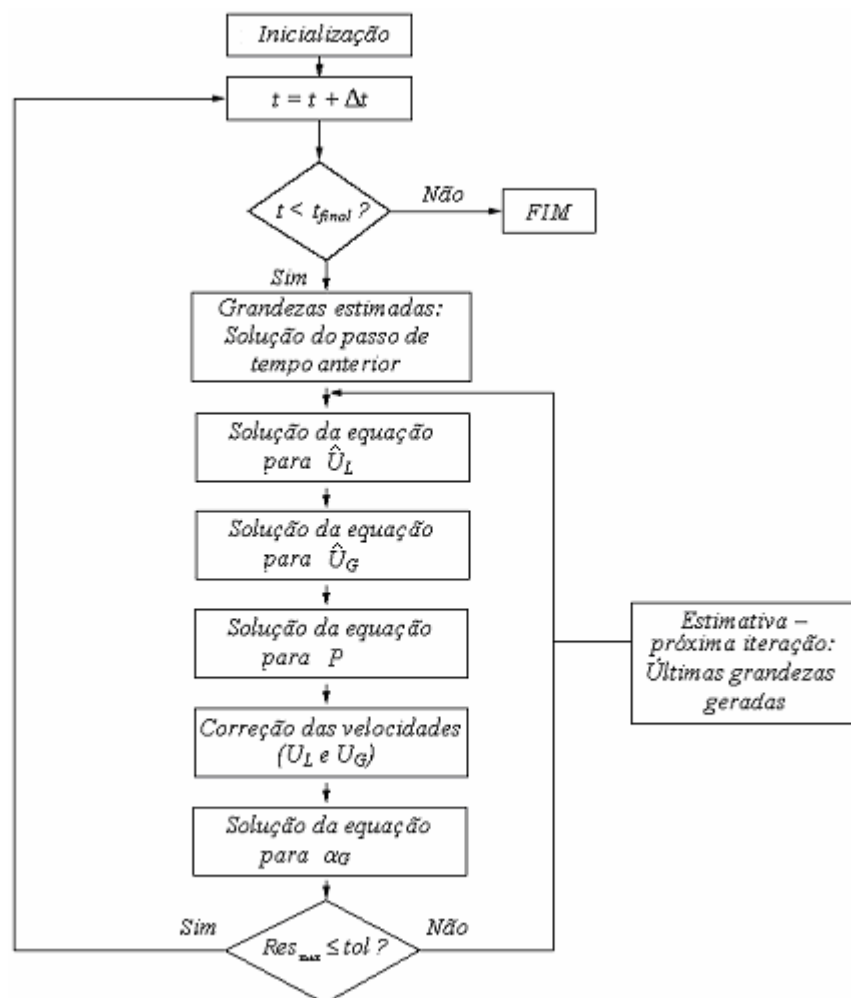


Figura 4.4 – Fluxograma esquemático do procedimento de execução: método PRIME.

O procedimento de solução apresentado no fluxograma é descrito a seguir:

1. Definição das condições iniciais do problema, i.e.: inicialização dos campos de velocidade do líquido e do gás, fração volumétrica e pressão.
2. Consideração da solução do passo de tempo anterior como estimativa inicial para a solução do passo de tempo atual.
3. Determinação das velocidades das fases, através da solução das equações de quantidade de movimento para líquido e gás, eq. (4.15), utilizando o campo de pressões estimado. As velocidades obtidas satisfazem a equação de quantidade de movimento, mas não satisfazem a equação de continuidade global.
4. Determinação da pressão através da solução da equação de conservação de continuidade global; eq. (4.36)
5. As velocidades são corrigidas explicitamente mediante a eq. (4.31). Os campos obtidos obedecem à continuidade global.
6. Solução da equação de conservação de massa da fase gasosa, eq. (4.9), de modo a obter a fração volumétrica do gás
7. Verificar os resíduos de todas as equações. Se todos estes forem inferiores ao critério de tolerância pré-determinado, voltar ao passo 2. Caso contrário, retornar ao passo 3 e repetir o procedimento até a convergência.

#### 4.6 Formação da Golfada

Quando uma golfada se forma na tubulação, a fração volumétrica de gás ( $\alpha_G$ ) tende a zero, e a equação de quantidade de movimento para o gás torna-se singular, uma vez que este parâmetro multiplica ambos os lados da equação. Assim, de forma a evitar valores numéricos irrealistas para a velocidade do gás, resultantes da solução de uma equação singular, a equação de quantidade de movimento da fase gasosa é suprimida nestes locais. Assim, no interior da região em que só há a presença de líquido (i.e., na golfada), a velocidade do gás é arbitrariamente definida como zero. Esta é uma questão crítica da metodologia,

uma vez que se nenhum procedimento *ad-hoc* for realizado, é possível que surjam valores anormalmente altos da velocidade do gás à jusante da golfada.

Assim, conforme recomendações de Issa e Kempf (2003) e Bonizzi (2003), o surgimento das golfadas na tubulação é monitorado através de uma nova variável introduzida para avaliar a fração volumétrica nas faces dos volumes de controle escalares, onde as velocidades são resolvidas. Portanto, para detectar o surgimento de golfadas, a fração de gás nas faces é calculada segundo uma média harmônica entre os valores nos pontos nodais  $W$  e  $P$ , como

$$\tilde{\alpha}_{G,w}^{flag} = \frac{2 \alpha_{G,W} \alpha_{G,P}}{(\alpha_{G,W} + \alpha_{G,P})} \quad (4.41)$$

Quando  $\tilde{\alpha}_{G,w}^{flag} < 0,02$  (conforme recomendações de Issa e Kempf, 2003; Bonizzi, 2003), a velocidade do gás deve ser especificada igual a zero. Para tal, os coeficientes da equação discretizada para a velocidade do gás devem ser modificados para:

$$\begin{aligned} \frac{a_w}{\gamma} = 1, \quad a_{ww} = 0, \quad a_e = 0 \quad e \\ b + (1 - \gamma) \frac{a_w}{\gamma} U_{G,w}^* - \alpha_{G,w} A (P_{Gi,P} - P_{Gi,W}) = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Adicionalmente, devem ser suprimidos os termos relativos à velocidade da fase gasosa na equação da pressão (eq. 4.36), sempre que  $U_G = 0$ . Entretanto, deve ser ressaltado que a influência dos termos relativos à variação temporal da fração volumétrica de gás no nó principal deve ser mantida, assim como todos os termos relativos à fase líquida.

#### 4.7

#### Malha Computacional e Passo de Tempo

A resolução espacial deve ser escolhida de modo que respeite o compromisso entre a precisão dos cálculos numéricos e o tempo necessário de computação. O espaçamento da malha ( $\Delta x$ ) utilizado afeta os esquemas numéricos aplicados no processo de discretização. O esquema *upwind* de interpolação utilizado aqui introduz uma alta difusão numérica ao sistema, sendo necessárias,

portanto, malhas consideravelmente refinadas para atingir a acurácia desejada. Um teste de malha realizado neste trabalho (o qual é apresentado no Capítulo 6) revela que o espaçamento da malha deve situar-se em torno de  $0,4-0,7D$  (portanto, alguns centímetros) para os casos rodados.

Métodos implícitos são teoricamente incondicionalmente estáveis. Entretanto, quando aplicados a problemas envolvendo escoamentos bifásicos, é preciso que o passo de tempo seja limitado para atender requisitos de precisão temporal da solução. Assim, o passo de tempo deve ser determinado de modo que uma partícula de fluido viaje no máximo um volume de controle por passo de tempo, o que pode ser expresso pelo número de Courant ( $C$ ), dado por:

$$C = \frac{\max(|U_w|)\Delta t}{\Delta x} \quad (4.43)$$

Assim, o passo de tempo fica limitado a:

$$\Delta t \leq C \frac{\Delta x}{\max(|U_w|)} \quad (4.44)$$

onde  $C$  é previamente especificado. De acordo com Bonizzi (2003), a limitação do passo de tempo segundo a eq. (4.46) permite que se capture todas as ondas que propagam a velocidades próximas às dos fluidos (Wallis, 1969), como é o caso daquelas que originam as golfadas. Issa e Kempf (2003) recomendam que o número de Courant seja especificado como 0,5. Para altas velocidades superficiais do gás (que normalmente limitam o passo de tempo), números de Courant ainda menores foram utilizados neste trabalho (até 0,2; para velocidades superficiais acima de 2 m/s). Segundo a eq. (4.46) altas resoluções espaciais implicam em altas resoluções temporais, o que demanda um esforço computacional considerável. Para um espaçamento de malha típico de  $0,4D$ ; 1 segundo de simulação requer em torno de 1 hora de tempo computacional (para uma capacidade de processamento de 1,5GHz e 2 GHz de memória RAM).

## 4.8 Critério de Convergência

O sistema de equações algébricas geradas no processo de discretização é resolvido de forma iterativa, segundo o algoritmo TDMA (Patankar, 1980). Em cada passo de tempo, a solução é considerada convergida quando o máximo resíduo de todas as equações for inferior a uma tolerância ( $tol$ ) especificada. Assim,

$$\text{Res}_{\max} \leq tol \quad (4.45)$$

O resíduo máximo de cada equação é obtido de acordo com a seguinte expressão:

$$\text{Res}_{\max} = \max \left| a_P \phi_P^* - (a_W \phi_W^* + a_E \phi_E^* + b) \right| \quad (4.46)$$

onde  $\phi$  é a grandeza calculada na iteração anterior, e  $a_P$ ,  $a_W$ ,  $a_E$  e  $b$  são os coeficientes de  $\phi$  calculados na iteração atual. No presente trabalho, a tolerância foi definida igual a 0,0005.

## 4.9 Cálculo dos Parâmetros Médios das Golfadas

De forma a validar a metodologia apresentada aqui, as propriedades das golfadas (comprimento, velocidade e frequência) são medidas numericamente em diversas posições fixas na tubulação (para as coordenadas axiais  $x = 10, 15, 20, 25$  e  $30$  m), e comparadas com resultados da literatura, os quais são freqüentemente apresentados em termos das médias destes parâmetros.

A velocidade de cada golfada é medida medindo-se o intervalo de tempo levado para percorrer uma determinada distância entre dois pontos pré-definidos ( $x_1$  e  $x_2$ , por exemplo, como mostrado na Fig. 4.5). O espaçamento entre os pontos foi tomado como  $10D$  (uma análise de sensibilidade foi realizada, variando-se esta distância para  $5D$  e  $15D$ , porém nenhuma diferença foi observada). Assim, quando a variável  $\tilde{\alpha}_{G,w}^{flag}(x_1)$  (eq. 4.43) cai a níveis menores do que 0,02, um

contador de intervalos de tempo é acionado. A contagem continua até que

$\tilde{\alpha}_{G,w}^{flag}(x_2) < 0,02$ , i.e., quando a golfada atinge a posição  $x_2$ . Desta forma:

$$U_{t,n} = \frac{x_2 - x_1}{\sum_{1 \rightarrow 2} \Delta t} \quad (4.47)$$

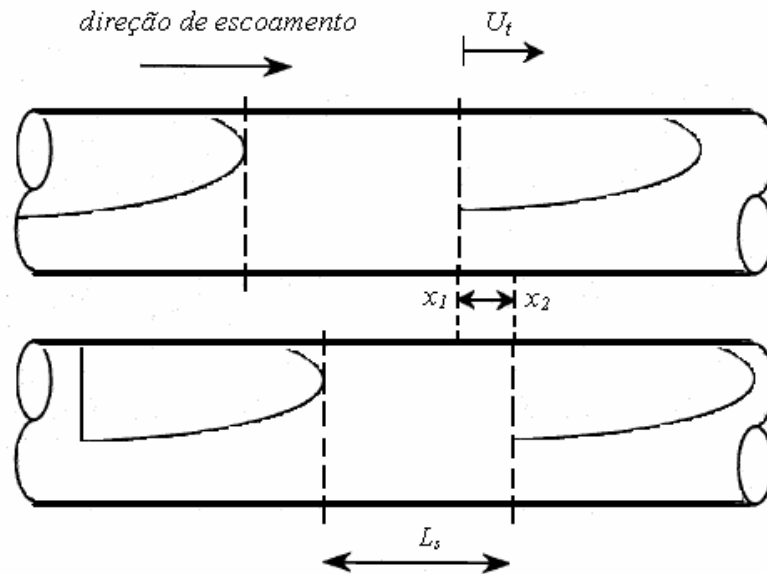


Figura 4.5 – Ilustração da medição da velocidade e do comprimento de cada golfada.

Para calcular o comprimento de cada golfada passando pela posição  $x_2$ , a variável  $\tilde{\alpha}_{G,w}^{flag}$  é continuamente monitorada, de forma a identificar os instantes em que a frente e a cauda da golfada atingem esta posição. Quando  $\tilde{\alpha}_{G,w}^{flag}(x_2) < 0,02$ , detecta-se a chegada da frente da golfada. Um novo contador de intervalos de tempo é iniciado, até que  $\tilde{\alpha}_{G,w}^{flag}(x_2)$  atinja novamente valores maiores do que 0,02, marcando o momento de chegada da cauda da golfada a  $x_2$ . Com a velocidade de translação anteriormente determinada, eq. (4.48), pode-se calcular o comprimento da golfada passando por  $x_2$  através de:

$$L_{S,n} = U_{t,n} \sum_{f \rightarrow c} \Delta t \quad (4.48)$$

onde  $f$  e  $c$  denotam “frente”, e “cauda” da golfada, respectivamente.

A frequência das golfadas ( $v_s$ ) é definida como o número de golfadas que passam numa determinada posição ( $x_o$ ) por intervalo de tempo. Este parâmetro é calculado apenas *a posteriori*, uma vez monitorados os valores do *hold-up* de líquido com o tempo (nesta posição) durante todo o intervalo de simulação. Um sinal típico do *hold-up* com o tempo pode ser ilustrado como apresentado na Fig. 4.6.

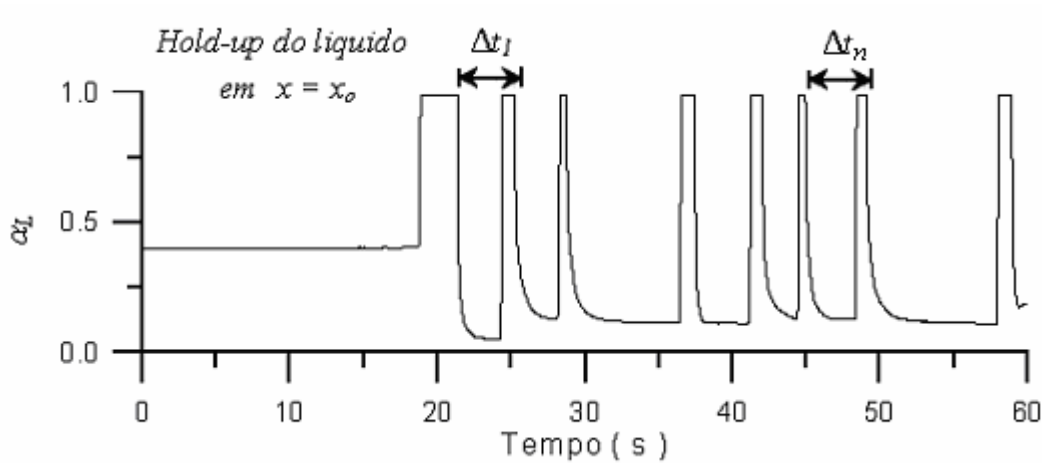


Figura 4.6 – Sinal temporal típico do *hold-up* do líquido na posição  $x = x_o$ .

Desta forma, cada valor discreto de frequência pode ser definido como o inverso do intervalo que decorre entre a passagem de duas frentes consecutivas de golfadas por  $x_o$ . Portanto, pode-se escrever:

$$v_{s,n} = \frac{1}{\Delta t_n} \quad (4.49)$$

Para calcular os valores médios de cada um dos parâmetros (velocidade, comprimento e frequência), uma média aritmética é realizada de acordo com as seguintes expressões:

$$\langle U_t \rangle = \frac{\sum_{n=1}^N U_{t,n}}{N}, \quad \langle L_S \rangle = \frac{\sum_{n=1}^N L_{S,n}}{N}, \quad \langle v_S \rangle = \frac{\sum_{n=1}^N v_{S,n}}{N} \quad (4.50)$$

onde  $N$  é o número de medidas realizadas.