

Marcos de Oliveira Lage Ferreira

**Estruturas de Dados Topológicas Escalonáveis
para Variedades de dimensão 2 e 3**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Rio de Janeiro
fevereiro de 2006

Marcos de Oliveira Lage Ferreira

**Estruturas de Dados Topológicas Escalonáveis
para Variedades de dimensão 2 e 3**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Luiz Carlos Pacheco R. Velho

IMPA

Prof. Waldemar Celes

Departamento de Informática – PUC-Rio

Prof. Geovan Tavares dos Santos

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Sinésio Pesco

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de fevereiro de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Marcos de Oliveira Lage Ferreira

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Ficha Catalográfica

Ferreira, Marcos de Oliveira Lage

Estruturas de Dados Topológicas Escalonáveis para Variedades de dimensão 2 e 3 / Marcos de Oliveira Lage Ferreira; orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2006.

v., 94 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Estruturas de Dados Topológicas. 3. Topologia Computacional. 4. Geometria Computacional. I. Lopes, Hélio Côrtes Vieira. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao meu orientador professor Hélio Lopes pelo apoio e amizade durante a realização deste trabalho.

À CAPES e à FAPERJ pelos auxílios concedidos, sem os quais não poderia ter realizado este trabalho.

Aos meus pais Marcos e Lúcia, minha irmã Cynthia e minha namorada Viviane pelo carinho de sempre.

Aos meus colegas da PUC-Rio, em especial ao Thomas Lewiner.

Aos professores do departamento de Matemática, em especial ao Geovan Tavares, Paul Schweitzer, Marcos Craizer e Sinésio Pesco. Ao professor Marcos Alexandrino da USP e ao professor Luiz Velho do IMPA.

Aos funcionários do departamento de Matemática pela ajuda de sempre, em especial à Creuza.

Resumo

Ferreira, Marcos de Oliveira Lage; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Estruturas de Dados Topológicas Escalonáveis para Variedades de dimensão 2 e 3**. Rio de Janeiro, 2006. 94p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Pesquisas na área de estrutura de dados são fundamentais para aumentar a generalidade e eficiência computacional da representação de modelos geométricos. Neste trabalho, apresentamos duas estruturas de dados topológicas escalonáveis, uma para superfícies trianguladas, chamada CHE (*Compact Half-Edge*), e outra para malhas de tetraedros, chamada CHF (*Compact Half-Face*). Tais estruturas são compostas de diferentes níveis, que nos possibilitam alterar a quantidade de dados armazenados com objetivo de melhorar sua eficiência computacional. O uso de APIs baseadas no conceito de objeto, e de herança de classes, possibilitam uma interface única para cada função em todos os níveis das estruturas. A CHE e a CHF requerem pouca memória e são simples de implementar já que substituem o uso de ponteiros pelo de contêineres genéricos e regras aritméticas.

Palavras-chave

Estruturas de Dados Topológicas. Topologia Computacional. Geometria Computacional.

Abstract

Ferreira, Marcos de Oliveira Lage; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Scalable topological data-structures for 2 and 3 manifolds**. Rio de Janeiro, 2006. 94p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Research in data structure area are essential to increase the generality and computational efficiency of geometric models' representation. In this work, we present two new scalable topological data structures, one for triangulated surfaces, called **CHE** (*Compact Half – Edge*), and the another for tetrahedral meshes, called **CHF** (*Compact Half – Face*). Such structures are composed of different levels, that enable us to modify the amount of data stored with the objective to improve its computational efficiency. The use of APIs based in the object concept and class inheritance, makes possible an unique interface for each function at any level. **CHE** and **CHF** requires very few memory and are simple to implement since they substitute the use of pointers by generic containeres and arithmetical rules.

Keywords

Topological Data-Structures. Computational Topology. Computational Geometry.

Sumário

1	Introdução	11
2	Preliminares	14
2.1	Simplexos	14
2.2	Complexos Simpliciais	15
2.3	Relações entre Simplexos	16
2.4	Componentes Conexas	18
2.5	Variedades	18
2.6	Bordo de Variedades	20
2.7	Relações Topológicas em Variedades	21
2.8	Programação Genérica	22
3	Trabalhos Anteriores	25
3.1	Estruturas de Dados para Superfícies em \mathbb{R}^3	25
3.2	Estruturas de Dados para 3-Variedades	31
3.3	Estruturas de Dados para n -Variedades	34
3.4	Estruturas de Dados para não-Variedades	36
4	A Estrutura de Dados CHE	38
4.1	Nível 0: Sopa de Triângulos	38
4.2	Nível 1: Adjacência entre Triângulos	40
4.3	Nível 2: Representação das Células	42
4.4	Nível 3: Representação das Curvas de Bordo	43
4.5	Exemplo de Construção da CHE	45
4.6	Interrogações Topológicas na CHE	46
5	A Estrutura de Dados CHF	51
5.1	Nível 0: Sopa de Tetraedros	51
5.2	Nível 1: Adjacência entre Tetraedros	55
5.3	Nível 2: Representação das Células	56
5.4	Nível 3: Representação das Superfícies de Bordo	59
5.5	Exemplo de Construção da CHF	60
5.6	Interrogações Topológicas na CHF	61
6	Comparações	66
6.1	Estruturas de Dados para Superfícies em \mathbb{R}^3	66
6.2	Estruturas de Dados para 3-Variedades	69
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	73
	Referências Bibliográficas	92

Lista de figuras

1.1	Gráfico <i>performance X memória</i> .	11
1.2	Níveis da CHE e da CHF no gráfico <i>performance X memória</i> .	12
2.1	Simplexos de dimensão 0, 1, 2 e 3 em \mathbb{R}^m .	14
2.2	Exemplos de faces dos simplexos de dimensão 1, 2 e 3 em \mathbb{R}^m	15
2.3	Bordo e interior de simplexos de dimensão 1 e 2 em \mathbb{R}^m .	15
2.4	Complexo simplicial	16
2.5	Complexo inválido	16
2.6	Estrela e Elo de vértices de uma esfera.	16
2.7	2-complexo regular	17
2.8	3-complexo não regular	17
2.9	Simplexos 1-adjacentes	17
2.10	Simplexos 0-adjacentes	17
2.11	ψ e γ são 0-conectados e ψ' e γ' são 1-conectados. O complexo simplicial Σ é uma 0-componente conexa.	18
2.12	Simplexos variedade	19
2.13	Simplexos não-variedade	19
2.14	Pseudo-2-variedade	19
2.15	2-variedade	19
2.16	2-variedade combinatória orientada no sentido anti-horário.	20
2.17	Simplexos de bordo e interior de uma 3-variedade.	21
2.18	$R_{00}(\sigma)$ e $R_{00}(\sigma')$	21
2.19	$R_{10}(\sigma_0)$, $R_{11}(\sigma_1)$ e $R_{12}(\sigma_2)$	22
2.20	Exemplo de uma <i>RB-Tree</i> .	24
3.1	Nó surface.	26
3.2	Nó face	26
3.3	Nó half-edge	26
3.4	Half-edge de uma aresta de bordo.	27
3.5	Half-edges de uma aresta de interior.	27
3.6	Nó Boundary Curve.	27
3.7	Nó edge	28
3.8	Nó vertex	28
3.9	Vértice de interior.	28
3.10	Vértice de bordo.	28
3.11	Relação corner/half-edge.	29
3.12	Corners opostos c e o .	29
3.13	Relação corner/directed-edge.	30
3.14	Informações armazenadas pela directed-Edge e^d .	30
3.15	Nó 3-Manifold.	31
3.16	Nó Surface.	32
3.17	Nó Boundary Surface.	32
3.18	Nó Face.	32
3.19	Nó Half-Face.	32
3.20	Nó Edge.	33

3.21	Nó Surface Edge.	33
3.22	Nó Half-Edge.	33
3.23	Nó Vertex.	34
3.24	Nó Surface Vertex.	34
3.25	Nós da Handle-Face.	35
3.26	Estrela de um nm -vértice não-variedade	37
3.27	Estrela de uma nm -aresta não-variedade	37
4.1	Nível 0 da CHE: Sopa de Triângulos.	38
4.2	Half-edges de uma aresta em seus triângulos incidentes.	39
4.3	Half-edges $next_{he}(he)$ e $prev_{he}(he)$.	40
4.4	Relação entre vértices e half-edges.	40
4.5	Nível 1 da CHE: Adjacência entre os triângulos.	40
4.6	Half-edge oposta a $half-edge HE_{id}$ he .	41
4.7	Nível 2 da CHE: Representação das células.	42
4.8	Escolha das $half-edges$ armazenadas no contêiner $VH[]$.	43
4.9	CHE nível 3: Representação das curvas de bordo.	44
4.10	Exemplo de construção da CHE .	45
5.1	Nível 0 da CHF: Sopa de Tetraedros.	51
5.2	Uma $half-face$ de um tetraedro.	52
5.3	Relação entre $half-faces$ e vertices.	53
5.4	Orientação das $half-faces$ de um tetraedro T_{id} t .	54
5.5	Índice de uma $half-edge$.	54
5.6	$Half-edge mate$	55
5.7	$Half-edge radial$	55
5.8	Nível 1: Adjacência entre Tetraedros.	55
5.9	Half-face oposta a half-face HF_{id} .	56
5.10	Nível 2: Representação das Células.	57
5.11	Half-face de bordo incidente a uma aresta de bordo.	58
5.12	Exemplo de construção da CHE .	60
7.1	Stanford Bunny, 100.000 vértices, 199.322 triângulos, CHE nível 2.	79
7.2	Happy Buddha, 543.652 vértices, 1.087.716 triângulos, CHE nível2.	80
7.3	Modelo CSG, 82.020 vértices, 164.036 triângulos, CHE nível 1.	81
7.4	David, 50.329 vértices, 100.458 triângulos, CHE nível 3.	82
7.5	Dragon, 437.645 vértices, 871.414 triângulos, CHE nível 3.	83
7.6	Stanford Bunny, 48.810 vértices, 273.660 tetraedros, CHF nível 1.	84
7.7	Stanford Bunny, classificação dos vértices CHF nível 2.	85
7.8	Stanford Bunny, classificação das arestas CHF nível 2.	86
7.9	Stanford Bunny, superfície de bordo CHF nível 3.	87
7.10	Hand, 28.793 vértices, 125.127 tetraedros, Campo Escalar.	88
7.11	Blunto, 40.921 vértices, 187.318 tetraedros, CHF nível 3.	89
7.12	Gargoyle, 48.553 vértices, 258.229 tetraedros, CHF nível 3.	90
7.13	Tempo de carregamento dos níveis CHE	91
7.14	Tempo de carregamento dos níveis CHF	91

Lista de tabelas

4.1	Complexidade das funções resposta na CHE.	50
5.1	Orientação das <i>half-faces</i> de um tetraedro T_{id} t.	53
5.2	Complexidade das funções resposta na CHF.	65
6.1	Custo de memória para representação da topologia.	69
6.2	Custo de memória para representação da topologia.	72
7.1	Custo de memória para representação do modelo Stanford Bunny.	73
7.2	Custo de memória para representação do modelo Happy Buddha.	74
7.3	Custo de memória para representação do modelo CSG.	74
7.4	Custo de memória para representação do modelo David.	74
7.5	Custo de memória para representação do modelo Dragon.	75
7.6	Custo de memória para representação do modelo Stanford Bunny volumétrico.	75
7.7	Custo de memória para representação do modelo Hand.	76
7.8	Custo de memória para representação do modelo Blunto.	76
7.9	Custo de memória para representação do modelo Gargoyle.	76