

3 Modelagem Matemática

De um modo geral, linhas de petróleo são formadas por tubulações que podem se estender por quilômetros. Como consequência as maiores variações dos parâmetros de escoamento se dão principalmente na direção axial, o que justificaria uma abordagem unidimensional. Além disso, conforme apontado em diversas referências (Lin e Hanratty, 1986; Taitel e Barnea, 1994; Issa, 2005), as características principais do escoamento no regime de golfadas se desenvolvem a partir da dinâmica das perturbações de longos comprimentos de onda, as quais são aproximadamente unidimensionais (mesmo a geometria deste padrão sendo essencialmente tridimensional). Por outro lado, os efeitos tridimensionais são determinantes para ondas de pequenos comprimentos de onda (Andritsos e Hanratty, 1986; Kuru et. al, 1995; Hervieu, E. e Seleghim Jr., P., 1999). Portanto, não é recomendável o uso desta formulação na tentativa de se prever o regime estratificado ondulado (Bonizzi, 2003), a não ser que outras relações constitutivas sejam incorporadas de modo a compensar este fato.

Vale ainda enfatizar que a metodologia apresentada aqui (i.e., a metodologia de “captura das golfadas”), a qual utiliza o Modelo de Dois Fluidos para prever a transição natural do escoamento estratificado para o regime de golfadas, está restrita à tubulações horizontais e levemente inclinadas. Isto se dá pelo fato de que, para maiores inclinações da tubulação, e especialmente as inclinações ascendentes, outros mecanismos tornam-se importantes na transição para golfadas (Barnea, 1987; Bonizzi, 2003). Isto não significa, no entanto, que o modelo de dois fluidos não pode ser utilizado para maiores inclinações da tubulação.

As equações para o Modelo de Dois Fluidos foram derivadas primeiramente por Ishii (1975). O movimento das fases é descrito por um conjunto de equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear para cada uma delas (será tratado apenas o caso isotérmico).

Os escoamentos bifásicos em tubulações são normalmente fenômenos tridimensionais. No entanto, como mencionado acima, as aplicações práticas aqui

buscadas não exigem tamanho grau de detalhamento na descrição. Assim, uma formulação unidimensional pode ser derivada através de um processo de média na seção transversal. Seja Z_K uma função relativa à fase K ; então o seu valor médio na seção vale:

$$\langle Z_K \rangle = \frac{\int_{A_K} Z_K dA}{\int_{A_K} dA} \quad (3.1)$$

onde A_K representa a área ocupada pela fase K .

O conjunto de equações em sua forma unidimensional e transiente, com as hipóteses de que o escoamento é isotérmico e não há transferência de massa entre as fases, é mostrado a seguir (os símbolos $\langle \rangle$ foram omitidos por simplicidade):

Conservação de Massa:

$$\frac{\partial(\rho_G \alpha_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G)}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho_L \alpha_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L)}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

Balço de Quantidade de Movimento Linear:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G^2)}{\partial x} = \\ & = -\alpha_G \frac{\partial p_{iG}}{\partial x} - \alpha_G \rho_G g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos \beta - \alpha_G \rho_G g \sin \beta - \frac{\tau_{wG} S_G}{A} - \frac{\tau_i S_i}{A} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L^2)}{\partial x} = \\ & = -\alpha_L \frac{\partial p_{iL}}{\partial x} - \alpha_L \rho_L g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos \beta - \alpha_L \rho_L g \sin \beta - \frac{\tau_{wL} S_L}{A} + \frac{\tau_i S_i}{A} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nas equações (3.2) a (3.5), os subscritos L e G representam as fases líquida e gasosa, respectivamente. x e t são as coordenadas espacial e temporal; ρ , U , p_i e α são,

nesta ordem, a massa específica, velocidade, pressão interfacial e frações volumétricas (ou “*hold-up*”) de cada fase; τ é a tensão cisalhante, g e β são a aceleração da gravidade e inclinação da tubulação com a horizontal; h_L , S_k , S_i e A são parâmetros geométricos que representam a altura de líquido no escoamento estratificado, o perímetro molhado pela fase K , o perímetro da interface e a área transversal da tubulação, $A = \pi D^2/4$, onde D representa o diâmetro. Estas grandezas encontram-se ilustradas na Fig. 3.1.

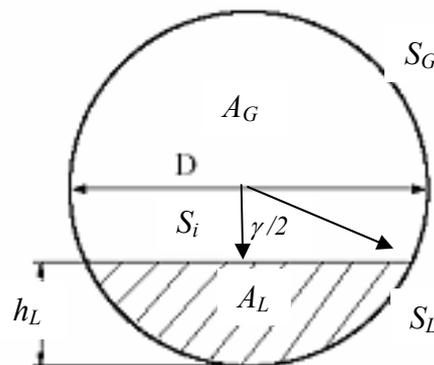


Figura 3.1 – Esquema da seção transversal da tubulação.

No presente modelo, a hipótese de incompressibilidade é válida apenas para a fase líquida. Segundo Issa e Kempf (2003), os efeitos de compressibilidade devem ser importantes nestes tipos de escoamento uma vez que, quando as golfadas se formam, as variações temporais e espaciais da pressão (e, portanto, da densidade) podem ser tão altas quanto 40%. Assim, a fase gasosa segue a lei dos gases ideais, dada por:

$$\rho_G = \frac{p_G}{RT} \approx \frac{p_{iG}}{RT} \quad (3.6)$$

onde p_G é a pressão média da fase gasosa, R é a constante do gás e T é a temperatura de referência. A pressão média do gás é considerada, por simplicidade, igual ao valor na interface (p_{iG}), uma vez que a altura hidrostática associada é desprezível.

As frações volumétricas do líquido e do gás estão relacionadas por:

$$\alpha_L + \alpha_G = 1, \quad \text{com} \quad \alpha_L = \frac{A_L}{A}; \quad \alpha_G = \frac{A_G}{A} \quad (3.7)$$

Ainda, a partir da geometria, Fig. 3.1, pode-se demonstrar que:

$$\alpha_G = \frac{1}{\pi} \left[\cos^{-1}(\xi) - \xi \sqrt{1 - \xi^2} \right] \quad (3.8)$$

$$S_G = D \cos^{-1}(\xi); \quad S_L = \pi D - S_G; \quad S_i = D \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.9)$$

$$A_G = \frac{D}{4} [S_G - S_i \xi] ; \quad A_L = \frac{\pi D^2}{4} - A_G ; \quad (3.10)$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = -\xi \quad (3.11)$$

sendo

$$\xi = 2 \frac{h_L}{D} - 1 \quad (3.12)$$

O processo de média leva a termos que requerem equações de fechamento ao modelo, para a determinação de τ_{wL} , τ_{wG} e τ_i , os quais representam as tensões cisalhantes líquido – parede, gás – parede e líquido – gás, respectivamente. Além disso, como as pressões na interface do lado do líquido e do gás foram consideradas diferentes, faz-se ainda necessária uma equação para representar o salto de pressão na interface entre os fluidos.

3.1 Equações de Fechamento

As relações de fechamento para as tensões de cisalhamento são baseadas na prescrição de um fator de atrito. Sua forma geral pode ser escrita como:

$$\tau = \frac{1}{2} f \rho |u_r| u_r \quad (3.13)$$

O termo u_r representa a velocidade relativa entre o líquido e a parede, o gás e a parede, ou entre o gás e o líquido. A massa específica do líquido é utilizada para o cálculo da tensão no contato líquido – parede, e a massa específica do gás nas outras situações.

Existe uma série de correlações existentes na literatura para a determinação do fator de atrito. Como exemplo pode-se citar: Manning (1864; como referência, ver

Wallis, 1969), Taitel e Dukler (1976), Andritsos e Hanratty (1986) e Hand (1991). De acordo com o estudo realizado por Issa e Kempf (2003) e Bonizzi (2003), foi revelado que as correlações mais adequadas para o escoamento estratificado encontram-se na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Fórmulas para o cálculo do fator de atrito.

	$\mathbf{Re}_G, \mathbf{Re}_L, \mathbf{Re}_i \leq 2100$ (Laminar)	$\mathbf{Re}_G, \mathbf{Re}_L, \mathbf{Re}_i > 2100$ (Turbulento)
f_L	$\frac{24}{\mathbf{Re}_{sL}}$ (Hand, 1991)	$0,0262(\alpha_i \mathbf{Re}_{sL})^{0,139}$ (Spedding e Hand, 1997)
f_G	$\frac{16}{\mathbf{Re}_G}$ (Hagen–Poiseuille)	$0,046(\mathbf{Re}_G)^{-0,25}$ (Taitel e Dukler, 1976)
f_i	$\frac{16}{\mathbf{Re}_G}$ (Hagen–Poiseuille)	$0,046(\mathbf{Re}_i)^{-0,25}$ (Taitel e Dukler, 1976)

Nas equações apresentadas na Tabela 3.1, os números de *Reynolds* \mathbf{Re}_{sL} , \mathbf{Re}_G e \mathbf{Re}_i são definidos, de acordo com Taitel e Dukler (1976) como:

$$\mathbf{Re}_{sL} = \frac{\rho_L U_{sL} D}{\mu_L} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{Re}_G = \frac{4A_G U_G \rho_G}{(S_G + S_i) \mu_G} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Re}_i = \frac{4A_G |U_G - U_L| \rho_G}{(S_G + S_i) \mu_G} \quad (3.16)$$

As definições apresentadas são baseadas na hipótese de que o gás escoa num canal fechado, uma vez que viaja a uma velocidade muito maior que a do líquido, o qual, por sua vez, escoa como se estivesse num canal aberto. Os números de *Reynolds* do gás e da interface são baseados no diâmetro hidráulico do gás, calculado através de sua área de escoamento, A_G , e perímetro molhado, S_G . Além disso, μ é a viscosidade dinâmica da fase, D é o diâmetro da tubulação e U_{sL} é a velocidade superficial do líquido, definida como:

$$U_{sL} = \alpha_L U_L \tag{3.17}$$

Para finalizar, é necessária uma relação entre as pressões interfaciais das fases. Duas abordagens distintas serão utilizadas. Na primeira, a diferença entre as pressões de gás e líquido na interface será desprezada, i.e., $p_{Gi} = p_{Li}$. Na segunda, um salto de pressão será introduzido e calculado através de (Barnea e Taitel, 1994):

$$p_{iG} - p_{iL} = \sigma \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} \tag{3.18}$$

Na equação acima, σ é a tensão superficial entre líquido e gás. Detalhes da determinação desta relação encontram-se no Apêndice A.

Para facilitar a solução do sistema de equações de conservação na presença do salto de pressão, é conveniente introduzir a eq. (3.18) diretamente na eq. (3.5), de modo a utilizar a mesma pressão nas duas equações de conservação de quantidade de movimento linear. A equação para o líquido pode então ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L^2)}{\partial x} &= \\ &= -\alpha_L \frac{\partial p_{iG}}{\partial x} + \alpha_L \sigma \frac{\partial^3 h_L}{\partial x^3} - \alpha_L \rho_L g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos \beta - \alpha_L \rho_L g \sin \beta - \frac{\tau_{wL} S_L}{A} + \frac{\tau_i S_i}{A} \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.2 Condições de Contorno e Iniciais

Valores para a fração volumétrica da fase gasosa e velocidades superficiais de líquido e gás foram prescritos na entrada da tubulação. A pressão na saída da tubulação foi especificada como sendo igual à pressão atmosférica. Ilustração das condições de contorno na geometria estudada encontra-se na Fig. 3.2.

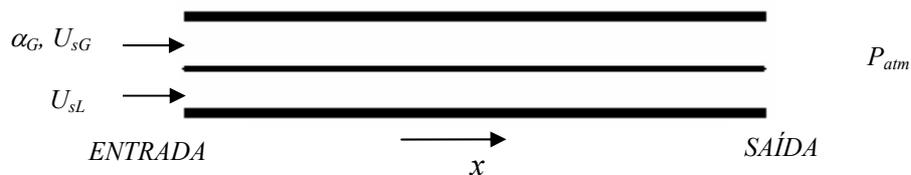


Figura 3.2– Condições de contorno utilizadas.

Como o escoamento estratificado é considerado o ponto de partida para o desenvolvimento do regime de golfadas, no instante inicial a fração volumétrica e as velocidades de líquido e gás são assumidas uniformes ao longo da tubulação, sendo os seus valores correspondentes às condições de contorno impostas. Com relação à especificação da pressão, pode-se obter uma solução analítica para a queda de pressão inicial ao longo da tubulação com escoamento estratificado e em equilíbrio, somando-se as equações de quantidade de movimento linear do líquido e do gás em regime permanente. O resultado é um gradiente de pressão linear, representando um balanço das forças viscosas entre o líquido e o gás com a parede, as forças gravitacionais devido a inclinação da tubulação e as forças de pressão (eq. 3.19).

$$\frac{\partial p_{iG}}{\partial x} = -\left(\frac{\tau_{wL}S_L + \tau_{wG}S_G}{A}\right) - (\rho_L\alpha_L + \rho_G\alpha_G)g\text{sen}\beta \quad (3.20)$$

Nos trabalhos de Issa e Kempf (2003) e Bonizzi (2003), a pressão inicial foi considerada uniforme e igual à pressão atmosférica. Em simulações preliminares no presente trabalho, esta condição foi testada contra a solução analítica, e nenhuma diferença foi verificada, uma vez que os campos de solução se igualam após poucos instantes de simulação. No trabalho de Ortega Malca (2004) também é apontado que, num regime de golfadas estatisticamente permanente, diferentes condições iniciais para a pressão não deveriam ter influência. Assim, por simplicidade, a condição de pressão uniforme foi escolhida.

As condições de contorno e iniciais devem ser determinadas com o auxílio de mapas de padrões de escoamento, de modo a representar fielmente situações em que o regime de golfadas ocorre na tubulação. A metodologia utilizada para determinar as curvas de transição entre os diversos regimes encontra-se descrita no trabalho de Taitel e Dukler (1976). A transição estratificado-golfadas é calculada, por outro lado, segundo Barnea e Taitel (1994), a qual contempla tanto casos viscosos e não-viscosos. A estratégia utilizada consiste em verificar sob que circunstâncias pequenas perturbações aplicadas em relação aos valores de equilíbrio crescem com o tempo, determinando a instabilidade da solução. Para isto, impõe-se uma perturbação do tipo exponencial complexa aos campos permanentes de solução das equações do Modelo de Dois Fluidos, de acordo com a seguinte expressão:

$$\phi = \phi_{eq} + \phi_0 e^{[i(\omega t - k_p x)]} \quad (3.21)$$

onde ϕ é a variável de interesse e ϕ_{eq} seu valor de equilíbrio; ϕ_0 , ω , e k são, respectivamente a amplitude inicial, frequência angular e o número de onda (relacionado ao comprimento de onda λ_p através de $k_p = 2\pi/\lambda_p$) da perturbação. O valor limite para a velocidade relativa das fases abaixo do qual um escoamento estratificado estável deve existir é dado por.

$$U_G - U_L < K \left[\left(\frac{\alpha_L}{\rho_L} + \frac{\alpha_G}{\rho_G} \right) (\rho_L - \rho_G) g \cos \beta \frac{A}{dA_L / dh_L} \right]^{1/2} \quad (3.22)$$

Para o caso não viscoso, $K = 1$; para o caso viscoso, $K = K_V$, onde

$$K_V = \sqrt{1 - \frac{(C_V - C_{IV})^2}{\frac{(\rho_L - \rho_G)}{\alpha_L + \frac{\rho_G}{\alpha_G}} g \cos \beta \frac{A}{dh_L}}} \quad (3.23)$$

onde os parâmetros C_V e C_{IV} representam as velocidades críticas das ondas na iminência de se tornarem instáveis, para o caso viscoso e não-viscoso, respectivamente. A variação da área de líquido com a altura pode ser determinada a partir das eqs. (3.9) e (3.10), como

$$\frac{dA_L}{dh_L} = D \sqrt{1 - \xi^2} = D \operatorname{sen}(\gamma / 2) \quad (3.24)$$

Barnea e Taitel (1994) sugeriram a simplificação desta expressão através da introdução do seguinte fator de correção,

$$K = K_{TD} = 1 - \frac{h_L}{D} \quad (3.25)$$

Surpreendentemente, este fator também incorpora corretamente os efeitos viscosos quando a viscosidade do líquido situa-se próxima à da água. Entretanto, K_{TD} não é afetado diretamente pela viscosidade, apenas via h_L/D , enquanto K_V varia fortemente com a viscosidade. Na prática, a variação do critério de instabilidade com

a viscosidade ao se utilizar o fator K_{TD} é desprezível. A dependência com a viscosidade dos fatores K_V e K_{TD} críticos (na iminência da instabilidade, i.e., para a velocidade do líquido que acarrete na transição do regime estratificado, dada uma velocidade do gás) é mostrada na Fig. (3.3).

A curva de transição para o regime de golfadas, a partir do escoamento estratificado, foi calculada através da eq. (3.22), considerando K de acordo com a eq. (3.25). Esta escolha pode ser justificada com o auxílio da Fig. (3.3), pois para viscosidade inferiores a 10 cP, os fatores K_V e K_{TD} são bastante próximos um do outro.

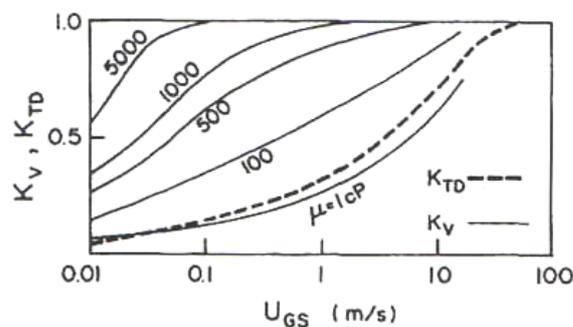


Figura 3.3 – Influência da viscosidade na relação entre os fatores K_V , K_{TD} críticos e a velocidade superficial do gás (Barnea e Taitel, 1994).

Por conveniência, o critério de estabilidade é reescrito aqui em termos das variáveis prescritas:

$$\left(\frac{U_{sG}}{\alpha_G} - \frac{U_{sL}}{\alpha_L}\right)^2 < \left(1 - \frac{h_L}{D}\right)^2 [(\rho_L - \rho_G)g \cos \beta \mathcal{D}] \left(\frac{\alpha_L}{\rho_L} + \frac{\alpha_G}{\rho_G}\right) \quad (3.26)$$

com

$$\mathcal{D} = \partial h_L / \partial \alpha_L = A / [dA_L / dh_L] = \pi D / [4 \text{sen}(\gamma / 2)] \quad (3.27)$$

Em condições em que o regime de golfadas acontece na tubulação, pode-se assumir que na região da entrada há escoamento estratificado, em que o nível de líquido situa-se num valor de equilíbrio, denominado de *hold-up* de equilíbrio. Assim, para determinar as curvas de transição, é necessário calcular este parâmetro. Para tal, pode-se assumir uma condição de regime permanente nas equações (3.4) e (3.5). Assim, eliminando-se as derivadas com respeito à posição e ao tempo:

$$-\alpha_G \frac{\partial p_{iG}}{\partial x} - \alpha_G \rho_G g \sin \beta - \frac{\tau_{wG} S_G}{A} - \frac{\tau_i S_i}{A} = 0 \quad (3.28)$$

$$-\alpha_L \frac{\partial p_{iG}}{\partial x} - \alpha_L \rho_L g \sin \beta - \frac{\tau_{wL} S_L}{A} - \frac{\tau_i S_i}{A} = 0 \quad (3.29)$$

Combinando as eqs. (3.28) e (3.29), e eliminando o gradiente de pressão obtém-se a seguinte expressão:

$$-\alpha_L (\rho_L - \rho_G) g \sin \beta - \frac{\tau_{wL} S_L}{A_L} - \frac{\tau_{wG} S_G}{A_G} - \frac{\tau_i S_i}{A} \left(\frac{1}{\alpha_L} + \frac{1}{\alpha_G} \right) = 0 \quad (3.30)$$

Os valores do *hold-up* de equilíbrio podem ser obtidos através da eq. (3.30), dados os valores para as velocidades superficiais de líquido e gás, por meio de um método iterativo qualquer (uma vez que se trata de uma equação não-linear). O procedimento escolhido aqui foi o método da secante (Press, 1992). Depois de calculado este parâmetro, verifica-se o critério dado pela eq. (3.26). A estratégia para obter a curva de transição é varrer todo o espectro do mapa de velocidades superficiais, verificando que sempre que o critério para a estabilidade for violado, deve haver uma mudança no padrão de escoamento.

Um procedimento semelhante pode ser criado para definir as transições entre os outros regimes de escoamento, como golfada e anular, golfada e bolhas, etc. No Apêndice C encontra-se um resumo dos critérios propostos por Taitel e Dukler (1976), sendo utilizados aqui para construir os mapas de padrão de escoamento para cada configuração investigada.