

## 2 Modelagem de uma Colisão

Neste trabalho, optou-se por modelar somente o veículo e a colisão. Tanto a pista quanto o ambiente que cerca a colisão não foram tratados. A inclusão destes fatores em nada afetará o algoritmo de otimização que, como discutido no próximo capítulo, é robusto e suporta mudanças no programa de simulação sem que nenhuma alteração relevante se faça necessária.

Está sendo utilizado neste trabalho um simulador de colisões de veículos terrestres que se baseia no modelo apresentado por Abdulmassih [2] e que pode ser adotado para casos de colisão de um veículo contra um obstáculo ou de dois veículos entre si. Este modelo de colisão instantânea trabalha no plano, com veículos rígidos de três graus de liberdade, levando em conta as perdas de energia na colisão devido às deformações plásticas dos veículos, o atrito e a interpenetração deles.

O modelo de colisão basicamente faz uma transformação linear das variáveis de entrada – velocidades e posições dos veículos antes da colisão – por meio de uma matriz que contém informações sobre a geometria do problema, a massa e o momento de inércia de cada veículo, os coeficientes de restituição, de interpenetração e de atrito, o que resulta nas velocidades e posições logo após a colisão. Estas serão então as entradas do simulador, que, segundo o modelo descrito a seguir, calculará a trajetória dos veículos até o instante de parada. Neste ponto da abordagem, torna-se pertinente conceituar com precisão os três momentos ou etapas da colisão.

### 2.1. Etapas de uma Colisão

Em toda colisão, ocorrem necessariamente três etapas distinguíveis e modeláveis separadamente: o pré-choque, o choque propriamente dito e o pós-choque (vide Figura 2).

O pré-choque envolve os acontecimentos precedentes à colisão e que exercem influência direta sobre os valores dos parâmetros relevantes ao choque. No caso de colisão de veículos terrestres, nesta etapa as variáveis apresentam

geralmente menor variação em comparação com as outras, dadas as restrições impostas pelo comportamento do motorista.

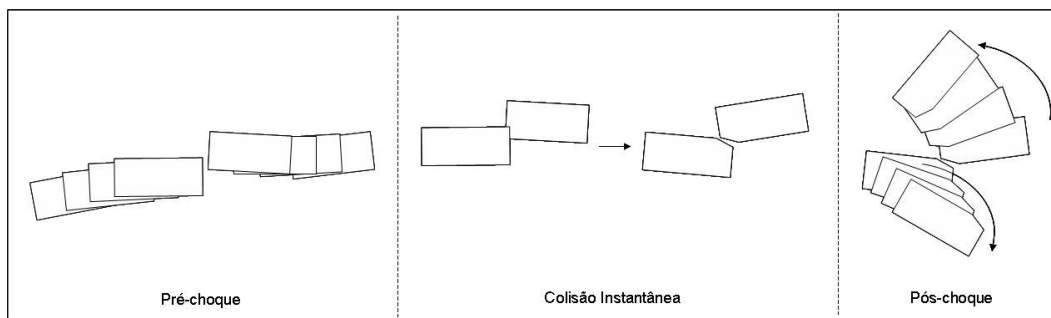


Figura 2 – Seqüência de Colisão

O choque propriamente dito é caracterizado pelo contraste entre, por um lado, a magnitude das forças e energia envolvidas, e por outro, o intervalo de tempo a considerar. Em particular neste estudo, tal intervalo de tempo será aproximado para zero (colisão instantânea).

O pós-choque é constituído pelos acontecimentos logo posteriores ao choque, encerrando-se com a parada dos veículos. Esta etapa pode ser caracterizada pela ausência da influência do piloto humano, o que leva a uma situação de dinâmica de veículos em condições extremas de forças, sendo de se destacar a prevalência do atrito dinâmico.

A seguir, são detalhados os modelos referentes a cada uma das três etapas citadas.

## 2.2. Modelo Pré-Choque

A modelagem dos acontecimentos precedentes ao choque foi analisada e avaliou-se que não será objeto deste estudo. Sua complexidade é um desafio abordado em diversos trabalhos, que se baseiam em modelos de comportamento humano em colisões. As publicações disponíveis sobre o tema não incluem a devida adaptação às necessidades do trabalho aqui apresentado, tratando-se portanto de metodologia recomendável para aperfeiçoamentos futuros do modelo desenvolvido nesta dissertação.

Day e Metz [9], por exemplo, abordam o problema em pauta utilizando uma aplicação direta de um modelo matemático para um sistema de controle humano. Para o modelo de piloto humano, Day assume uma equação diferencial linear a coeficientes constantes, com um ruído somado à saída que não pode ser descrito por uma equação linear deste tipo. Ao sintetizar o modelo de equação diferencial linear para o piloto humano, três propriedades são importantes de serem analisadas:

- Atraso de reação

Experimentos simples de reação mostram que o atraso da mesma é de no mínimo 0,15 s.

- Ganho

Controle de retro-alimentação requer um ganho, que neste caso precisa ser o maior possível para garantir estabilidade, para ter resposta razoável

- Retardo muscular

Viscosidade, inércia e assincronia muscular resultam em um retardo entre ação desejada e efetiva ação (0,1s a 0,2s).

Combinando as propriedades anteriores, tem-se a seguinte função de transferência

$$Y_{humano} = \frac{Ke^{-\tau_r s}}{1 + \tau_n s}$$

relacionando a primeira percepção pelo piloto (entrada) da necessidade de mudança e o esterçamento (saída) exercido pelo mesmo através do volante, onde K é o ganho,  $\tau_r$  é o atraso na reação e  $\tau_n$  é o retardo muscular.

Como diversas variáveis são controladas ao mesmo tempo, há uma potencial interferência entre elas. Estudos mostram que em determinadas situações, o piloto humano faz amostragem de informação que não é contínua, sendo assim melhor caracterizado por uma equação a diferenças do que por uma equação diferencial.

Os humanos sofrem variações de performance ao longo do tempo, e este dado deve ser levado em consideração no modelo. A existência de ruído portanto se faz necessária.

E finalmente, percebe-se que o humano, enquanto controlador, é muito adaptável, ou seja, um piloto pode mudar de um carro para outro de dinâmica bem diferente sem necessitar de treinamento prolongado ou sequer de algum treino. Porém ao se estudar um veículo em particular, esta característica é pouco relevante, a não ser em mudanças súbitas como o estouro de um pneu.

Allen e Rosenthal [10], por sua vez, abordam o problema em pauta classificando os modelos de piloto, em termos gerais, de acordo com as funções de controle, de direção e de navegação. Entende-se como controle, as funções psicomotoras que estabilizam o veículo na trajetória e velocidade desejada em função das perturbações aerodinâmicas e de pista. Já a direção engloba as funções psicomotoras e perceptivas do piloto que levam o veículo a seguir uma dada trajetória, impor certa velocidade, interagir com o trânsito e evitar obstáculos. Por último a navegação envolve níveis mais altos de funções cognitivas aplicadas à escolha do melhor caminho ou decisões sobre interação com o tráfego (evitar congestionamento).

Um modelo genérico para as funções de direção e controle está ilustrado na Figura 3. Este modelo permite ao operador humano responder a perturbações porém não engloba a função navegação. O piloto opera tanto de forma a compensar possíveis erros de velocidade e trajetória como de percorrer a dada trajetória.

As funções de transferências  $Y_{pi}$  e  $Y_p$  são respectivamente as partes do comportamento humano responsáveis por percorrer a trajetória desejada e por compensar o erro.  $Y_c$  é a função de transferência do veículo, ou seja, tem como saída o comportamento do veículo dada uma entrada no volante.

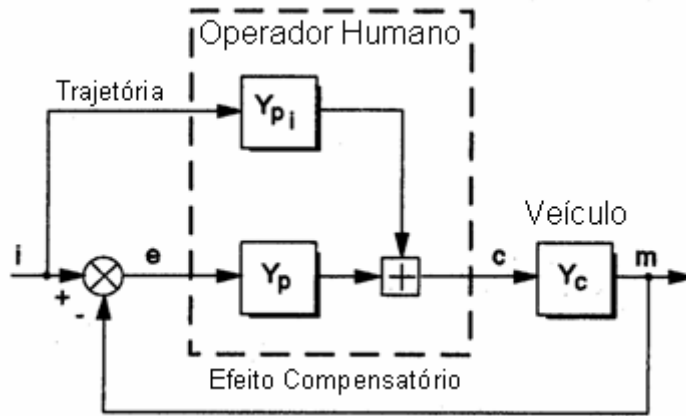


Figura 3 – Modelo Genérico

A função de transferência de malha aberta do ciclo compensatório da Figura 3 pode ser expressa como:

$$Y_p * Y_c = \omega_c e^{-\tau_e s / s}$$

O comportamento compensatório de um piloto humano pode ser compactado num sistema de dois parâmetros, no ganho ou frequência de *crossover* ( $\omega_c$ ) e no atraso no tempo ( $\tau_e$ ).

Para manter-se na trajetória desejada, para percorrer uma trajetória curvilínea, para mudança de pista ou desviar de obstáculos, o piloto humano exerce um controle de esterçamento no veículo. Para alguns destes casos são utilizados comportamentos baseados na percepção e predição. Em outros, como correção de perturbações, se utilizam de comportamentos para perseguir a trajetória desejada.

Um modelo geral de esterçamento para ambos os comportamentos é mostrado na Figura 4. Enquanto o piloto exerce o esterçamento necessário para cumprir a trajetória prevista, ele também tem que compensar possíveis perturbações.

A parte compensatória do sistema se dá em forma de uma malha fechada, enquanto a parte de perseguição de rota se dá por uma malha aberta. O ciclo fechado requer uma atitude estabilizadora baseada na amplitude e na duração do movimento de esterçamento. Para a parte de perseguição, é necessário haver certa previsão do movimento necessário de esterçamento.

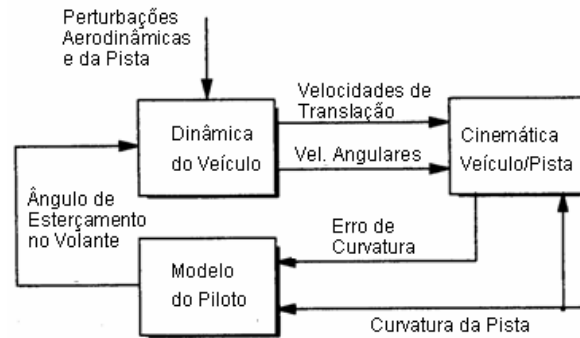


Figura 4 - Modelo de Piloto Genérico

Como ambos os artigos citados tratam de *softwares* comerciais, seus respectivos códigos fontes não estão disponíveis e nem mesmo seus algoritmos chegam a ser apresentados de forma explícita. Isso torna a reprodução destes modelos inviável. Após o exame destas referências, optou-se por modelar o problema somente a partir da condição imediatamente anterior ao choque. Nesta condição não se faz necessário um modelo de piloto humano, já que se admite que a reação deste, mesmo que haja, é desprezível frente à velocidade dos acontecimentos, às forças envolvidas e às avarias do veículo após a colisão, diminuindo com isso a sua dirigibilidade.

Em Speranza Neto e Spínola [14], apresenta-se um estudo inicial para a modelagem de piloto humano e da sua influência no comportamento do veículo que deverá ser incluído futuramente nos trabalhos desenvolvidos pelo grupo de dinâmica de veículos da PUC-Rio, de modo a apresentar completamente a etapa pré-choque.

### 2.3. Modelo de Colisão Instantânea

O modelo de choque do trabalho tratado foi adaptado a partir do trabalho de Abdulmassih [2], de forma a simplificar o algoritmo do programa de otimização. Este modelo tem como entrada informações como a geometria do problema, a massa e o momento de inércia de cada veículo, os coeficientes de restituição, de interpenetração e de atrito. Através de uma transformação linear, obtêm-se como saída as velocidades e posições logo após a colisão.

No referido trabalho, os problemas direto ou inverso eram descritos no referencial da colisão, definido como tendo seu eixo  $x$  perpendicular à área de colisão, o eixo  $y$  ao longo dessa área, e sendo sua origem localizada no ponto médio da área. Tal referencial foi estabelecido em um modelo baseado na hipótese de uma área plana de interceptação dos veículos, atingida imediatamente após o choque, e mantida fixa durante a colisão.

A determinação dos parâmetros geométricos característicos do problema de colisão neste referencial, assim como a definição das velocidades dos veículos antes do choque, era normalmente uma tarefa complicada e sujeita a erros, a menos que se tratasse de um acidente com características bastante particulares. Também a interpretação dos resultados do modelo não era uma tarefa das mais simples, uma vez que as velocidades de translação pós-colisão, e conseqüentemente os movimentos dos veículos, deviam ser analisados em um referencial específico para cada caso e posição particular dos veículos, que em nada auxiliava a visualização das suas trajetórias no cenário do acidente, e era completamente distinto daqueles geralmente usados em dinâmica de veículos.

Assim, para facilitar os procedimentos de entrada de dados e análise de resultados, procedeu-se basicamente a uma mudança de referenciais. Passou-se a adotar os referenciais locais de cada veículo para definição do problema, e conseqüentemente para a determinação dos parâmetros e variáveis pré-colisão, e a empregar um referencial global, estabelecido de acordo com o cenário do acidente, para avaliação dos movimentos pré-colisão e pós-colisão. Agora o referencial da colisão é determinado a partir da geometria da colisão, ajustada em função de cada caso específico, tornando o problema muito mais simples de ser definido. O modelo de colisão e sua solução continuam no referencial da colisão, entretanto há um pré-processamento para estabelecer tal referencial, a partir de condições mais fáceis de serem definidas, e um pós-processamento para melhor compreensão e visualização do resultado obtido.

### 2.3.1. Colisão Oblíqua no Referencial da Colisão

A Figura 5 apresenta alguns tipos genéricos de colisões, os quais podem ser tratados como choques oblíquos, e de acordo com a formulação detalhada em Abdulmassih (2003), são analisados por um modelo que depende da posição do centro de massa dos veículos em relação ao centro da área de colisão, das velocidades dos veículos no instante do choque, das suas propriedades inerciais, e de parâmetros que determinam a natureza da colisão e o nível de interpenetração dos veículos. A Figura 6 mostra colisões centrais, que são um caso particular daquelas da Figura 5, para as quais o mesmo modelo pode ser empregado, uma vez estabelecida devidamente a geometria do choque entre os veículos.

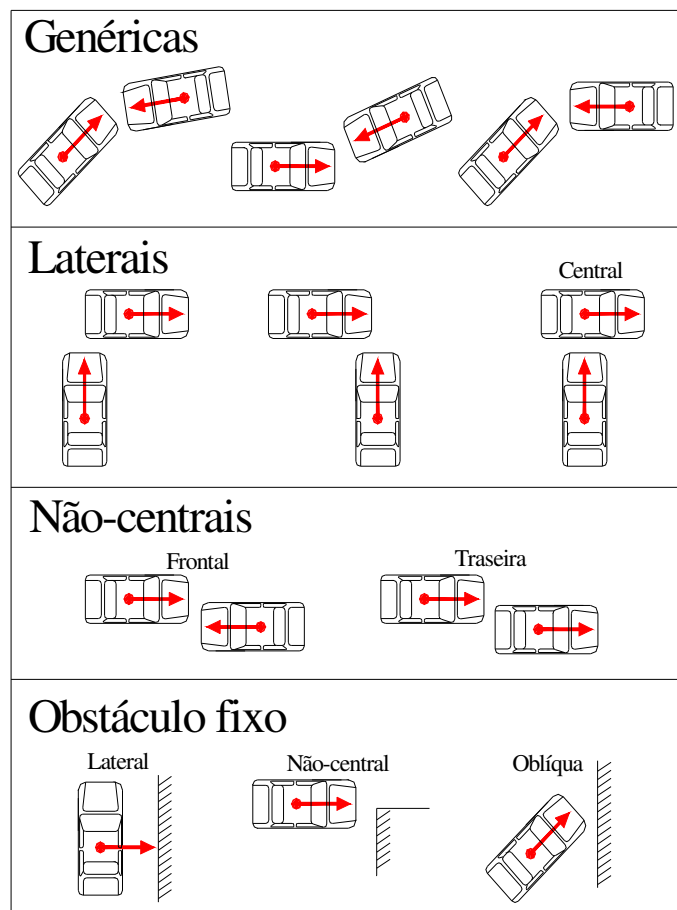


Figura 5 - Colisões Oblíquas



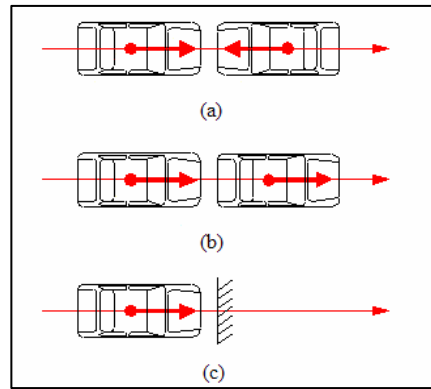


Figura 6 - Colisões Centrais: (a) Frontal. (b) Traseira. (c) Contra Obstáculo Fixo

A Figura 7 apresenta o referencial da colisão, definido em função da área de interceptação dos veículos, suposta plana, e os parâmetros geométricos e variáveis associados ao modelo descrito em Abdulmassih [2]. Nota-se que para cada tipo de acidente o referencial da colisão deverá ser estabelecido a partir da região atingida dos veículos, de acordo com as hipóteses citadas anteriormente. Não há portanto um referencial único, sendo que durante a investigação das causas de uma colisão, diferentes referenciais serão empregados, o que dificulta bastante a análise dos resultados.

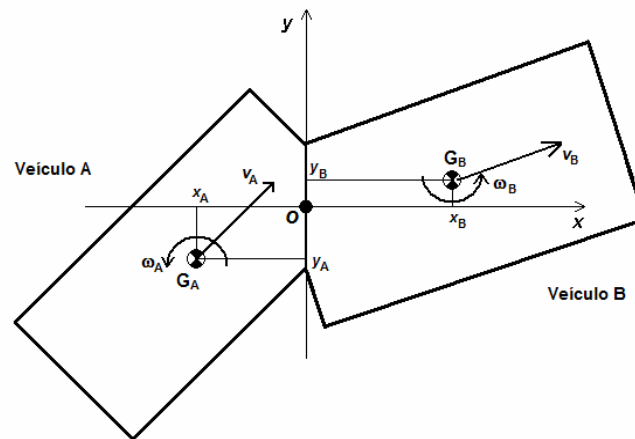


Figura 7 - Referencial da Colisão

Considerando a duração infinitesimal do choque, aplicadas as condições de conservação de quantidade de movimento linear e angular, juntamente com algumas relações complementares, baseadas em hipóteses sobre o tipo de colisão e a dissipação de energia devida à deformação dos veículos durante o choque, chega-se um sistema de equações algébricas lineares, relacionando as

componentes das velocidades dos veículos antes (índice 1) e depois (índice 2) do acidente, que organizado na forma matricial é dado por

$$\begin{bmatrix} m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\ m_A(y_A - \lambda x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\ 0 & 0 & m_B(y_B - \lambda x_B) & 0 & 0 & -J_B \\ e & 0 & -e & 0 & e y_A & -e y_B \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ax1} \\ v_{Ay1} \\ v_{Bx1} \\ v_{By1} \\ \omega_{A1} \\ \omega_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\ m_A(y_A - \lambda x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\ 0 & 0 & m_B(y_B - \lambda x_B) & 0 & 0 & -J_B \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -y_A & y_B \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ax2} \\ v_{Ay2} \\ v_{Bx2} \\ v_{By2} \\ \omega_{A2} \\ \omega_{B2} \end{bmatrix}$$

onde

$m_A$  e  $m_B$  são as massas dos veículos (kg);

$J_A$  e  $J_B$  são os momentos de inércia dos veículos em relação ao eixo vertical que passa pelo Centro de Massa (CM ou  $G_{A/B}$ ) ( $\text{kg m}^2$ );

$(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  são as coordenadas da posição dos centros de massa dos veículos em relação ao sistema de referência da colisão (m);

$e$  é o coeficiente de restituição, definido de acordo com as características de deformação associadas à colisão, de tal modo que  $e = 0$  colisão perfeitamente plástica;  $0 < e < 1$  colisão inelástica;  $e = 1$  colisão perfeitamente elástica, vinculadas à velocidade relativa normal à área de interceptação;

$\lambda$  é um parâmetro que caracteriza um efeito combinado de atrito e interpenetração dos veículos, vinculado à velocidade relativa ao longo da área de interceptação, para o qual os valores limites que podem ser empregados serão analisados adiante;

$(v_{Ax1}, v_{Ay1})$  e  $(v_{Bx1}, v_{By1})$  são as componentes das velocidades absolutas dos CM dos veículos  $A$  e  $B$  antes do choque (índice 1) no referencial da colisão (m/s);

$(v_{Ax2}, v_{Ay2})$  e  $(v_{Bx2}, v_{By2})$  são as componentes das velocidades absolutas dos CM dos veículos  $A$  e  $B$  depois do choque (índice 2) no referencial da colisão (m/s);

$\omega_{A1}$  e  $\omega_{B1}$  são as velocidades angulares (em torno do eixo vertical) dos veículos  $A$  e  $B$  antes da colisão (rad/s); e

$\omega_{A2}$  e  $\omega_{B2}$  são as velocidades angulares (em torno do eixo vertical) dos veículos A e B depois da colisão (rad/s).

A solução deste modelo possibilita encontrar as variáveis depois do choque, dadas as condições antes da colisão, e o resultado inverso é obtido definindo as condições imediatamente após o choque, para determinar as variáveis antes da colisão, de acordo com

$$\begin{bmatrix} v_{Ax2} \\ v_{Ay2} \\ v_{Bx2} \\ v_{By2} \\ \omega_{A2} \\ \omega_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\ m_A(y_A - \lambda x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\ 0 & 0 & m_B(y_B - \lambda x_B) & 0 & 0 & -J_B \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -y_A & y_B \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\ m_A(y_A - \lambda x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\ 0 & 0 & m_B(y_B - \lambda x_B) & 0 & 0 & -J_B \\ e & 0 & -e & 0 & e y_A & -e y_B \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ax1} \\ v_{Ay1} \\ v_{Bx1} \\ v_{By1} \\ \omega_{A1} \\ \omega_{B1} \end{bmatrix}$$

OU

$$\begin{bmatrix} v_{Ax1} \\ v_{Ay1} \\ v_{Bx1} \\ v_{By1} \\ \omega_{A1} \\ \omega_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\ m_A(y_A - \lambda x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\ 0 & 0 & m_B(y_B - \lambda x_B) & 0 & 0 & -J_B \\ e & 0 & -e & 0 & e y_A & -e y_B \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\ m_A(y_A - \lambda x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\ 0 & 0 & m_B(y_B - \lambda x_B) & 0 & 0 & -J_B \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -y_A & y_B \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ax2} \\ v_{Ay2} \\ v_{Bx2} \\ v_{By2} \\ \omega_{A2} \\ \omega_{B2} \end{bmatrix}$$

desde que as respectivas matrizes possuam inversa, o que é garantido sempre que há consistência nos dados, conforme Abdulmassih [2].

### 2.3.2. Determinação do Referencial da Colisão

O referencial da colisão pode ser estabelecido a partir da geometria dos veículos e da área atingida durante o choque. Para tanto, deve-se antes definir sistemas de referência em cada um dos veículos de modo a poder determinar pontos que caracterizem os limites das regiões de contato e interseção dos veículos. A Figura 8 apresenta os 4 sistemas de referência empregados no tratamento que se segue. Além do referencial da colisão  $(x,y)$ , e um referencial local para cada veículo  $(x_A,y_A)$  e  $(x_B, y_B)$ , também é utilizado o referencial global  $(X,Y)$ , que será definido em função do cenário do acidente, como discutido adiante. Nota-se que nos referenciais locais os eixos  $x_A$  e  $x_B$  estão orientados da traseira para a dianteira dos veículos, e os eixos  $y_A$  e  $y_B$  da direita para a esquerda. Mostra-se ainda na Figura 8 os ângulos  $(\phi_A^G$  e  $\phi_B^G)$  de cada referencial local em relação ao global, no instante da colisão.

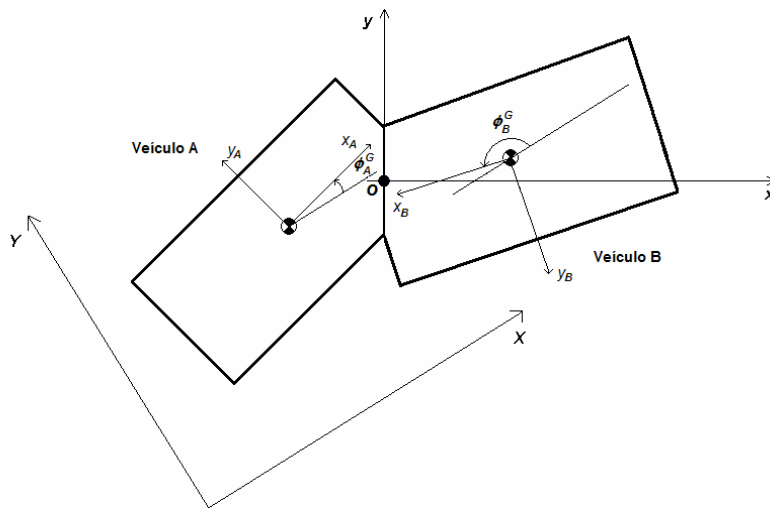


Figura 8 - Sistemas de Referência da Colisão, Locais dos Veículos e Global.

A fim de simplificar a análise, sem perda de generalidade, considera-se inicialmente o ângulo do veículo A em relação ao referencial global nulo, ou seja  $\phi_A^G = 0^\circ$ , isto é, os veículos se encontram com a orientação mostrada na Figura 9.

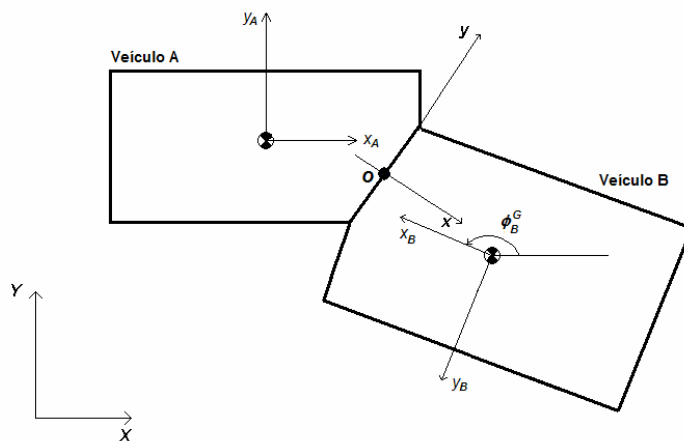


Figura 9 - Sistemas de Referência com  $\phi_A^G = 0^\circ$

A Figura 10 apresenta a definição dos pontos relevantes para estabelecimento do referencial da colisão, em relação ao referencial local do veículo. Emprega-se aqui apenas um dos veículos, no caso A, mas tem-se o mesmo para o veículo B. Dada a hipótese de que a região atingida em cada veículo é plana e assim permanece durante toda a colisão, considerada praticamente instantânea, os pontos  $(x_i, y_i)$  e  $(x_f, y_f)$  definem o início e o término da área colidida no veículo. Os pontos  $(x_1, y_1) = (l_d, b/2)$ ,  $(x_2, y_2) = (l_d, -b/2)$ ,  $(x_3,$

$y_3) = (-l_t, b/2)$  e  $(x_4, y_4) = (-l_t, -b/2)$  estabelecem os limites das partes laterais e frontais, aqui supostas como definidas aproximadamente pela bitola ( $b$ ) e as distâncias do CM aos eixos dianteiro e traseiro ( $l_d$  e  $l_t$ ).

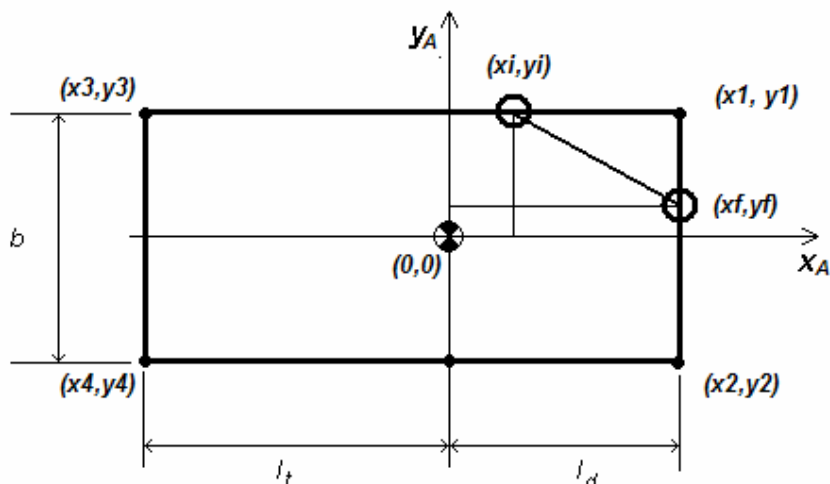


Figura 10 - Definição dos Pontos Relevantes de um Veículo para a Determinação do Referencial da Colisão

Observa-se que os pontos  $(x_i, y_i)$  e  $(x_f, y_f)$  estarão sempre sobre uma das laterais ou sobre as partes frontal e traseira. De modo a tornar o procedimento mais simples, considera-se, para a definição desses pontos, a distância percentual de cada um deles em relação às extremidades do veículo. Impõe-se também que o ponto ( $i$ ), inicial da área, é aquele com menor coordenada ( $x_A$ ) em módulo. Nota-se ainda que valores positivos e negativos destes parâmetros, associados aos quadrantes a que pertencem, estão relacionados respectivamente às coordenadas dos pontos  $(x_1, y_1) = (l_d, b/2)$ ,  $(x_2, y_2) = (l_d, -b/2)$ ,  $(x_3, y_3) = (-l_t, b/2)$  e  $(x_4, y_4) = (-l_t, -b/2)$ . A Tabela 1 resume as diversas possibilidades para definição dos pontos  $(x_i, y_i)$  e  $(x_f, y_f)$ .

QUADRANTE	$x_i$	$y_i$	$x_f$	$y_f$
1º.	+ % de $l_d$	+ % de $b/2$	+ % de $l_d$	+ % de $b/2$
2º.	- % de $l_t$	+ % de $b/2$	- % de $l_t$	+ % de $b/2$
3º.	- % de $l_t$	- % de $b/2$	- % de $l_t$	- % de $b/2$
4º.	+ % de $l_d$	- % de $b/2$	+ % de $l_d$	- % de $b/2$

Tabela 1 - Definição Percentual dos Pontos  $(x_i, y_i)$  e  $(x_f, y_f)$

Por exemplo,

$$(x_i, y_i) = (0,2, 1,0) \text{ e } (x_f, y_f) = (1,0, 0,3)$$

significa, após a conversão,

$$(x_i, y_i) = (0,2 l_d, b/2) \text{ e } (x_f, y_f) = (l_d, 0,3 b/2)$$

indicando que a área atingida encontra-se, como na Figura 10, na região frontal-esquerda do veículo, e sendo

$$(x_i, y_i) = (-0,7, -1,0), \text{ que é na verdade igual à } (-0,7 l_b, -1,0 b/2)$$

e

$$(x_f, y_f) = (-1,0, -0,5), \text{ que é na verdade igual à } (-l_b, -0,5 b/2)$$

a área de choque está na parte traseira-direita do veículo.

Após realizar as conversões dos valores percentuais de  $(x_i, y_i)$  e  $(x_f, y_f)$ , a determinação da área de contato, ou mais precisamente da distância entre os pontos  $(i)$  e  $(f)$  é trivialmente dada por

$$A_A = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_i - y_f)^2}$$

Na verdade, a “área”  $A_A$  assim determinada é a projeção da área da colisão no referencial local do veículo.

O ângulo da área de contato  $\gamma_A$ , que define a direção do eixo  $y$  do referencial da colisão, com o eixo  $x_A$  do referencial local do veículo A, como ilustrado na Figura 11, é obtido a partir de

$$\gamma_A = \text{tg}^{-1} \frac{(y_i - y_f)}{(x_f - x_i)}$$

e, que segundo a definição dada, se encontra no sentido horário, não trigonométrico, de modo a simplificar os cálculos. Assim o ângulo do eixo  $x$  do

referencial da colisão, perpendicular à área de contato, com o eixo  $x_A$  local do veículo será determinado por  $\phi_A^C = (90^\circ - \gamma_A)$ .

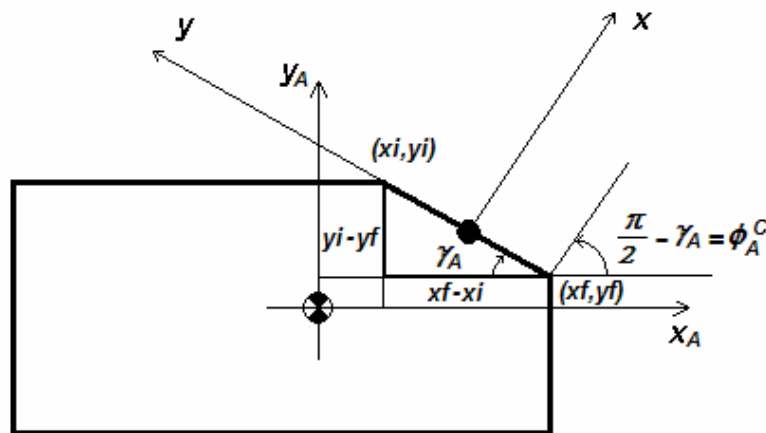


Figura 11 - Referencial da Colisão Visto do Veículo A.

O mesmo procedimento pode ser aplicado ao outro veículo, B no caso, para determinar a área de contato AB e o ângulo  $\gamma_B$ . Entretanto não se pode prosseguir no tratamento do problema com áreas distintas em cada veículo. De modo a obter áreas coincidentes, ou que as projeções das áreas nos respectivos referenciais locais sejam iguais, deve-se alterar a posição dos pontos  $(x_i, y_i)$  e  $(x_f, y_f)$ , em pelo menos um dos veículos, até atingir a convergência.

De modo a garantir que as áreas atingidas sejam exatamente iguais, pode-se estabelecer um procedimento algébrico que irá determinar as coordenadas de um dos pontos que definem a posição inicial ou final da região colidida em um dos veículos, mantendo os outros três pontos fixos. Considerando essa condição para o veículo A, e admitindo o ponto inicial do veículo B com posição constante, tem-se

$$A_A = A_B$$

ou

$$\sqrt{(x_{fA} - x_{iA})^2 + (y_{iA} - y_{fA})^2} = \sqrt{(x_{fB} - x_{iB})^2 + (y_{iB} - y_{fB})^2}$$

ou ainda

$$(x_{fA} - x_{iA})^2 + (y_{iA} - y_{fA})^2 = (x_{fB} - x_{iB})^2 + (y_{iB} - y_{fB})^2$$

onde se verifica que esta é a equação de um círculo de raio  $A_A$  e centro  $(x_{fB}, y_{fB})$ , conhecidos, na qual existem duas incógnitas,  $(x_{fB}, y_{fB})$ . Portanto para se obter uma solução deve-se impor  $x_{fB}$  ou  $y_{fB}$  e determinar  $y_{fB}$  ou  $x_{fB}$ . Como existem apenas algumas posições possíveis para localização dos pontos, dada a região de colisão, de acordo com a Figura 12, torna-se relativamente simples resolver o problema.

A Tabela 2 resume as 16 soluções de ocorrência mais freqüente, ou seja aquelas aqui consideradas válidas. Existem ainda outras soluções possíveis, que entretanto não serão adotadas por se tratarem de condições de difícil ocorrência. Caso haja necessidade, é fácil introduzir qualquer situação no algoritmo proposto. Nota-se que não se pode impor determinadas soluções, como por exemplo fixar  $y_{fB}$  estando a área na parte dianteira esquerda (DE), e obter  $x_{fB}$ , pois nessa região sempre  $x_{fB} = l_d$ . Assim as soluções encontradas devem estar de acordo com as possíveis combinações apresentadas. Observe que a escolha da posição dos pontos no outro veículo, no caso o A, deve respeitar a mesma combinação de valores, sob pena de não se ter uma condição consistente, uma vez conhecida a área atingida.

Tal procedimento garante a igualdade das áreas de contato e simplifica consideravelmente o tratamento do problema. Sempre poderão ser fornecidos novos pontos inicial e final sobre um dos veículos, no caso o A, e escolhido um ponto inicial consistente no outro veículo, no caso o B, e o processo reiniciado, de modo a determinar a solução que melhor atenda as características da colisão em análise. Lembra-se finalmente que, só após determinadas as coordenadas  $(x_{fB}, y_{fB})$ , o ângulo  $\gamma_B$  poderá ser calculado.

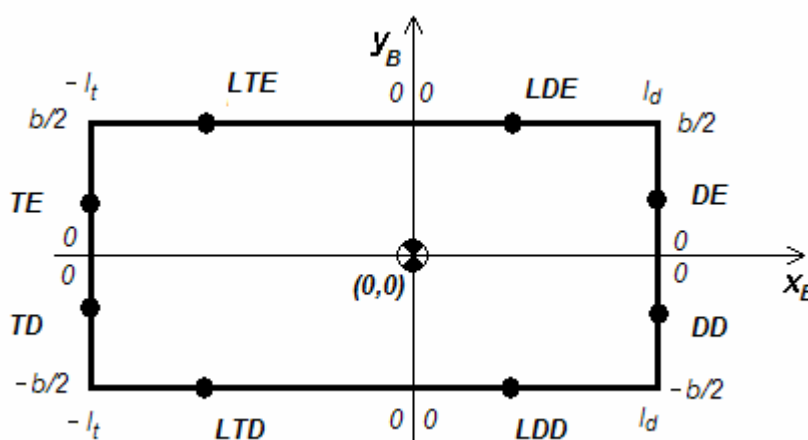


Figura 12 - Posições possíveis dos pontos sobre as diferentes regiões.



REGIÃO ATINGIDA	Fixados $x_{IB}, x_{IB}, y_{IB}$	Solução p/ $y_{IB}$	Fixados $y_{IB}, x_{IB}, y_{IB}$	Solução p/ $x_{IB}$
DE	$0 \leq y_{IB} \leq b/2$ $x_{IB} = l_d$ $x_{IB} = l_d$	$y_{IB} = y_{IB} + A_A$ $y_{IB} \leq y_{IB} \leq b/2$	----	----
LDE_DE	$0 \leq x_{IB} \leq l_d$ $y_{IB} = b/2$ $x_{IB} = l_d$	$y_{IB} = y_{IB} -$ $-\sqrt{A_A^2 - (x_{IB} - x_{IB})^2}$ $0 \leq y_{IB} < b/2$	----	----
LDE	----	----	$0 \leq x_{IB} \leq l_d$ $y_{IB} = b/2$ $y_{IB} = b/2$	$x_{IB} = x_{IB} + A_A$ $x_{IB} \leq x_{IB} \leq l_d$
LTE_LDE	----	----	$-l_t \leq x_{IB} \leq 0$ $y_{IB} = b/2$ $y_{IB} = b/2$	$x_{IB} = x_{IB} + A_A$ $0 \leq x_{IB} \leq l_d$
LTE	----	----	$-l_t \leq x_{IB} \leq 0$ $y_{IB} = b/2$ $y_{IB} = b/2$	$x_{IB} = x_{IB} + A_A$ $x_{IB} \leq x_{IB} \leq 0$
TE_LTE	----	----	$0 \leq y_{IB} \leq b/2$ $x_{IB} = -l_t$ $y_{IB} = b/2$	$x_{IB} = x_{IB} +$ $+\sqrt{A_A^2 - (y_{IB} - y_{IB})^2}$ $-l_t < x_{IB} \leq 0$
TE	$0 \leq y_{IB} \leq b/2$ $x_{IB} = -l_t$ $x_{IB} = -l_t$	$y_{IB} = y_{IB} + A_A$ $y_{IB} \leq y_{IB} \leq b/2$	----	----
TD_TE	$-b/2 \leq y_{IB} \leq 0$ $x_{IB} = -l_t$ $x_{IB} = -l_t$	$y_{IB} = y_{IB} + A_A$ $0 \leq y_{IB} \leq b/2$	----	----
TD	$-b/2 \leq y_{IB} \leq 0$ $x_{IB} = -l_t$ $x_{IB} = -l_t$	$y_{IB} = y_{IB} + A_A$ $y_{IB} \leq y_{IB} \leq 0$	----	----
TD_LTD	----	----	$-b/2 \leq y_{IB} \leq 0$ $x_{IB} = -l_t$ $y_{IB} = -b/2$	$x_{IB} = x_{IB} +$ $+\sqrt{A_A^2 - (y_{IB} - y_{IB})^2}$ $-l_t < x_{IB} \leq 0$
LTD	----	----	$-l_t \leq x_{IB} \leq 0$ $y_{IB} = -b/2$ $y_{IB} = -b/2$	$x_{IB} = x_{IB} + A_A$ $x_{IB} \leq x_{IB} \leq 0$
LTD_LDD	----	----	$-l_t \leq x_{IB} \leq 0$ $y_{IB} = -b/2$ $y_{IB} = -b/2$	$x_{IB} = x_{IB} + A_A$ $0 \leq x_{IB} \leq l_d$
LDD	----	----	$0 \leq x_{IB} \leq l_d$ $y_{IB} = -b/2$ $y_{IB} = -b/2$	$x_{IB} = x_{IB} + A_A$ $x_{IB} \leq x_{IB} \leq l_d$
LDD_DD	$0 \leq x_{IB} \leq l_d$ $y_{IB} = -b/2$ $x_{IB} = l_d$	$y_{IB} = y_{IB} +$ $+\sqrt{A_A^2 - (x_{IB} - x_{IB})^2}$ $-b/2 < y_{IB} \leq 0$	----	----
DD	$-b/2 \leq y_{IB} \leq 0$ $x_{IB} = l_d$ $x_{IB} = l_d$	$y_{IB} = y_{IB} + A_A$ $y_{IB} \leq y_{IB} \leq 0$	----	----
DD_DE	$-b/2 \leq y_{IB} \leq 0$ $x_{IB} = l_d$ $x_{IB} = l_d$	$y_{IB} = y_{IB} + A_A$ $0 \leq y_{IB} \leq b/2$	----	----

Tabela 2 - Escolha das coordenadas para igualdade das áreas nos veículos

Obtidos os pontos que definem a região atingida em ambos os veículos, a origem do referencial da colisão é o ponto médio da área de contato. Portanto sua localização no referencial do veículo A, para a configuração da Figura 13, é dada por

$$x_m = x_i + \frac{(x_f - x_i)}{2}$$

$$y_m = y_f + \frac{(y_i - y_f)}{2}$$

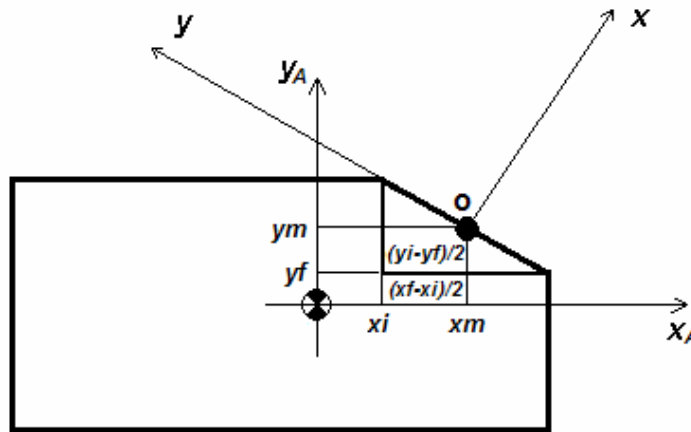


Figura 13 - Posição da Origem do Referencial da Colisão

Com os ângulos do sistema de referência da colisão em relação aos sistemas locais dos veículos determinados, deve-se obter a posição dos respectivos Centros de Massa (CM) no referencial local, assim como as projeções das velocidades absolutas do CM. A Figura 14 mostra a seqüência de transformações para representar um vetor do referencial local no referencial da colisão. Inicialmente tem-se uma translação \$(x\_m, y\_m)\$ passando do referencial \$(x\_A, y\_A)\$ para o referencial \$(x', y')\$, e em seguida uma rotação de ângulo \$\phi\_A^C\$ passando do referencial \$(x', y')\$ para o referencial \$(x, y)\$.

Assim um vetor fixo no referencial local é transformado para o referencial da colisão através de

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_A^C & \text{sen}\phi_A^C \\ -\text{sen}\phi_A^C & \cos\phi_A^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A - x_m \\ y_A - y_m \end{bmatrix}$$

e deste modo, o CM localizado na origem do referencial local, \$x\_A = 0\$ e \$y\_A = 0\$, é dado no referencial da colisão por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi_A^C & -\text{sen}\phi_A^C \\ \text{sen}\phi_A^C & -\cos\phi_A^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix}$$

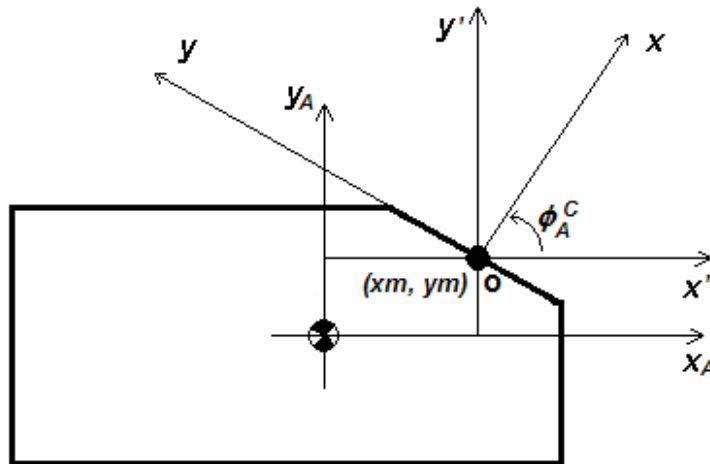


Figura 14 - Referencial Local para o Referencial da Colisão

Para os vetores livres, como a velocidade absoluta do CM representada no referencial local por  $\vec{V}_A = u_A \vec{i}_A + v_A \vec{j}_A$ , tem-se que sua projeção no referencial da colisão é dada por

$$\begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_A^C & \text{sen}\phi_A^C \\ -\text{sen}\phi_A^C & \cos\phi_A^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \end{bmatrix}$$

e para a transformação inversa, do referencial da colisão para o referencial local dos veículos, tem-se

$$\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_A^C & -\text{sen}\phi_A^C \\ \text{sen}\phi_A^C & \cos\phi_A^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix}$$

A Figura 15 mostra as transformações de coordenadas realizadas para representar a posição do CM e a velocidade de translação absoluta do veículo, dados inicialmente no referencial local, para o referencial da colisão.

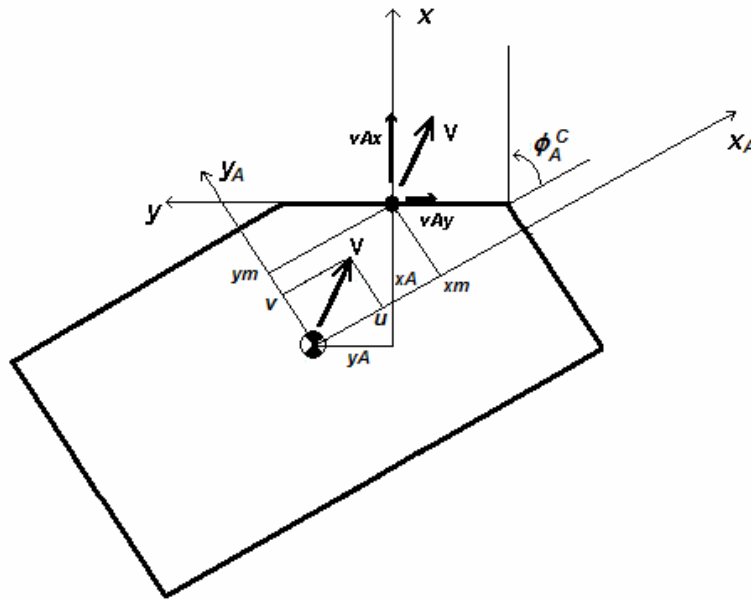


Figura 15 - Transformações de Coordenadas do Referencial Local para o da Colisão

**2.3.3. Solução do Problema da Colisão no Referencial da Colisão**

Uma vez determinado o referencial da colisão, deve-se estabelecer a posição dos respectivos centros de massa em relação a esse sistema de referência, e projetar suas velocidades de translação imediatamente antes da colisão, para resolver o problema da colisão. Lembra-se que as velocidades angulares são mantidas inalteradas, dado que o problema é plano.

Sendo o centro do referencial da colisão no sistema de referência local do veículo A dado por  $(x_{mA}, y_{mA})$ , então a posição do centro de massa do veículo A no referencial da colisão é

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi_A^C & -\text{sen}\phi_A^C \\ \text{sen}\phi_A^C & -\cos\phi_A^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mA} \\ y_{mA} \end{bmatrix}$$

e para o veículo B, determinado o centro do referencial da colisão no sistema local, dado por  $(x_{mB}, y_{mB})$ , então o centro de massa está na posição

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi_B^C & -\text{sen}\phi_B^C \\ \text{sen}\phi_B^C & -\cos\phi_B^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mB} \\ y_{mB} \end{bmatrix}$$

Para as velocidades antes da colisão tem-se

$$\begin{bmatrix} v_{Ax1} \\ v_{Ay1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_A^C & \text{sen}\phi_A^C \\ -\text{sen}\phi_A^C & \cos\phi_A^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{A1} \\ v_{A1} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} v_{Bx1} \\ v_{By1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_B^C & \text{sen}\phi_B^C \\ -\text{sen}\phi_B^C & \cos\phi_B^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{B1} \\ v_{B1} \end{bmatrix}$$

Lembra-se que os momentos de inércia em relação ao eixo vertical empregados no modelo de colisão são tomados no sistema de referência local, e portanto não devem sofrer qualquer alteração.

A partir da determinação das variáveis imediatamente anteriores ao choque no referencial da colisão, dadas as tais condições nos respectivos referenciais locais dos veículos, o problema direto é resolvido pela forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_{Ax2} \\ v_{Ay2} \\ v_{Bx2} \\ v_{By2} \\ \omega_{A2} \\ \omega_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\ m_A(y_A - \lambda x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\ 0 & 0 & m_B(y_B - \lambda x_B) & 0 & 0 & -J_B \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -y_A & y_B \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\ m_A(y_A - \lambda x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\ 0 & 0 & m_B(y_B - \lambda x_B) & 0 & 0 & -J_B \\ e & 0 & -e & 0 & e y_A & -e y_B \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ax1} \\ v_{Ay1} \\ v_{Bx1} \\ v_{By1} \\ \omega_{A1} \\ \omega_{B1} \end{bmatrix}$$

na qual  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$ , e  $(v_{Ax1}, v_{Ay1})$  e  $(v_{Bx1}, v_{By1})$  são obtidos como descrito.

Após a solução do problema acima, para a representação das variáveis pós-colisão – velocidades de translação do CM,  $(v_{Ax2}, v_{Ay2})$  e  $(v_{Bx2}, v_{By2})$  – no referencial local dos veículos basta aplicar a transformação inversa

$$\begin{bmatrix} u_{A2} \\ v_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_A^C & -\text{sen}\phi_A^C \\ \text{sen}\phi_A^C & \cos\phi_A^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ax2} \\ v_{Ay2} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} u_{B2} \\ v_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_B^C & -\text{sen}\phi_B^C \\ \text{sen}\phi_B^C & \cos\phi_B^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Bx2} \\ v_{By2} \end{bmatrix}$$

Lembra-se que as velocidades angulares pós-colisão não sofrem alteração quando da mudança de referenciais.

Uma vez determinadas essas variáveis, pode-se proceder a simulação do comportamento dinâmico dos veículos desde o instante imediatamente após a colisão, até a parada completa, sujeito às condições iniciais de velocidade.

#### 2.3.4. Posição e Orientação dos Veículos no Referencial Global

Nos casos de reconstituição de acidentes, normalmente o que se conhece é a posição aproximada dos veículos na via no instante do choque, que pode ser estabelecida em relação a um referencial, definido aqui como global. Admitindo que o ponto conhecido é a posição da origem do referencial da colisão em relação ao referencial global,  $(p_x, p_y)$ , e dados os ângulos dos veículos ( $\phi_A^G$  e  $\phi_B^G$ ), a posição dos CM nesse sistema de referência pode ser determinada, de modo a corretamente tratar o problema pós-colisão. Para tanto, deve-se proceder a uma transformação de coordenadas a fim de localizar o referencial de cada veículo em relação ao referencial global. A Figura 16 apresenta as operações necessárias para o posicionamento dos CM e orientação inicial dos veículos.

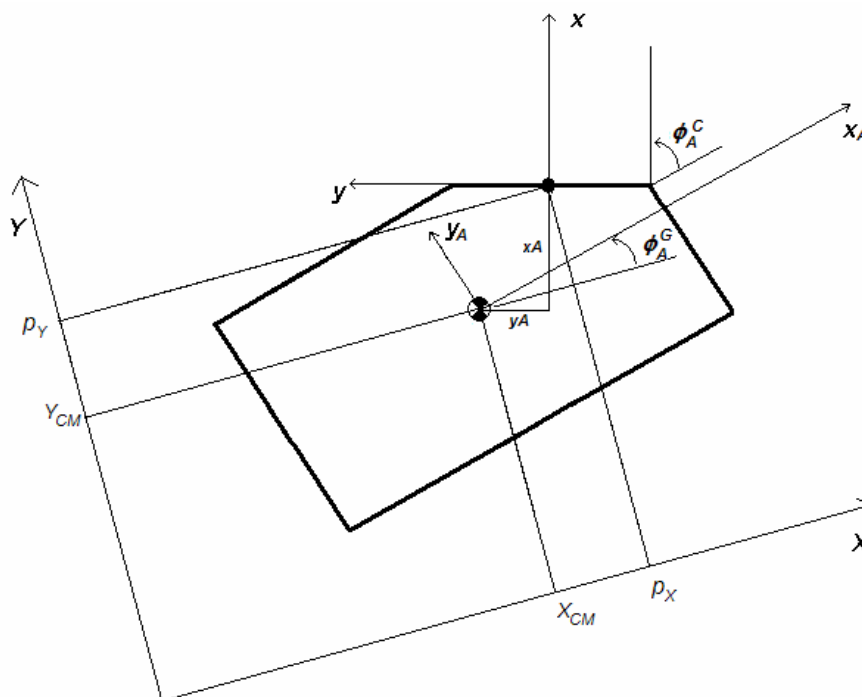


Figura 16 - Posição e Orientação dos Veículos no Referencial Global

Um vetor fixo no referencial da colisão é transformado para o referencial global através de

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_A^C + \phi_A^G) & -\text{sen}(\phi_A^C + \phi_A^G) \\ \text{sen}(\phi_A^C + \phi_A^G) & \cos(\phi_A^C + \phi_A^G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

logo, dadas as posições dos centros de massa no referencial da colisão no instante imediatamente anterior ao choque, suas posições no referencial global são determinadas por

$$\begin{bmatrix} X_{CMA} \\ Y_{CMA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_A^C + \phi_A^G) & -\text{sen}(\phi_A^C + \phi_A^G) \\ \text{sen}(\phi_A^C + \phi_A^G) & \cos(\phi_A^C + \phi_A^G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{CMB} \\ Y_{CMB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_B^C + \phi_B^G) & -\text{sen}(\phi_B^C + \phi_B^G) \\ \text{sen}(\phi_B^C + \phi_B^G) & \cos(\phi_B^C + \phi_B^G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

que serão condições iniciais para definição da trajetória dos veículos no pós-colisão. Para determinação da atitude dos veículos, os ângulos iniciais serão  $\phi_A^G$  e  $\phi_B^G$ .

## 2.4. Modelo Pós-Choque

Descreve-se a seguir o desenvolvimento de um modelo genérico para representar a dinâmica no plano de um veículo rígido para análise de seus movimentos (translação em relação a dois eixos e rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano de translação) na condição pós-colisão, desde o momento logo após o choque até sua parada completa, a partir das variáveis imediatamente posteriores ao impacto, obtidas por um modelo rígido (baseado na conservação de quantidade de movimento) ou flexível (baseado nas características elasto-plásticas de sua estrutura), dadas as condições imediatamente anteriores à colisão, como explanado no item anterior.

### 2.4.1. Dinâmica do Veículo no Referencial Local

A Figura 17 mostra os referenciais – global  $(X,Y)$  e local  $(x,y)$  – adotados para o tratamento do problema dinâmico de um veículo no plano, e alguns dos parâmetros relevantes para sua análise: as bitolas dianteira e traseira ( $b_d$  e  $b_t$ ) e as distâncias dos eixos dianteiro e traseiro ( $l_d$  e  $l_t$ ) ao centro de massa (CM). A distância entre eixos é dada por  $l = l_d + l_t$ .

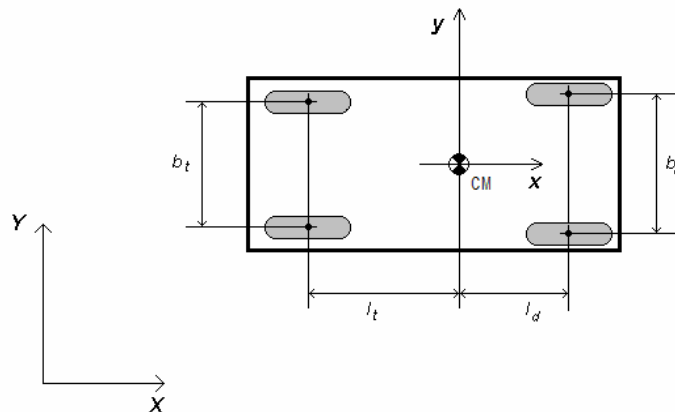


Figura 17 - Sistemas de referência global e local de um veículo terrestre

De modo a tratar corretamente o comportamento do veículo após a colisão, deve-se adotar um modelo que represente seus movimentos empregando as equações de Newton-Euler simplificadas, para deslocamentos no plano, dadas por



$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{m} \sum F_x + v\omega \\ \dot{v} = \frac{1}{m} \sum F_y - u\omega \\ \dot{\omega} = \frac{1}{J_{zz}} \sum M_z \end{cases}$$

onde  $u$  é a velocidade longitudinal local (ao longo de  $x$ ),  $v$  é a velocidade lateral local (ao longo de  $y$ ),  $\omega$  é a velocidade angular (em torno de  $z$ , perpendicular ao plano de movimento, passando pelo CM),  $m$  e  $J_{zz}$  são, respectivamente, a massa e o momento de inércia em torno de  $z$ , e  $F_x$ ,  $F_y$ , e  $M_z$  as forças e o momento aplicados ao veículo, projetados nos eixos do sistema de referência local. Note a não linearidade intrínseca deste modelo, no qual há um acoplamento dos movimentos de translação, devido ao movimento de rotação.

Como se está interessado na translação do centro de massa em relação ao referencial inercial global, então se deve proceder a uma mudança de coordenadas, dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi \\ \text{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

com

$$\psi = \psi_0 + \int (\omega + \omega_0) dt$$

e

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \int (\dot{X} + \dot{X}_0) dt = \int ((u \cos\psi - v \text{sen}\psi) + \dot{X}_0) dt \\ Y &= Y_0 + \int (\dot{Y} + \dot{Y}_0) dt = \int ((u \text{sen}\psi + v \cos\psi) + \dot{Y}_0) dt \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \int \dot{X} dt = \int ((u + u_0) \cos\psi - (v + v_0) \text{sen}\psi) dt \\ Y &= Y_0 + \int \dot{Y} dt = \int ((u + u_0) \text{sen}\psi + (v + v_0) \cos\psi) dt \end{aligned}$$

onde  $\dot{X}$  e  $\dot{Y}$  são as velocidades de translação absolutas no referencial global,  $\psi$  é o ângulo de guinada, e  $\psi_0$ ,  $X_0$ , e  $Y_0$  são, respectivamente, as condições iniciais de orientação e posição do veículo, e  $\omega_0$ ,  $\dot{X}_0$  e  $\dot{Y}_0$ , aquelas de velocidade, no referencial global, e  $u_0$  e  $v_0$ , no referencial local.

Para a solução deste modelo é preciso determinar as forças e o momento aplicados ao veículo, que, em uma condição como a de uma colisão, são extremamente complexos de se obter. Lembre-se que neste caso o veículo encontra-se normalmente sem controle, sujeito basicamente ao atrito dos pneus com o solo e às forças aerodinâmicas. Em veículos de passeio essas forças são de pequena amplitude, pois as velocidades normalmente são baixas (menores que 60 km/h), mas podem ser elevadas em veículos esportivos e de competição, com velocidades acima de 100 km/h. Apesar da força de atrito poder ser limitada em módulo, possui direção que depende do movimento instantâneo do veículo, o mesmo ocorrendo com as forças aerodinâmicas. Deve-se lembrar ainda que o momento será obtido por uma combinação das forças de atrito dos pneus dianteiros e traseiros, em função da distância entre eixos e das bitolas. Um problema similar ocorre para o momento causado pelas forças aerodinâmicas, quando essas são significativas, levando em conta a posição dos centros de pressão em cada direção, que, por sua vez, são determinados por modelos não triviais. Por estes motivos, é bastante complicado tratar o problema da pós-colisão a partir de uma formulação completa e detalhada. Desenvolve-se a seguir um modelo adequado aos objetivos da análise que se pretende realizar, iniciando com a cinemática do movimento dos pneus.

#### 2.4.2. Velocidades de Translação dos Pneus

Considerando o veículo se deslocando no plano  $XY$ , como o mostrado na Figura 18, os pontos de contato dos pneus com o solo  $p_{DD}$ ,  $p_{DE}$ ,  $p_{TD}$  e  $p_{TE}$  têm coordenadas no referencial local definidas por

$$\vec{r}_{DD} = \begin{bmatrix} l_d \\ -b_d/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{DE} = \begin{bmatrix} l_d \\ b_d/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{TD} = \begin{bmatrix} -l_t \\ -b_t/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{TE} = \begin{bmatrix} -l_t \\ b_t/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

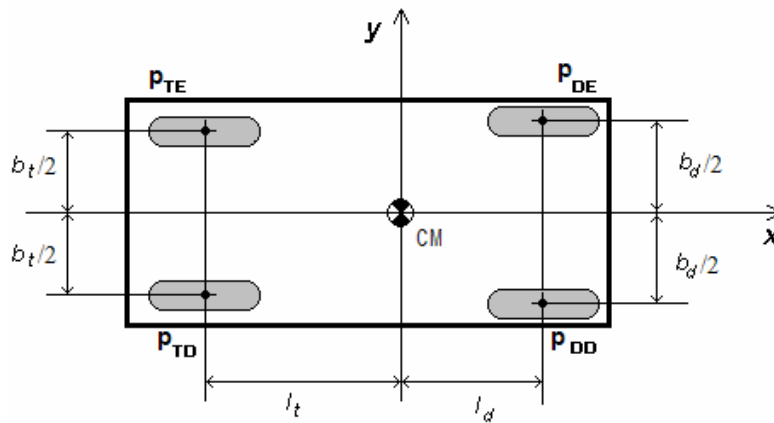


Figura 18 - Posição dos pontos de contato dos pneus com o solo

Admitindo que não há qualquer tendência do veículo se deslocar verticalmente, e que não há movimento de *pitch*, nem de *roll*, então a velocidade de translação de um determinado ponto do veículo no referencial local é dada por

$$\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i$$

ou

$$\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i = \begin{bmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \\ V_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - \omega y_i \\ v + \omega x_i \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \vec{V} - \vec{r}_i \times \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \\ V_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_i \\ 0 & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y_i \\ 0 & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

o que leva às velocidades dos pontos de contato serem

$$\vec{V}_{DD} = \begin{bmatrix} V_{DD,x} \\ V_{DD,y} \\ V_{DD,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_d/2 \\ 0 & 0 & l_d \\ -b_d/2 & -l_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + \frac{b_d}{2} \omega \\ v + l_d \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_{DE} = \begin{bmatrix} V_{DE,x} \\ V_{DE,y} \\ V_{DE,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_d/2 \\ 0 & 0 & l_d \\ b_d/2 & -l_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - \frac{b_d}{2} \omega \\ v + l_d \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_{TD} = \begin{bmatrix} V_{TD,x} \\ V_{TD,y} \\ V_{TD,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_t/2 \\ 0 & 0 & -l_t \\ -b_t/2 & l_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + \frac{b_t}{2} \omega \\ v - l_t \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_{TE} = \begin{bmatrix} V_{TE,x} \\ V_{TE,y} \\ V_{TE,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_t/2 \\ 0 & 0 & -l_t \\ b_t/2 & l_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - \frac{b_t}{2} \omega \\ v - l_t \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

A Figura 19 mostra os pontos de contato e as velocidades associadas em uma determinada condição de velocidades do CM e de rotação em torno do eixo vertical, e as suas componentes ( $V_{IJ,x}$   $V_{IJ,y}$ ), que fornecem a direção da velocidade instantânea, de acordo com o vetor unitário

$$\vec{u}_{IJ} = \frac{\vec{V}_{IJ}}{|\vec{V}_{IJ}|} = \frac{1}{\sqrt{V_{IJ,x}^2 + V_{IJ,y}^2}} \begin{bmatrix} V_{IJ,x} \\ V_{IJ,y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{IJ,x} \\ u_{IJ,y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde os índices IJ = DD, DE,TD, TE identificam a roda em questão.

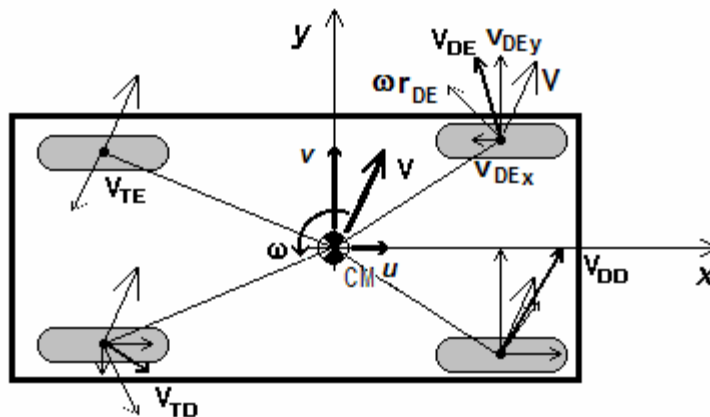


Figura 19 – Velocidades dos pontos de contato dos pneus com o solo

### 2.4.3. Forças e Momentos

As configurações genéricas da Figura 20 apresentam as velocidades instantâneas do veículo e dos pneus, as forças e momento aerodinâmicos, e forças de atrito no sentido contrário ao do movimento instantâneo da roda, assim como suas componentes no referencial local. Considerou-se que as forças aerodinâmicas estão aplicadas diretamente no CM e o momento aerodinâmico é o resultante em relação ao eixo vertical, não se levando em conta a posição do centro de pressão, por razões óbvias, adotando um modelo simplificado discutido adiante.

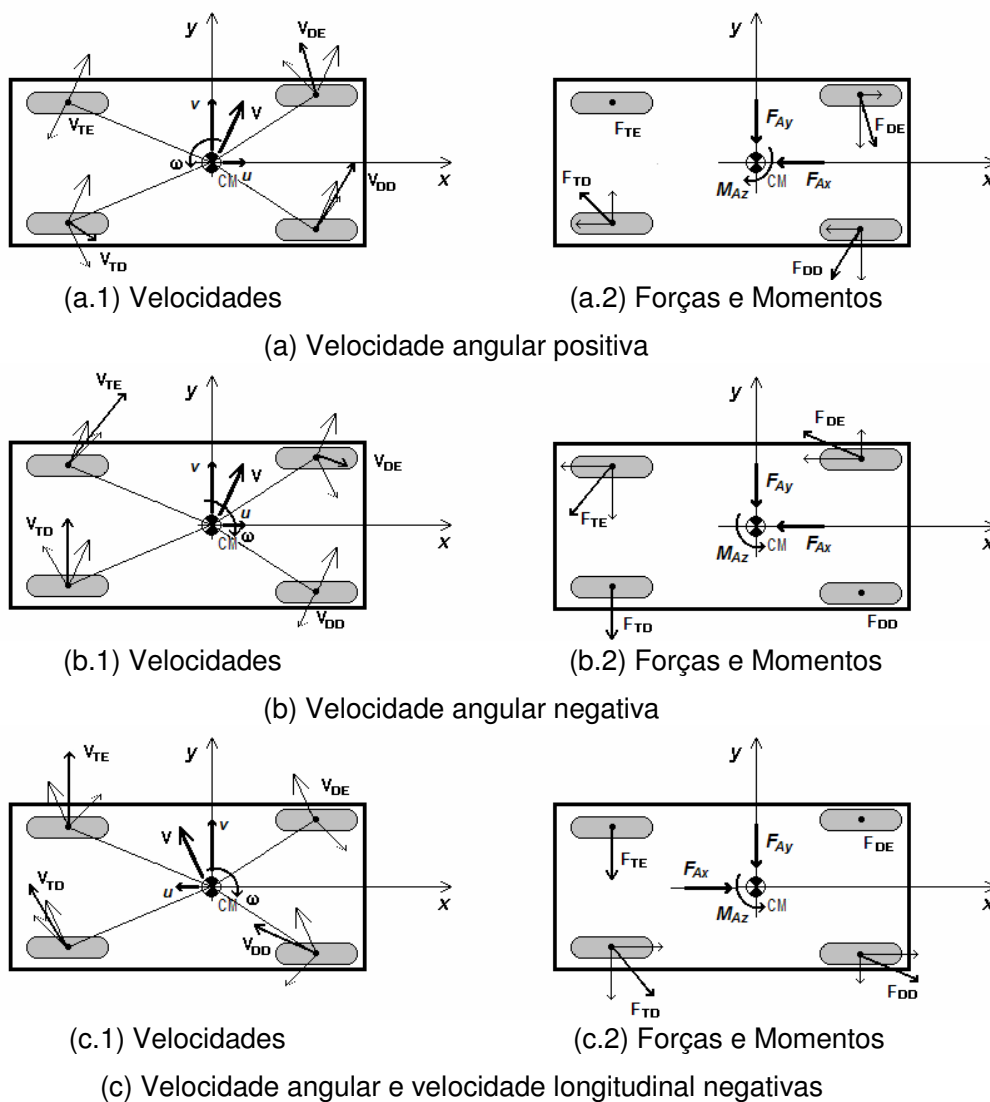


Figura 20 - Velocidades, forças e momentos em algum instante após a colisão

Notam-se na Figura 20 alguns aspectos interessantes do problema a ser tratado, a saber:

- As velocidades instantâneas dos pontos de contato dos pneus com o solo, que dependem da combinação dos movimentos de translação do centro de massa e da rotação do veículo em torno do eixo vertical que passa pelo centro de massa, podem ter qualquer direção, ou sentido, inclusive serem nulas (como aproximadamente nos casos de  $V_{TE}$  para a velocidade angular positiva,  $V_{DD}$  para a velocidade angular negativa, e  $V_{DE}$  para as velocidades angular e longitudinal negativas);
- As forças de atrito, que se encontram sempre no sentido contrário ao da velocidade do ponto de contato dos pneus com o solo, podem localmente ter componentes no sentido do movimento do veículo, porém certamente geram um somatório de forças no sentido contrário ao do movimento de translação do CM;
- O somatório dos momentos gerados pelas forças de atrito sempre estará no sentido contrário ao do movimento de rotação do veículo;
- As forças e o momento aerodinâmicos sempre se encontram nos sentidos contrários aos dos movimentos do veículo.

Devido à complexidade deste problema, e considerando as observações acima, procurou-se estabelecer um modelo simplificado para a determinação das forças, e conseqüentemente do movimento do veículo após a colisão, principalmente levando em conta o interesse da análise que se pretende fazer.

As forças de atrito que surgem nos pneus dependem fundamentalmente da velocidade em que eles se encontram, e existem três possibilidades para o movimento dos pneus em relação ao solo: ou eles estão travados e deslizam sobre a superfície, ou rolam livremente sem deslizar, ou ainda possuem um movimento que depende do ângulo de esterçamento em relação ao movimento do veículo, do deslizamento longitudinal e do ângulo de deriva instantâneos do pneu. Tais condições podem ser determinadas a partir da avaliação preliminar do acidente que se deseja investigar. No primeiro caso o coeficiente de aderência estará associado ao atrito dinâmico da interação pneu-solo (em torno de 0,7 para pneus convencionais de veículos de passeio), no segundo ao coeficiente de atrito de rolamento (cerca de 0,01 para pneus comuns), e no terceiro, à curva de aderência característica do pneu. Estas condições, dependem individualmente de cada pneu, e da sua direção de movimento instantânea, em relação ao deslocamento do veículo.

No modelo adotado, que não inclui o movimento de rotação das rodas – *spin*, apenas uma possibilidade será admissível: os pneus se encontram travados. Por simplificação, não será considerado o caso dos pneus rolarem

livremente já que só ocorre se eles, a cada instante de tempo, se encontrarem na direção de movimento do ponto de contato com o solo, o que só será possível em rodas esterçantes, sem o controle do motorista, ou em qualquer roda se os seus elementos de conexão estiverem danificados ou rompidos. A hipótese de um movimento mais complexo também não será considerada, mas poderia ser tratado através de uma representação simplificada da curva característica do pneu, em função do ângulo de deriva, dado pela diferença da direção do movimento do veículo e da direção do movimento do pneu.

Supondo que as rodas não se encontram esterçadas, considerando que todas estão travadas, arrastadas pelo veículo, a força de atrito, sem levar em conta a distribuição de carga instantânea em cada pneu, ou mesmo a distribuição estática, é dada aproximadamente por

$$\vec{F}_{IJ} \cong -\frac{\mu mg}{4} \vec{u}_{IJ}$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito dinâmico,  $\mu \cong 0,7$ , e os índices IJ = DD, DE, TD, TE, identificam a roda em questão. Note que as forças  $\vec{F}_{IJ}$  são constantes em módulo, mas não em direção, e possuem sentido contrário ao do movimento das rodas, cuja direção é dada pelo vetor unitário  $\vec{u}_{IJ}$ .

Uma vez que

$$\vec{u}_{IJ} = \frac{\vec{V}_{IJ}}{|\vec{V}_{IJ}|} = \frac{1}{\sqrt{V_{IJ,x}^2 + V_{IJ,y}^2}} \begin{bmatrix} V_{IJ,x} \\ V_{IJ,y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{IJ,x} \\ u_{IJ,y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

logo

$$\vec{F}_{IJ} = \begin{bmatrix} F_{IJ,x} \\ F_{IJ,y} \\ 0 \end{bmatrix} \cong -\frac{\mu mg}{4} \frac{1}{\sqrt{V_{IJ,x}^2 + V_{IJ,y}^2}} \begin{bmatrix} V_{IJ,x} \\ V_{IJ,y} \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\mu mg}{4} \begin{bmatrix} u_{IJ,x} \\ u_{IJ,y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim o somatório de forças de atrito por componente, no sistema de referência local, é dado por

$$\sum F_{atrito,x} = F_{DD,x} + F_{DE,x} + F_{TD,x} + F_{TE,x} = -\frac{\mu mg}{4} \sum_{IJ=DD,\dots,TE} \frac{V_{IJ,x}}{\sqrt{V_{IJ,x}^2 + V_{IJ,y}^2}} = -\frac{\mu mg}{4} \sum_{IJ=DD,\dots,TE} u_{IJ,x}$$

$$\sum F_{atrito,y} = F_{DD,y} + F_{DE,y} + F_{TD,y} + F_{TE,y} = -\frac{\mu mg}{4} \sum_{IJ=DD,\dots,TE} \frac{V_{IJ,y}}{\sqrt{V_{IJ,x}^2 + V_{IJ,y}^2}} = -\frac{\mu mg}{4} \sum_{IJ=DD,\dots,TE} u_{IJ,y}$$

Para os momentos, deve-se considerar a posição dos pontos de contato dos pneus com o solo, lembrando que

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_i \\ 0 & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ 0 \end{bmatrix} = \sum (F_{yi}x_i - F_{xi}y_i)$$

têm-se apenas momentos em relação ao eixo vertical z, com era de se esperar.

Assim, como

$$\vec{r}_{DD} = \begin{bmatrix} l_d \\ -b_d/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{DE} = \begin{bmatrix} l_d \\ b_d/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{TD} = \begin{bmatrix} -l_t \\ -b_t/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{TE} = \begin{bmatrix} -l_t \\ b_t/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} \sum M_{atrito,z} &= F_{DD,y}l_d + F_{DE,y}l_d - F_{TD,y}l_t - F_{TE,y}l_t + F_{DD,x}\frac{b_d}{2} - F_{DE,x}\frac{b_d}{2} + F_{TD,x}\frac{b_t}{2} - F_{TE,x}\frac{b_t}{2} = \\ &= (F_{DD,x} - F_{DE,x})\frac{b_d}{2} + (F_{TD,x} - F_{TE,x})\frac{b_t}{2} + (F_{DD,y} + F_{DE,y})l_d - (F_{TD,y} + F_{TE,y})l_t = \\ &= -\frac{\mu mg}{4}((u_{DD,x} - u_{DE,x})\frac{b_d}{2} + (u_{TD,x} - u_{TE,x})\frac{b_t}{2} + (u_{DD,y} + u_{DE,y})l_d - (u_{TD,y} + u_{TE,y})l_t) \end{aligned}$$

Já para as forças e momento aerodinâmicos, podem-se levar em conta as relativamente baixas velocidades que se encontram os veículos de passeio após uma colisão, condição esta, entretanto, não satisfeita para veículos esportivos ou de competição. Em velocidades acima de 60 km/h, as forças e momento aerodinâmicos são dados por

$$F_{Ax} = -\frac{1}{2}\rho C_x S u^2$$

$$F_{Ay} = -\frac{1}{2}\rho C_y S v^2$$

$$M_{Az} = -\frac{1}{2}\rho C_{Mz} S l \omega^2$$



onde  $\rho \cong 1,20 \text{ kg/m}^3$  (nas CNTP) é a massa específica do ar,  $C_x$  é o coeficiente de arrasto longitudinal ( $\approx 0,3$  para carros de passeio médios/pequenos),  $S$  é a área frontal ( $\approx 2,0 \text{ m}^2$  para veículos médios/pequenos),  $C_y$  é o coeficiente de arrasto lateral ( $\approx 0,8$  para veículos médios/pequenos),  $C_{Mz}$  é o coeficiente de momento de guinada – em torno de  $z$  ( $\approx 0,2$  para veículos médios/pequenos), e  $l$  é um comprimento característico, que para o caso do movimento de guinada, é geralmente adotada a distância entre eixos do veículo, em metros. Nota-se que  $C_y$  e  $C_{Mz}$  dependem do ângulo de ataque (entre a velocidade do veículo e a do vento relativo) e da razão entre a área lateral e a frontal do veículo, porém aqui serão supostos constantes, tomando um ângulo máximo de  $20^\circ$  ( $\approx 0,35 \text{ rad}$ ), e a razão de áreas 3:1.

Considerando pequenas velocidades, pode-se empregar uma representação aproximada para a ação aerodinâmica sobre o veículo. Adotando um modelo conservativo, as expressões quadráticas serão substituídas pela secante, desde zero até as velocidades máximas do veículo – nas três direções, que serão sempre aquelas imediatamente após o choque ( $u_0$ ,  $v_0$ , e  $\omega_0$ ). Assim, tem-se

$$F_{Ax} \cong -\left(\frac{1}{2} \rho C_x S u_0\right) u = -b_{Ax} u$$

$$F_{Ay} \cong -\left(\frac{1}{2} \rho C_y S v_0\right) v = -b_{Ay} v$$

$$M_{Az} \cong -\left(\frac{1}{2} \rho C_{Mz} S l \omega_0\right) \omega = -b_{Az} \omega$$

que caracterizam um efeito equivalente de atrito viscoso para os três movimentos, aumentando o “amortecimento” do sistema.

Deste modo, as equações dinâmicas após a colisão ficam

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{m} \sum F_x + v\omega = \frac{1}{m} (F_{\text{atrito},x} + F_{Ax}) + v\omega \\ \dot{v} = \frac{1}{m} \sum F_y - u\omega = \frac{1}{m} (F_{\text{atrito},y} + F_{Ay}) - u\omega \\ \dot{\omega} = \frac{1}{J_{zz}} \sum M_z = \frac{1}{J_{zz}} (M_{\text{atrito},z} + M_{Az}) \end{cases}$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{m} \left( -\frac{\mu mg}{4} \sum_{IJ=DD,\dots,TE} \frac{V_{IJ,x}}{\sqrt{V_{IJ,x}^2 + V_{IJ,y}^2}} - b_{Ay} u \right) + v \omega \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} \left( -\frac{\mu mg}{4} \sum_{IJ=DD,\dots,TE} \frac{V_{IJ,y}}{\sqrt{V_{IJ,x}^2 + V_{IJ,y}^2}} - b_{Ay} v \right) - u \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J_{zz}} \left( (F_{DD,x} - F_{DE,x}) \frac{b_d}{2} + (F_{TD,x} - F_{TE,x}) \frac{b_t}{2} + (F_{DD,y} + F_{DE,y}) l_d - (F_{TD,y} + F_{TE,y}) l_t - b_{Az} \omega \right) \end{aligned} \right.$$

ou ainda

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\mu g}{4} \left( \sum_{IJ=DD,\dots,TE} u_{IJ,x} \right) - \frac{b_{Ay}}{m} u + v \omega \\ \dot{v} &= -\frac{\mu g}{4} \left( \sum_{IJ=DD,\dots,TE} u_{IJ,y} \right) - \frac{b_{Ay}}{m} v - u \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{\mu g}{4r_{zz}^2} \left( (u_{DD,x} - u_{DE,x}) \frac{b_d}{2} + (u_{TD,x} - u_{TE,x}) \frac{b_t}{2} + (u_{DD,y} + u_{DE,y}) l_d - (u_{TD,y} + u_{TE,y}) l_t \right) - \frac{b_{Az}}{J_{zz}} \omega \end{aligned} \right.$$

Observando que  $\mu g$  é a capacidade máxima de desaceleração do veículo na direção de movimento, que depende apenas do atrito dos pneus com o solo, e lembrando que  $J_{zz} = r_{zz}^2 m$ , onde  $r_{zz}$  é o raio de giração em torno de Z, tem-se  $\mu g / r_{zz}^2$  é a capacidade máxima de desaceleração angular do veículo, que depende da sua geometria e distribuição de massa. Finalmente têm-se as equações de movimento do veículo no referencial local dadas por

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\mu g}{4} (u_{DD,x} + u_{DE,x} + u_{TD,x} + u_{TE,x}) - \frac{b_{Ay}}{m} u + v \omega \\ \dot{v} &= -\frac{\mu g}{4} (u_{DD,y} + u_{DE,y} + u_{TD,y} + u_{TE,y}) - \frac{b_{Ay}}{m} v - u \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{\mu g}{4r_{zz}^2} \left( (u_{DD,x} - u_{DE,x}) \frac{b_d}{2} + (u_{TD,x} - u_{TE,x}) \frac{b_t}{2} + (u_{DD,y} + u_{DE,y}) l_d - (u_{TD,y} + u_{TE,y}) l_t \right) - \frac{b_{Az}}{J_{zz}} \omega \end{aligned} \right.$$

onde cada pneu contribui com uma parcela de  $1/4$  do total máximo das forças longitudinal e lateral – ou das correspondentes desacelerações, ponderadas pelos termos  $u_{IJ,i}$  associados à direção de seus movimentos instantâneos, que representam, na verdade, as projeções das forças de atrito nas direções x e y do referencial local, de modo a gerar uma resultante no sentido contrário ao da translação do veículo em ambos os eixos, que, como mostrado na Figura 19, podem conter parcelas que se compensem mutuamente, ou mesmo que estejam no mesmo sentido do movimento.

Quanto ao momento das forças de atrito, além de cada pneu contribuir também com  $1/4$  da capacidade total máxima de desaceleração angular, tem-se a

influência das bitolas dianteira e traseira, e das distâncias dos eixos dianteiros e traseiros ao CM, ponderadas pelos termos  $u_{j,j}$ , com sinais associados ao movimento instantâneo local do pneu, de modo a gerar uma resultante no sentido contrário ao da rotação do veículo, que possui parcelas sempre no mesmo sentido da resultante, como discutido anteriormente quando da análise da Figura 20.

Para melhor interpretação do comportamento do veículo ao longo do tempo podem ser empregadas algumas variáveis complementares àquelas utilizadas no modelo matemático descrito. Por exemplo, a velocidade absoluta do veículo, dada por

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}$$

auxilia na compreensão do seu movimento até a parada total. Também o deslocamento, obtido a partir de

$$s = \int V dt = \int \sqrt{u^2 + v^2} dt$$

será útil na análise dos problemas relacionados.

Lembra-se ainda que as forças de atrito, e portanto também os momentos por elas gerados, existem enquanto há movimento, significando que nas equações diferenciais acima, todos os termos da direita se tornarão nulos quando as velocidades de translação e rotação se anularem, ou seja, quando o veículo parar.

Observa-se novamente que não será aqui desenvolvido um modelo supondo as rodas livres para girar. Considerou-se, para os objetivos da análise que se pretende realizar, suficiente o modelo com as rodas travadas, situação comum em colisões veiculares, apesar de não ser a única condição possível. Oportunamente, na medida do necessário um modelo mais completo poderá ser obtido, tendo como base o desenvolvimento apresentado.