

5

Análise de complexidade

Este capítulo realiza uma revisão da literatura sobre os resultados de complexidade computacional de problemas relacionados com o Pipesworld e suas variações, e apresenta um novo resultado neste campo. O resultado obtido reforça a dificuldade inerente ao tratamento do problema em geral, já que diversas variações considerando apenas alguns aspectos do problema se mostraram \mathcal{NP} -difíceis. Esta é uma característica desejável para domínios que façam parte de um benchmark [26].

A Seção 5.1 levanta os resultados da literatura. A Seção 5.2 demonstra que classes de problemas do Pipesworld são \mathcal{NP} -difíceis no número de produtos utilizados, mesmo considerando apenas a restrição de interface [27].

5.1

Revisão bibliográfica

Apesar de não existirem ainda na literatura resultados publicados especificamente sobre o Pipesworld, dada a novidade do domínio, existem trabalhos sobre problemas relacionados. Esta Seção resume estes resultados, destacando as diferenças entre o modelo utilizado e o Pipesworld.

A idéia de se analisar modelos combinatoriais simplificados, cuja inspiração está no transporte por oleodutos, é apresentada em [9, 10]. Os autores propõem um problema no qual as demandas por produtos são cíclicas no tempo, a rede de dutos é uma árvore direcionada e as bateladas, unitárias como no Pipesworld, tem um destino fixo. Não existe o tratamento de prazos, interfaces nem tancagens, como no Pipesworld.

O problema PTP, apresentado em [13, 20, 28], modela a rede como um grafo direcionado G , onde cada arco direcionado representa um duto e seu sentido de escoamento. Assim como no Pipesworld, as bateladas são unitárias, sendo que algumas possuem uma área de destino. É demonstrado que o problema de encontrar uma solução viável para o PTP é \mathcal{NP} -difícil,

mesmo quando G é acíclico. Um caso especial do PTP, chamado SPTP também é apresentado, no qual todas as bateladas postergáveis, definidas na Seção 3.2.1, estão armazenadas em uma área no estado inicial, e não em um duto. Os autores apresentam um algoritmo polinomial para o SPTP.

As principais diferenças entre os problemas PTP e SPTP em relação ao Pipesworld estão na fixação de um sentido único para todos os dutos da rede, enquanto o Pipesworld admite fluxo em ambos os sentidos, e na ausência de restrições de interface, tancagem e prazo.

Uma nova variação do PTP, chamada CBPTP, é apresentada em [2]. O CBPTP permite dutos bidirecionais, não considera as restrições de interface, tancagem e prazo e também não define um objetivo explícito para as bateladas, com as demandas sendo definidas por produto e por área. O artigo apresenta um algoritmo polinomial para a solução do CBTP.

5.2

Restrição de interface com número variável de produtos

Esta Seção analisa como a restrição de interface influencia o problema no caso em que o número de produtos não é constante. Para isso, é apresentado o modelo S-PPI, *Simple Pipeline Planning with Interface*, que considera apenas a restrição de interface em uma rede com duas áreas. É demonstrado que o S-PPI é \mathcal{NP} -completo.

Um grafo de interface G é definido para os produtos que são movimentados pelo duto. Neste grafo, cada produto P_i é representado por um nó. Uma aresta $\{P_i, P_j\}$ em G indica que as perdas de interface entre P_i e P_j são aceitáveis. Caso contrário, se a aresta $\{P_i, P_j\}$ não existe em G , a interface entre P_i e P_j é proibida nos dutos. Dizemos que $P_i \sim P_j$ sse P_i pode realizar interface com P_j no duto.

A Figura 5.1 mostra um exemplo de grafo de interface. Neste exemplo, as interfaces possíveis são dadas por $P_1 \sim P_2$, $P_1 \sim P_3$, $P_2 \sim P_3$, $P_3 \sim P_4$ e $P_3 \sim P_5$.

5.2.1

O problema S-PPI

Esta Seção apresenta o problema *Simple Pipeline Planning with Interface*, S-PPI. Neste modelo, temos duas áreas denominadas A e B , conectadas por um único duto P , conforme mostrado na Figura 5.2.

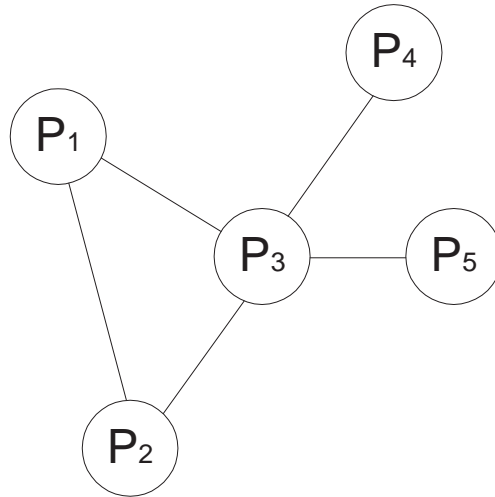


Figura 5.1: Exemplo de grafo de interface

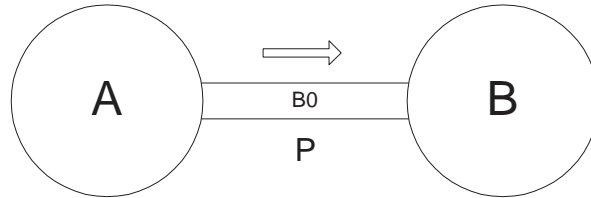


Figura 5.2: Estado inicial do problema S-PPI

O sentido do fluxo em P é de A para B , conforme indicado pela seta sobre P .

O problema S-PPI também define um conjunto $\mathcal{B} = \{b_0, \dots, b_n\}$ de bateladas, com um produto diferente para cada batelada. Os volumes de cada batelada são representados por v_i , com $i = 0, \dots, n$, e o volume do duto é representado como V . No S-PPI, assim como no Pipesworld, todas as bateladas são unitárias e possuem o mesmo volume. Além disso, é definido que o volume destas bateladas é igual ao volume do duto, ou seja, $v_i = V$ para $i = 0, \dots, n$. Dizemos que $b_i \sim b_j$ sse b_i pode interfacear com b_j . As bateladas b_0 e b_n são especiais, já que para estas a restrição de interface é $b_0 \sim b_k$ e $b_n \sim b_k$, para $k = 0, \dots, n$.

No S-PPI, o estado do duto é representado por $S = (\beta_A, b_P, \beta_B)$, onde β_A e β_B são os conjuntos de bateladas que estão localizadas nas áreas A e B , respectivamente, e b_P é a batelada que está em P .

O estado da rede pode ser modificado por uma operação denominada $Pump(S, b)$, que representa o bombeamento de uma batelada b da área A para P . Dado um estado $S_j = (\beta_A, b_P, \beta_B)$ e uma batelada $b \in \beta_A$,

a operação $Pump(S_j, b)$ modifica a rede para um estado S_{j+1} tal que $S_{j+1} = (\beta_A - \{b\}, b, \beta_B \cup \{b_P\})$. Como o volume de todas as bateladas é igual ao volume do duto, ao final de cada operação $Pump$ a batelada b_P que estava previamente dentro de P é completamente movida para B , e a batelada bombeada b é completamente inserida em P . Em adição, $b \sim b_P$ deve ser verdade para satisfazer a restrição de interface.

O problema S-PPI é achar uma seqüência L de operações de bombeamento que movimentem o sistema de um estado inicial $S_0 = (\{b_1, \dots, b_n\}, b_0, \emptyset)$ para um estado objetivo $S_g = (\emptyset, b_n, \{b_0, \dots, b_{n-1}\})$.

O problema de decisão S-PPI é responder à pergunta “Existe uma seqüência L de operações de bombeamento que movem o sistema de S_0 para S_g ?”

5.2.2

O S-PPI é \mathcal{NP} -Completo

Nesta Seção, demonstramos que o S-PPI contém o problema de Caminho Hamiltoniano (CH), que é \mathcal{NP} -completo, como um caso especial. Inicialmente, mostramos que S-PPI está em \mathcal{NP} .

Teorema 5.1 *S-PPI está em \mathcal{NP} .*

Prova. O número de operações $Pump$ em qualquer certificado C é sempre igual ao número de bateladas na instância menos um. Logo, C cresce linearmente com o tamanho da entrada do problema. Para verificar C , devemos simplesmente verificar se as restrições de interface são satisfeitas para todas as operações $Pump$, e que o estado final é igual a S_g . Portanto, o processo de verificação como um todo leva um tempo polinomial. \square

No problema de decisão associado ao Caminho Hamiltoniano, um grafo $G = (V, E)$ é fornecido, e devemos responder se G contém ou não um caminho Hamiltoniano, ou seja, um caminho simples que contenha todos os vértices (i_1, i_2, \dots, i_k) em G tal que $\{i_l, i_{l+1}\} \in E$, para $l = 1, \dots, k - 1$.

Teorema 5.2 *CH \propto S-PPI*

Prova. Dado um grafo $G = (V, E)$, com $|V| = n$, podemos construir uma instância Π do S-PPI da seguinte forma. Para cada $i \in V$, com $i = 1, \dots, n$ criamos uma batelada b_i em Π . Definimos também duas bateladas extras b_0 e b_{n+1} . O estado inicial é definido como $S_0 = (\{b_1, \dots, b_{n+1}\}, b_0, \emptyset)$, e o estado objetivo é $S_g = (\emptyset, b_{n+1}, \{b_0, \dots, b_n\})$. As interfaces permitidas entre as bateladas em Π são de tal forma que $b_i \sim b_j$ sse $\{i, j\} \in E$. Em adição,

bateladas b_0 e b_{n+1} podem realizar interface com todas as outras bateladas. ou seja, $b_0 \sim b_i, b_{n+1} \sim b_i$, para $i = 1, \dots, n$.

A Figura 5.3 mostra um exemplo de como as bateladas em Π são criadas a partir de G .

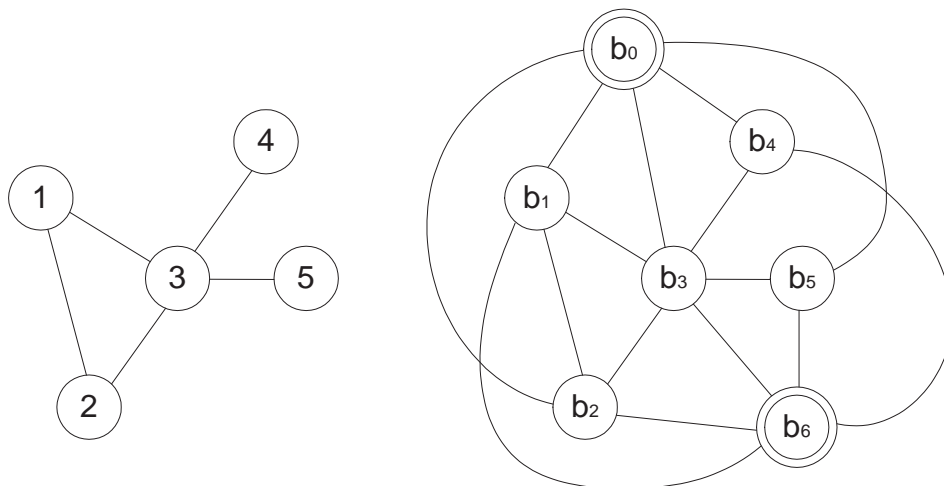


Figura 5.3: Exemplo de construção das bateladas em Π . G é mostrado na esquerda, enquanto o conjunto de bateladas em Π é mostrado na direita

Para demonstrar que esta transformação pode ser realizada em tempo polinomial, é suficiente observar que o número de bateladas e de restrições de interface em Π é limitado por um polinômio em $|V|$ e $|E|$, e que sua construção segue diretamente de um caminhamento em G .

Nós demonstramos agora que Π admite uma solução L se e somente se G possui um caminho Hamiltoniano.

Suponhamos inicialmente que temos a solução L para Π . Com isso, mostramos que G tem um caminho Hamiltoniano. Para todas as operações em L , devemos observar que a batelada inserida b_i deve ter interface permitida com a batelada b_P que estava previamente em P , com b_i substituindo b_P em P após a operação ser completada.

A primeira operação é sempre possível, já que b_0 pode interfacear com todas as bateladas em Π .

Como as bateladas b_1, \dots, b_n devem ser posicionadas em B , a última batelada a ser bombeada em L deve ser b_{n+1} , de forma a empurrar a batelada inserida previamente de P para B .

Cada batelada b_i bombada em uma operação em L , com exceção da primeira e última operações, podem ser vistas como percorrendo a aresta

$\{i, j\}$ de E , onde b_j é a batelada bombeada na operação anterior. Como todas as bateladas devem ser movimentadas, e toda batelada é composta por um produto distinto, todos os nós em G devem ser visitados. Como as bateladas não podem ser divididas, cada nó é visitado uma única vez. Logo, estas operações definem um caminho Hamiltoniano em G .

Nós agora mostramos que se G contém um caminho Hamiltoniano então Π possui uma solução L . Inicialmente escolhemos $Pump(S_0, b_i)$, onde b_i é a batelada associada ao primeiro nó do caminho Hamiltoniano, como a primeira operação em L . Esta operação é sempre possível, já que b_0 , que está em P no estado inicial, pode interfacear com todas as bateladas. Nós prosseguimos bombeando as bateladas restantes, na mesma ordem com que o nó equivalente em G aparece no caminho Hamiltoniano. Estas operações não violam a restrição de interface. Finalmente, a última operação em L é bombear a batelada b_{n+1} . O estado final é o estado objetivo do S-PPI, $S_g = (\emptyset, b_{n+1}, \{b_0, \dots, b_n\})$. \square

Teorema 5.3 *S-PPI é \mathcal{NP} -completo*

Prova. S-PPI é \mathcal{NP} -completo se as duas condições a seguir forem verdadeiras: (i) S-PPI está em \mathcal{NP} ; (ii) S-PPI é \mathcal{NP} -hard. O Teorema 5.1 demonstra a condição (i), enquanto o Teorema 5.2 demonstra (ii), o que conclui a prova. \square

Uma implicação imediata deste resultado é que o planejamento de transporte em oleodutos com restrições de interface, para qualquer topologia de rede e mesmo com dutos bidirecionais, é difícil se o número de produtos não for constante.