7– REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bazaraa, M. S., J. J. Jarvis, et al. (1990). Linear Programming and Network Flows. USA, John Wiley & Sons, INC.

Bazaraa, M. S., H. D. Sheralli, et al. (1993). Nonlinear Programming – Theory and Algorithms. USA, John Wiley & Sons, INC.

Baykasoglu, A., Sevim, T. (2003). A Review and Classification of Fuzzy Approaches to Multi Objective Optimization. Turkish. International XII Turkish Symposium on Artificial Intelligence and Neural Networks.

Bellman, R. E. and L. A. Zadeh (1970). Decision-Making in a Fuzzy Environment. Management Science. 17: B-141 - B164.

Buckley, J. J. (1989). Solving Possibilistic Linear Programming Problems. Fuzzy Sets and Systems. 31: 329-341.

Buckley, J. J. (1992). Solving Fuzzy Equations. Fuzzy Sets and Systems. 50: 1-14.

Buckley, J. J. (1995). Joint Solution to Fuzzy Programming Problems. Fuzzy Sets and Systems. 72: 215-220.

Buckley, J. J., T. Feuring, et al. (1999). Neural Net Solutions to Fuzzy Linear Programming. Fuzzy sets and Systems. 106: 99-111.

Buckley, J. J., T. Feuring. (2000). Evolutionary Algorithm Solution to Fuzzy Problems Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems. 109: 35-53.

Cadenas, J. M. and J. L. Verdegay (1995). PROBO: an Interactive System in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems. 76: 319-332.

Cadenas, J. M. and J. L. Verdegay (2004). Application of Fuzzy Optimization to Diet Problems in Argentinean Farms. European Journal Of Operational Research. 158: 218-228.

Canos, M. J. and V. L. C. Ivorra (2001). The Fuzzy p-median Problem: A Global Analysis of The Solutions. European Journal of Operations Research. 130: 430-436.

Canos, M. J., C. Ivorra, et al. (1999). An Exact Algorithm for the Fuzzy P-Median Problem. European Journal of Operations Research. 116: 80-86.

Chanas, S., Kolodziejaczyk, W, Machaj, A. (1984). A Fuzzy Approach to The Transportation Problem. Fuzzy Sets and Systems. 13: 211-221.

Charnes, A., W. W. Cooper, et al. (1954). A model for programming and sensitivity analysis in an integrated oil company. Econometrica. 24: 193-217.

Chen, P. P.-S. (1976). The Entity-Relationship Model-Toward a Unified View of Data. ACM Transactions on Database Systems. 1: 9-36.

Chvátal, V. (1983). Linear Programming. New York, USA, W. H. Freeman and Company.

Chong, E. K. P., S. Hui, et al. (1999). An Analysis of a Class of Neural Networks for Solving Linear Programming Problems. IEEE Transactions on Automatic Control. 14: 1995-2006.

Dantzig, G. B. (1963). Linear Programming and Extensions. New Jersey, Princeton University Press.

Dubois, D. & Prade, H. (1980). Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, New York.

Eshwar, K., Kumar, Vellanki S.S..(2004). Optimal Deployment of Construction Equipment Using Linear Programming With Fuzzy Coefficients. Advances in Engineering Software. 35: 27-33.

Ekel, P.Y..(2001). Methods of Decision Making in Fuzzy Environment and Their Applications. Nonlinear Analysis. 47: 979-990.

Ekel, P.Y..(1999). Approach to Decision Making in Fuzzy Environment. Computers and Mathematics Applications. 37: 59-71.

Ekel, P.Y., Witold P., Schinzinger R..(1998). A General Approach to Solving a Wide Class of Fuzzy Optimization Problems. Fuzzy Sets and Systems. 97: 49-66.

Fang, S. C., C. F. Hu, et al. (1999). "Linear Programming with Fuzzy Coefficients in Constraints." Computers & Mathematics with Applications. 37: 63-76.

Felizari, L.C., Delgado, M.R., et al. (2003). Programação Linear Fuzzy Aplicada a um Sistema de Mistura de Óleo Combustível. VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. Bauru – São Paulo.

Gal, T. (1979). Post optimal Analyses, Parametric Programming and Related Topics. New York, USA, McGraw-Hill.

Gandolpho, A. A. (1996). Interpretação Econômica de Modelos para Compra de Carvões em Siderúrgicas. Departamento de Engenharia Industrial. Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro: 102.

Gandolpho, A. A., M. M. M. R. Vellasco, et al. (2002). Programação Linear Fuzzy para Problemas de Mistura. XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, IV Simpósio de Pesquisa Operacional da Marinha, V Congresso de Logística da Marinha, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional.

Gandolpho, A. A., M. M. M. R. Vellasco, et al. (2002). Metodologia de Resolução de Problemas de Programação Linear Fuzzy. XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional.

Geoffrion, A. M. (1987). An Introduction to Structured Modeling. Management Science. 33: 547-588.

Goldbarg, M.C. e Luna, H.P.L., (2000). Otimização Combinatória e Programação Linear. Rio de Janeiro, Brasil, Editora Campus.

Greenberg, H. J. (1983). A Functional Description of ANALYZE: A Computer-Assisted Analysis System for Linear Programming Models. ACM Transactions on Mathematical Software. 9: 18-56.

Greenberg, H. J. (1986). An Analysis of Degeneracy. Naval Research Logistics Quarterly. 33: 635-655.

Greenberg, H. J. (1987). A Natural Language Discourse Model to Explain Linear Programming Models and Solutions. Decision Support Systems. **3:** 333-342.

Guu, S.-M. and Y.-K. Wu (1999). Two-phase approach for solving the fuzzy linear programming problems. Fuzzy Sets an Systems. 107: 191-195.

Hadley, G. (1963). Linear Programming, Addison Wesley Publishing Company.

Hamacher, S. (1991). Modelagem Estruturada numa Empresa de Petróleo: Uma Avaliação. Engenharia de Produção. Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE: 191.

Hooker, J. N. (1986). Karmarkar's Linear Programming Algorithm. Interfaces. 16: 75-90.

Ignizio, J. P. (1982). Linear Programming in Single & Multiple-Objetive Systems. New york, Prentice-Hall International.

Inuiguchi, M. (1997). Fuzzy Linear Programming: What, Why and How? Tatra Mountains Mathematical Publications. 13: 123-167.

Inuiguchi, M., H. Ichihashi, et al. (1990). A Solution Algorithm for Fuzzy Linear Programming With Piecewise Linear Membership Functions. Fuzzy Sets and Systems. 34: 15-31.

Inuiguchi, M. and J. Ramik (2000). Possibilistic Linear Programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. Fuzzy Sets and Systems. 111: 3-28.

Inuiguchi, M. M. and T. Tanino (2000). Portfolio Selection Under Independent Possibilistic Information. Fuzzy Sets and Systems. 115: 83-92.

Inuiguchi, M. M. and T. Tanino (2002). Possibilistic Linear Programming with Fuzzy If-Then Rule Coefficients. Fuzzy Optimization and Decision Making. 1: 65-91.

Inuiguchi, M. M. (2004). Enumeration of All Possibly Optimal Vertices with Possible Optimality Degrees in Linear Programming Problems with a Possibilistic Objective Function. Fuzzy Optimization and Decision Making. 3: 311-326.

Iung, A. M. (2000). Aplicação de Programação Linear Fuzzy no Problema de Planejamento sob Incertezas da Expansão de Sistemas de Transmissão. Departamento de Engenharia Elétrica. Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro: 91.

Jamison, K. D. and W. A. Lodwick (2001). "Fuzzy Linear Programming Using a Penalty Method." Fuzzy sets and Systems 119: 97-110.

Jansen, D., J. J. d. Jong, et al. (1997). Sensitivity Analysis in Linear Programming: Just Be Careful! European Journal of Operational Research. 101: 15-28.

Klir, G. J. and T. A. Folger (1988). Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall.

Liu, X. (2001). Measuring The Satisfaction of Constraints in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems. 122: 263-275.

Luhandjula, M. K. (1989). Fuzzy Optimization: An Appraisal. Fuzzy Sets and Systems. 30: 257-282.

Maeda, T. (2001). Fuzzy Linear Programming as Bi-Criteria Optimization Problems. Applied Mathematics and Computation: 109-121.

Maleki, H. R., M. Tata, et al. (2000). Linear Programming with Fuzzy Variables. Fuzzy Sets and Systems. 109: 21-33.

Moore, R. E. (1966). Interval Analysis. New York, Prentice Hall Inc.

Pedrycz, W. and Gomide, F. (1998). An introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design, MIT Press.

Ramik, J. and H. Rommelfanger (1996). Fuzzy Mathematical Programming Based on Some New Inequality Relations. Fuzzy sets and Systems. 81: 77-87.

Rommelfanger, H. (1996). "Fuzzy Linear Programming and Applications." European Journal of Operational Research 96: 512-527.

Shaocheng, T. (1994). Interval Number and Fuzzy Number Linear Programmings. Fuzzy sets and Systems. 66: 301-306.

Simonnard, M. (1962). Linear Programming. Califórnia, Prentice-Hall.

Stoll, H. G. (1989). Least-Cost Electric Utility Planning. New York, John Wiley & Sons.

Taha, H. A. (1997). Operations Research: An Introduction. New York, Prentice-Hall, Inc.

Tanaka, H., P. Guo, et al. (2000). Possibility Distributions of Fuzzy Decision Variables Obtained from Possibilistic Linear Programming Problems. Fuzzy Sets and Systems. 113: 323-332.

Tucker, A. W. and E. D. Nering (1993). Linear Programming and Related Topics. London, Academic Press.

Vanderbei, R. J. (1996). Linear Programming Foundations and Extensions. Boston, Kluwer Academic Publishers.

Vansant, P., Nagarajan, R., et al. (2004). Decision Making in Industrial Production Planning using Fuzzy Linear Programming. IMA Journal Of Management Mathematics. 15: 53-65

Yang, Y. (1991). A New Approach to Uncertain Parameter Linear Programming. European Journal of Operational Research. 54: 95-114.

Zhang, G, Wu, Y.H., et al. (2003). Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems as Four-Objective Constrained Optimization Problems. Applied Mathematics and Computation. 139: 383-399.

8– ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

8.1.ABORDAGEM TEÓRICA

Neste item será apresentada a base matemática das análises desenvolvidas, necessária para o melhor entendimento do restante do texto.

Considere-se o seguinte problema de programação linear na forma padrão, com *m* restrições e *n* variáveis e com os coeficientes do lado direito necessariamente não negativos ($b_i \geq 0$, $i = 1, 2,...,m$):

Min	$\boldsymbol{cx}$	função objetivo	
s.a.	$\boldsymbol{Ax = b}$	restrições tecnológicas	(A.1)
	$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	restrições de não negatividade	

onde,

$\boldsymbol{c}$ = vetor de coeficientes de custo, de dimensão *n*;

$\boldsymbol{x}$ = vetor das variáveis de decisão (variáveis estruturais ou níveis de atividade) a serem determinadas, de dimensão *n*;

$\boldsymbol{A}$ = matriz de coeficientes tecnológicos, de dimensão *m* x *n*;

$\boldsymbol{b}$ = vetor de constantes do lado direito, de dimensão *m*.

Para este problema são definidos os seguintes conceitos:

✓ <u>Base de uma matriz A de dimensão m x n, onde m < n:</u>

Se uma matriz A de dimensão m x n, onde $m < n$, tem n colunas a_1, a_2, ..., a_n, das quais m colunas a_r, a_s, ..., a_p são linearmente independentes, então a matriz quadrada $B = [a_r, a_s, ..., a_p]$, de ordem m, é uma base de A.

✓ <u>Solução Básica</u>:

Seja A, de dimensão m x n, uma matriz com n colunas a_1, a_2, ..., a_n, dentre as quais as m colunas a_r, a_s, ..., a_p são linearmente independentes formando uma base $B = [a_r, a_s, ..., a_p]$, de ordem m. Para qualquer $b \in \Re^m$, a solução básica de $Ax = b$, correspondente à base B, é encontrada resolvendo-se a equação $a_r x_r + a_s x_s + ... + a_p x_p = b$, para qualquer x_r, x_s, ..., x_p e fazendo as restantes variáveis iguais a zero. As variáveis x_r, x_s, ..., x_p correspondentes às colunas a_r, a_s, ..., a_p, são as chamadas variáveis básicas e todas as outras variáveis x_j são denominadas variáveis não básicas, para j = {r, s, ..., p}

✓ <u>Método Simplex:</u>

O método Simplex utiliza o algoritmo descrito abaixo para resolver uma grande classe de problemas.

✓ <u>Algoritmo *Simplex* –</u> desenvolvido a partir do método *Simplex* (Dantzig 1963) para resolver problemas de programação linear na forma padrão:

a) Achar uma solução factível básica inicial;
b) Verificar se a solução é ótima; se o for, PARAR;
c) Determinar a variável não básica que deve entrar na base;
d) Determinar a variável básica que deve sair da base;
e) Achar a nova solução factível básica, e voltar ao passo b.

Considere-se o seguinte problema de programação linear colocado na forma algébrica, onde as constantes do lado direito são não negativas.

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_1 \\ a_{211}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \\ -z + c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n = 0 \\ \qquad x_1, \qquad x_2, \qquad\qquad x_n \geq 0 \end{cases}$$

Suponha-seque a base conhecida, que produz a solução básica factível inicial, é composta das *m* primeiras variáveis. Agora, colocando o sistema de equações acima, incluindo a equação da função objetivo (FO) na forma canônica relativa à base, ou seja, explicitando as variáveis básicas e o valor da função objetivo (*z*) em função das variáveis não básicas. De outra forma, a equação *i*, onde $i \in$ [1, 2, ..., *m*], é dividida pelo coeficiente de x_i, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \quad \bar{a}_{1m+1}\,x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}\,x_n = \bar{b}_1 \\ \quad x_2 \quad + \quad \bar{a}_{3m+1}\,x_{m+1} + \ldots + a_{2n}\,x_n = \bar{b}_2 \\ \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad x_m + \bar{a}_{n\,m+1}\,x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}\,x_n = \bar{b}_m \\ -z + \qquad + (c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i\,\bar{a}_{i\,m+1}) + \ldots + (c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i\,\bar{a}_{i\,m+1}) = -\sum_{i=1}^{m} c_i\,\bar{b}_i \\ \qquad x_1, \qquad x_2, \qquad\qquad x_n \geq 0 \end{cases}$$

Note que ao se fazer todas as variáveis $x_{m+1}, \ldots, x_m$ iguais a zero, obtém-se a solução básica inicial $x_1 = \bar{b}_1, x_2 = \bar{b}_2, \ldots, x_m = \bar{b}_m$, onde, supondo que não tenha a presença degenerescência nesta solução básica, os valores $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m$ são estritamente positivos.

Suponha agora que se faça apenas uma das variáveis não básicas, por exemplo x_j, ter valor diferente de zero, mantendo ainda as demais variáveis não básicas no nível zero. Deste modo, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = \overline{b_1} + \overline{a}_{ij}\ x_j \\ x_2 = \overline{b_2} + \overline{a}_{2j}\ x_j \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_m = \overline{b}_m + \overline{a}_{mj}\ x_j \end{cases}$$

A partir desse resultado é possível retirar as seguintes conclusões:

a) Se $\overline{a}_{ij} \leq 0$, para algum i = 1, ..., m, qualquer valor positivo para x_j não torna os valores de x_1, x_2, ..., x_m negativos, ou seja, a solução continua factível para qualquer valor positivo de x_j.

b) Se $\overline{a}_{ij} \geq 0$, para algum i = 1, ..., m, existirá algum valor ε > 0 (menor que se possa) tal que x_1, x_2, ..., x_m permanecem não negativos quando $x_j = \varepsilon$.

Portanto, caso a solução factível inicial não seja degenerada (algum $\overline{b}_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$) pode-se sempre se obter uma outra solução factível (não básica) fazendo-se um das variáveis não básicas iguais a um valor positivo suficientemente pequeno.

Neste ponto é interessante analisar o valor da função objetivo com todas as variáveis não básicas nulas, exceto x_j.

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i\ \overline{b}_i + (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i\ \overline{a}_{ij})\ x_j$$

A partir desta expressão de z pode chegar a seguinte conclusão:

- ✓ Se $(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i\ \overline{a}_{ij})\ x_j > 0$, o valor e z aumenta quando se faz $x_j > 0$;
- ✓ Se $(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i\ \overline{a}_{ij})\ x_j < 0$, o valor de z diminui ao se fazer $x_j > 0$.

O termo $(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i\ \overline{a}_{ij})\ x_j$ é, em termo de programação linear, chamado de *custo reduzido*, normalmente citado como $(c_j - z_j)\ x_j$, onde $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\ \overline{a}_{ij}$. Note que se todos os custos reduzidos forem não negativos, a solução básica factível é ótima e se algum custo reduzido for negativo e a solução básica for não degenerada, esta solução é não ótima.

A partir do acima exposto, pode-se dizer que, para problemas de programação linear:

1) Uma solução factível (viável) é um vetor x que satisfaz as condições $Ax = b$ e, $x \geq 0$;

2) A região factível (viável) é o conjunto de todas as soluções factíveis; se esta região é vazia, o problema de programação linear é impossível (*infactível*);

3) A solução básica para $Ax = b$ é uma solução obtida fazendo-se $n - m$ variáveis iguais a zero (as variáveis não básicas) e resolvendo em relação às demais (variáveis básicas);

Em termos matemáticos pode-se escrever uma solução básica para um problema de programação linear da seguinte forma,

$$A = [B \mid N],\ Bx_B = b \text{ ou } x_B = B^{-1}\, b$$

onde x_B é o vetor de variáveis básicas, b é o correspondente às constantes do lado direito, B é a matriz dos coeficientes das variáveis básicas, N = matriz dos coeficientes das variáveis não básicas e B^{-1} é a matriz inversa de B, ou matriz inversa da base.

1) Uma solução básica factível (viável) é uma solução básica que também satisfaz $x \geq 0$; ela será ainda dita degenerada se alguma variável básica for nula, ou seja, $x_{Bi} = 0$;

2) Uma solução ótima é um vetor factível x^* que otimiza o valor da função objetivo, $Z^* = cx^*$; essa solução pode ser única ou podem haver ótimos alternativos x_1^* e x_2^*;

3) Uma solução ilimitada (Min $z \to -\infty$) é aquela em que há uma região factível, mas o ótimo é infinito.

Baseado nas definições dadas acima, o número máximo de soluções básicas possíveis para m restrições e n variáveis é:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

✓ <u>Dualidade:</u>

A cada modelo de programação linear corresponde um outro modelo, denominado DUAL, que é formado pelos mesmos coeficientes, dispostos de maneira um pouco diferente, e com as seguintes propriedades básicas:

a) O dual do dual é o primal;

b) Se a restrição k do primal é de igualdade, então a variável y_k do dual é irrestrito em sinal;

c) Se a restrição k do primal é $\geq$ ($\leq$), então a variável y_k do dual é não positiva (não negativa);

d) Se a variável x_p do primal é irrestrita de sinal, então a restrição p do dual é uma igualdade;

e) Se a variável x_p do primal é não positiva, então a restrição p do dual é $\leq$ ($\geq$);

Estas propriedades podem ser resumidas na seguinte quadro:

PRIMAL (MÁX.) $\Rightarrow$	DUAL (MÍN.)
Restrição k é $\leq$	$y_k \geq 0$
Restrição k é =	y_k qualquer
Restrição k é $\geq$	$y_k \leq 0$
$x_p \geq 0$	Restrição p é $\geq$
x_p qualquer	Restrição p é =
$x_p \leq 0$	Restrição p é $\leq$
DUAL (MÁX.)	$\Leftarrow$ PRIMAL (MÍN.)

Quadro A.1 - Relação Primal/Dual

Com base nessas propriedades da teoria da dualidade, escreve-se o seguinte par primal-dual, na forma matricial:

$$\begin{aligned} &Max \quad z = cx \\ &s.a. \quad Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &Min\ w = B^t y \\ &s.a. \quad A^t y \geq c^t \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Além dessas propriedades acima enunciadas, existem os seguintes teoremas da teoria da dualidade, que também serão úteis durante todo o texto.

✓ Teorema Básico da Dualidade:

a) Se x_j (j = 1, 2, ..., n), solução compatível primal, e y_i (i = 1, 2, ..., n), solução compatível do dual, são soluções factíveis para o par de programas primal/dual, então $z \leq w$ (z = valor da função objetivo do primal e w = valor da função objetivo do dual);

b) Se x_j^* (j = 1, 2, ..., n), valor ótimo de x_j, y_i^*, valor ótimo de y_i, são soluções factíveis para o par de programas primal/dual tais que $z^* = w^*$, então elas constituem soluções ótimas.

Como extensão à esse teorema básico da dualidade pode-se acrescentar os seguintes corolários:

1) Se o primal z tende para o infinito, então o dual não tem solução factível;
2) Se o dual tende para menos infinito, então o primal não tem solução factível;
3) Pode acontecer que os dois problemas (primal e dual) não tenham soluções factíveis.

A partir destes corolários pode-se montar o seguinte quadro resumo:

DUAL PRIMAL	TEM SOLUÇÃO FACTÍVEL	NÃO TEM SOLUÇÃO FACTÍVEL
TEM SOLUÇÃO FACTÍVEL	Máx z = Min w	Max z = ∞
NÃO TEM SOLUÇÃO FACTÍVEL	Min w = - ∞	Pode ocorrer

Quadro A.2 – Resumo

✓ <u>Variável de Folga</u>:

Seja o problema primal representado pelo seguinte quadro inicial:

	z	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}		
	1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0	(0)
x_{n+1}	0	*	*	...	*	1	0	...	0	b_1	(1)
x_{n+2}	0	*	*	...	*	0	1	...	0	b_2	(2)
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	0	*	*	...	*	0	0	...	1	b_m	(m)

Quadro A.3 – Tableau inicial

onde x_j (j = 1, 2, ..., n) são as variáveis do primal e x_{n+i} (i = 1, 2, ..., m) são as variáveis de folga das equações 1, 2, ..., m respectivamente. Caso o primal não se apresente conforme o quadro acima, é sempre possível transformá-lo para tal forma, mediante troca adequada de equações e de variáveis.

O problema dual terá também ($m + n$) variáveis subdivididas em dois grupos:

y_i (i = 1, 2, ..., m) → variável do dual

y_{m+j} (j = 1, 2, ..., n) → variável de folga do dual

✓ <u>Teorema da Folga Complementar</u> (Bazaraa, 1990):

Dada uma solução ótima do primal obtida pelo método *simplex*, o teorema da folga complementar estipula que:

a) O valor ótimo da variável y_i do dual é igual ao coeficiente na linha (0) ótima, da variável de folga x_{n+i} do primal, isto é, $y_i^* = p_{n+i}^*$ (i = 1, 2, ..., m)

b) O valor ótimo da variável de folga y_{m+j} do dual é igual ao coeficiente na linha (0) ótima, da variável xj do primal, isto é, $y_{m+j}^* = p_j^* - c_j$ (j = 1, 2, ..., n)

Note-se que este teorema apresenta a conexão entre as variáveis de folga do dual e as variáveis do primal, e, de forma semelhante, das variáveis do dual às variáveis de folga do primal; por este motivo diz-se que as soluções do primal e do dual são *complementares* entre si.

Baseando-se no problema de programação linear, e nas definições da teoria da dualidade apresentadas, podem-se fazer as seguintes variações nos dados originais do problema:

1. Mudança no vetor de custo c;
2. Mudança no vetor do lado direito b;
3. Mudança em um ou mais coeficientes da matriz de coeficientes A;
4. Adição de uma nova variável (ou atividade)

8.1.1. Mudança no vetor c

Suponha-se que um dos coeficientes do vetor de custos seja mudado, por exemplo de c_k para c'_k. O efeito desta mudança é observado na linha de custos reduzidos, ou seja, a *factibilidade* dual pode ser alterada, dependendo dos seguintes casos:

✓ CASO 1: a variável x_k associada ao custo c_k não faz parte da solução ótima (x_k = não básica).

Neste caso, o valor do custo reduzido de x_k $(z_k - c_k)$, que é não positivo na solução corrente (solução ótima), é alterado. Se o novo custo reduzido $(z_k - c'_k)$ torna-se positivo, então ele deve entrar na base, continuando assim o método *Simplex*. Caso contrário, não ocorre mudança na solução, continuando ótima para o problema modificado.

✓ CASO 2: a variável associada ao custo c_k faz parte da solução ótima ($x_k \equiv x'_{B_t}$).

Aqui c_{B_t} é trocado por c'_{B_t}. Dado o novo valor de z_j ser z'_j, então $z'_j - c_j$ é calculado como o seguinte:

$z'_j - c_j = \hat{c}_B a_j - c_j = (c_B B^{-1} a_j - c_j) + (0, 0, ..., c'_{B_t} - c_{B_t}, 0, ..., 0) y_j = (z_j - c_j) + (c'_{B_t} - c_{B_t}) y_{tj}$, para todo j.

Em particular para $j = k$, $(z_k - c_k) = 0$, e $y_{tk} = 1$, e, portanto $z'_k - c_k = c'_k - c_k$, como se poderia esperar, $z'_k - c'_k$ ainda é igual a zero. Portanto, a linha custo pode ser atualizada adicionando-se a rede de mudanças no custo de $x_{B_t} \equiv x_k$ vezes a linha t corrente do *tableau* final à linha custo original. Desta forma, $z'_k - c_k$ é atualizado para $z'_k - c'_k = 0$. Naturalmente o novo valor da função objetivo será obtido no processo.

8.1.2. Mudança no vetor do lado direito

Se ocorre uma troca do vetor do lado direito do problema original de b para b' então, no *tableau* final ótimo, o lado direito passará de $B^{-1}b$ para $B^{-1}b'$. Como o novo valor $b' = b + \delta$, onde

δ é a variação de b, então $B^{-1}b' = B^{-1}b + B^{-1}\delta$. Se todos os valores de $B^{-1}b'$ continuarem não negativos, então o *tableau* manterá a otimalidade, caso contrário, se algum dos valores deste novo vetor se tornar negativo, deve ser aplicado o método dual *simplex* para se encontrar a nova solução ótima.

8.1.3. Mudança em um ou mais coeficientes da matriz A

Este tipo de mudança pode implicar dois casos típicos, o primeiro se for feita alteração na coluna não básica e a outra se for numa coluna básica.

✓ CASO 1: Mudanças no vetor de atividades para colunas não básicas.

Suponha que a coluna não básica a_j original seja modificada para a'_j. Com isso, a nova coluna na base ótima passa a ser $B^{-1}\, a'_j$ e, com isso, o custo reduzido correspondente a esta coluna é alterado, passando a ser $z'_j - c_j = c_B\, B^{-1}\, a'_j - c_j$. Se esse novo custo reduzido for não positivo (≤ 0) então a solução continua ótima, caso contrário, o método *Simplex* é retomado, atualizando-se a coluna *j* e introduzindo a variável não básica x_j na base.

✓ CASO 2: Mudanças no vetor de atividades para colunas básicas.

Suponha que a coluna básica a_j original seja modificada para a'_j. A partir dessa mudança pode ocorrer que o conjunto de vetores básicos não formem mais a base depois da mudança. Mesmo que isso não ocorra, uma mudança no vetor de atividades para uma coluna básica irá implicar na mudança da matriz inversa da base (B^{-1}) e, portanto, todos os outros coeficientes serão alterados.

Note que esta mudança acarreta um coeficiente $y'_j = B^{-1}\, a'_j$, neste caso, se $y_j = y'_j$, então não acontecerão mudanças na coluna ótima. Se $y_j \neq y'_j$, tem-se que se realizar um pivotamento, afim de se colocar novamente o tableau na forma canônica. Isto posto, deve-se analisar o elemento do lado direito referente à linha básica *j*. Se este novo elemento $\overline{b'} = B^{-1}\, b'$ for não negativo, continua-se com o tableau ótimo. Caso contrário, se for negativo, acarreta uma infactibilidade dual, que pode ser resolvida aplicando-se o método *simplex* dual.

8.1.4. Adição de uma nova variável (ou atividade)

Suponha que se queira analisar a possibilidade de se adicionar uma nova variável no problema. Nesse caso será estudada a entrada da variável x_{n+1} com custo unitário c_{n+1}, com a coluna a_{n+1} na matriz de coeficientes. Sem a necessidade de se resolver o problema novamente, calcula-se facilmente o valor desta nova variável. Primeiro se calcula o valor do seu respectivo custo reduzido, $(z_{n+1} - c_{n+1}) = c_B\, B^{-1} a_{n+1} - c_{n+1}$, se este valor for não positivo (para o problema de minimização) então, $x_{n+1} = 0$ e a solução corrente permanece ótima e inalterada. Caso contrário, se $z_{n+1} - c_{n+1} > 0$, a variável x_{n+1} deve entrar na base e o método *Simplex* continua procurando a nova solução básica ótima. Para saber como fica a coluna a_{n+1} no *tableau* final, pré multiplica-se esta nova coluna pela matriz inversa da base (B^{-1}), obtendo-se então $\bar{a}_{n+1} = B^{-1}\, a_{n+1}$.

8.2. PROGRAMAÇÃO PARAMÉTRICA

Programação paramétrica ou análise paramétrica é uma técnica freqüentemente utilizada em programação linear (Murty, 1976). Em aplicações práticas, muitas vezes os coeficientes da função objetivo e as constantes das restrições podem não ser totalmente conhecidas inicialmente, mudando de acordo com alguns parâmetros. A seguir serão apresentadas duas variações possíveis, mudança no vetor de custos e, no vetor b das constantes do lado direito.

8.2.1. Parametrizando o vetor de custos

Suponha-se por exemplo que, para o modelo de programação linear, B seja a base ótima. Neste caso, se o vetor custo for perturbado, o novo vetor pode ser representado como $(c + \lambda c')$, onde $\lambda \geq 0$. A meta é encontrar o maior valor possível de λ tal que a otimalidade seja mantida para o ponto corrente, i.e., deseja-se saber qual a maior distância que pode se caminhar na direção c'.

Para explicitar melhor este cálculo, a matriz de coeficientes será decomposta em duas matrizes, a primeira corresponde as variáveis básicas (B), e a segunda corresponde as variáveis não básicas (N), obtendo-se:

$$A = [B \mid N]$$

Seguindo esta mesma idéia, divide-se o vetor de custos atual e o modificado em:

$$c = (c_B\; c_N) \qquad\qquad c' = (c'_B\; c'_N)$$

Dessa forma, tem-se no tableau inicial:

$$z - (c_B + \lambda \quad c'_B)\, x_B - (c_N + \lambda \quad c'_N)\, x_N = 0$$
$$B\, x_B + N\, x_N = b$$

Ao se atualizar este tableau tem-se:

$$z + \sum_{j \in R} [(z_j - c_j) + \lambda z'_j - c'_j)]\, x_j = c_B \bar{b} + \lambda + c'_B \bar{b}$$

$$x_B + \sum_{j \in R} y_j x_j = \bar{b}$$

onde, $c'_B y_j$ denota - se por z'_j e

N = conjunto de índices das variáveis não básicas.

Note que no *tableau* corrente basta fazer λ = 0 para conseguir uma solução básica factível ótima para o problema original sem perturbação. Para encontrar o maior passo na direção c', mantendo-se a condição de otimalidade, deve-se encontrar dentre todas as variáveis do conjunto R aquelas que $(z'_j - c'_j) > 0$. Neste ponto é importante lembrar que no problema original, todos os $(z_j - c_j)$ são não positivos. Desta forma, somente os valores de $(z'_j - c'_j)$ positivos e maiores do que $(z_j - c_j)$ poderão afetar a solução ótima. Portanto, assumindo S = conjunto de j tais que $(z'_j - c'_j) > 0$, então pode-se escrever

$$\hat{\lambda} = \min_{j \in R} \left\{ \frac{-(z_j - c_j)}{z'_j - c'_j} \right\} = \left\{ \frac{-(z_k - c_k)}{z'_k - c'_k} \right\}$$

Portanto, para valores entre 0 e $\hat{\lambda}$ a solução permanecerá ótima e, a função objetivo será:

$$c_B \bar{b} + \lambda \cancel{c}'_B = c_B B^{-1} b + \lambda b c'_B B^{-1} b$$

Para valores de λ maiores do que $\hat{\lambda}$, a variável x_k entra na base e, após o *tableau* ter sido atualizado, é calculado outro conjunto S e, um novo valor de λ. O processo é repetido até o conjunto S, acima definido, estar vazio. Se não houver variável bloqueando quando x_k entra na base, então o problema torna-se ilimitado para todos os valores de λ maiores do que o valor corrente.

8.2.2. Parametrizando o vetor de constantes do lado direito (RHS)

Suponha a seguir que o vetor RHS sofra uma perturbação, ficando então $b + \lambda b'$, onde λ ≥ 0. De forma similar ao caso anterior, diz-se que o vetor RHS é perturbado ao longo do vetor b'. Note que este vetor é o vetor de custos do problema dual, ou seja, a análise de sua perturbação pode ser feita em termos do problema dual.

Portanto, o respectivo tableau fica da seguinte forma:

$$z + (c_B B^{-1} N - c_N)\, x_N = c_B B^{-1} b$$

$$x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

onde:

$$(c_B B^{-1} b - c_N) \leq 0$$

Ao se trocar b por $b + \lambda\, b'$, o vetor $(c_B\, B^{-1}\, N - c_N)$ não será afetado e, com isso, não haverá problemas de factibilidade dual. Note que a única mudança possível é que $B^{-1}b$ será trocado por $B^{-1}\,(b + \lambda b')$, ficando a função objetivo $c_B B^{-1}\,(b + \lambda b')$. Enquanto $B^{-1}\,(b + \lambda b')$ for não negativo, a base permanecerá ótima. Porém, o valor de λ para que outra base torne-se ótima pode ser determinado da seguinte forma:

$$\hat{\lambda} = \min_{j \in S} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{-\overline{b}'_i} \right\} = \frac{\overline{b}_r}{-\overline{b}'_r}$$

Suponha que tenha sido encontrado $\lambda_1 = \hat{\lambda}$, então, para $\lambda \in [0, \lambda_1]$ a base corrente permanece ótima, onde a variável básica $x_B = B^{-1}\,(b + \lambda b')$ e o valor ótimo da função objetivo é $c_B B^{-1}\,(b + \lambda b')$. Em λ_1 a constante do lado direito é trocada por $B^{-1}\,(b + \lambda_1\, b')$, neste caso esta variável é trocada da base, entrando uma variável apropriadamente escolhida pelo método dual[1]. O *tableau* é então atualizado e o processo continua até se encontrar outra faixa $[\lambda_1, \lambda_2]$, onde $\lambda_2 = \hat{\lambda}$. Esse processo é repetido até o conjunto *S*, definido no item anterior, estar vazio, neste caso a base corrente é ótima para todos os valores de λ maiores ou iguais ao último valor calculado, ou então quando todas as possíveis entradas na linha que o *RHS* foi para 0 são não negativas. Nesse caso, não há solução factível para todos os valores de λ maiores do que o valor corrente.

[1] O novo lado direito provocou uma infactibilidade dual

9– NÚMEROS FUZZY

9.1. DEFINIÇÃO

Um número *fuzzy* modela quantidades imprecisas e é definido no universo X como um conjunto *fuzzy* convexo e normalizado, onde sua função de pertinência é contínua por partes. Além disso, pode-se dizer que, dado um número *fuzzy* μ definido no intervalo $[c, d]$ pela sua função de pertinência $\mu_A(x)$, onde $x \in [c, d]$:

1) $\mu_A(x)$ é zero fora do intervalo $[c, d]$;
2) Existem números reais a, b: $c \leq a \leq b \leq d$ tal que:
    a. $\mu_A(x)$ é monotonicamente crescente no intervalo $[c, a]$;
    b. $\mu_A(x)$ é monotonicamente decrescente no intervalo $[b, d]$;
    c. $\mu_A(x) = 1$, para $a \leq x \leq b$

9.2. NÚMEROS FUZZY DO TIPO L-R

Em geral é considerada uma família de números *fuzzy* do tipo L-R, cujas funções de pertinência satisfazem as propriedades descritas a seguir:

- ✓ Simetria: $L(x) = L(-x)$ e $R(x) = R(-x)$
- ✓ Normalidade: $L(0) = 1$ e $R(0) = 1$
- ✓ L(x) é não crescente no intervalo $[0,\infty)$
- ✓ $L(1) = 0$ e $R(1) = 0$

Uma família de tais funções é denotada por **L**. Um número *fuzzy* é dito ser um número LR se sua função de pertinência é construída com a ajuda de algumas funções de pertinência do tipo L e R. Em termos matemáticos pode se escrever o seguinte:

$$A(x) = \mu(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & \text{se } x \leq m, \alpha > 0 \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & \text{se } x > m, \beta > 0 \end{cases}, \text{ onde L e R} \in \mathbf{L}.$$

As funções de pertinência do tipo L-R também podem ser representadas de outras formas, como por exemplo:

$A(x;\alpha,m,\beta)_{LR}$,

onde: m é normalmente referido como o valor modal de A e α e β representam as faixas do número *fuzzy*.

No próximo item é definido um dos tipos mais comuns de números *fuzzy*, o número *fuzzy* triangular.

9.3. NÚMERO FUZZY TRIANGULAR

Este tipo de número *fuzzy* tem um formato simples e tem sido o mais utilizado em aplicações práticas, sendo, portanto, definido em seguida.

Definição: Seja A = [a_1, a_3, a_2] um número *fuzzy* triangular representado pelos três pontos a_1, a_2 e a_3; então, a sua função de pertinência é:

$$\mu_{(A)} = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \le x \le a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 \le x \le a_3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observações:

1) Se $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, então diz-se que o número *fuzzy* triangular é simétrico, conforme pode ser observado na Figura B.1.

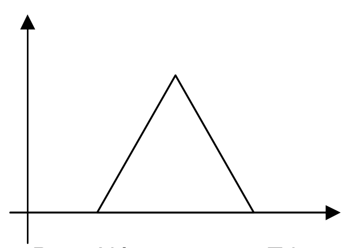

Figura B.1 – Número *Fuzzy* Triangular Simétrico

2) Se $a_2 \neq \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, então diz-se que o número *fuzzy* triangular é anti-simétrico, conforme pode ser observado na Figura B.2.

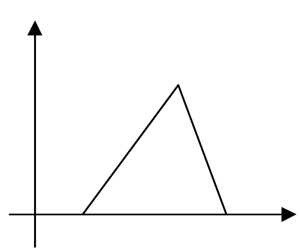

Figura B.2 – Número *Fuzzy* Triangular Não Simétrico

3) O intervalo suporte de A é [a1, a2]

9.4. NÚMERO FUZZY TRAPEZOIDAL

Definição: Um número *fuzzy* trapezoidal pode ser definido pela sua função de pertinência como:

$$\mu_{(A)} = \begin{cases} \dfrac{x\text{-}a_1}{b_1 - a_1}, & a_1 \le x \le b_1 \\ 1, & b_1 \le x \le b_2 \\ \dfrac{x - a_2}{b_2 - a_2}, & b_2 \le x \le a_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na Figura B.3 pode ser visto um exemplo de número *fuzzy* trapezoidal. Em seguida são colocadas algumas observações com relação aos números *fuzzy* trapezoidais.

O intervalo [a_1, a_2] é o intervalo suporte para um número *fuzzy* trapezoidal A e,

- ✓ O intervalo [b_1, b_2] é o segmento onde os valores para o número *fuzzy* trapezoidal *A* tem grau de pertinência 1, definindo um patamar.
- ✓ Um número *fuzzy* trapezoidal *A* pode ser denotado por $A = (a_1, b_1, b_2, a_3)$
- ✓ Se $b_1 = b_2 = a_2$, então pode-se dizer que o número *fuzzy* trapezoidal *A* reduz-se a um número *fuzzy* triangular.

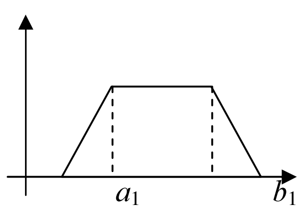

Figura B.3 Número *Fuzzy* Trapezoidal

9.5. CÁLCULO COM NÚMEROS FUZZY

As operações com números *fuzzy* podem ser efetuadas de três formas diferentes, a saber:

9.5.1. Operações em Intervalos

As operações com números *fuzzy* podem ser generalizados a partir das operações efetuadas em intervalos *crisp*. Para isso, consideram-se apenas os limites inferior e superior do número *fuzzy*.

Suponha os seguintes números expressos em termos de seus pontos extremos:

$A = [a_1, a_3]$ e $B = [b_1, b_3]$, onde $a_1, a_3, b_1, b_3 \in \Re$.

Baseado na aritmética de intervalos (Moore, 1966), tem-se que as principais operações podem ser definidas como:

a)Adição:

$[a_1,a_3]$ (+) $[b_1,b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3]$

b)Subtração:

$[a_1,a_3]$ (-) $[b_1,b_3] = [a_1 - b_3, a_3 - b_1]$

c)Multiplicação:

$[a_1,a_3]$ (•) $[b_1,b_3]$ = [mínimo($a_1\,b_1, a_1\,b_3, a_3\,b_1, a_3\,b_3$), máximo($a_1\,b_1, a_1\,b_3, a_3\,b_1, a_3\,b_3$)]

d)Divisão:

$[a_1,a_3]$ (/) $[b_1,b_3] = [a_1, a_3]$ (•) $[1/b_1, 1/b_3]$

excluindo o caso onde $b_1 = 0$ e/ou $b_3 = 0$.

Note que neste caso não se leva em conta o formato da função de pertinência dos números *fuzzy* em questão. Para serem efetuadas as operações são considerados apenas os pontos extremos de cada um deles.

9.5.2. Operações em Intervalos α-cut

Um número *fuzzy* pode ser visto como uma coleção de α-*cuts*. Como definido em Klir (1988), um intervalo α-*cut* de um número *fuzzy* A = $[a_1,a_3]$ é referido como um intervalo *crisp*. Pode-se dizer que, para os números *fuzzy* A = $[a_1,a_3]$ e B = $[b_1,b_3]$ tem-se os seguintes intervalos α-*cut*:

$A(\alpha) = [a_1(\alpha), a_3(\alpha)]$ e $B(\alpha) = [b_1(\alpha), b_3(\alpha)]$

A partir desta definição, as operações de intervalos apresentadas no item 9.5.1 podem ser aplicadas aos intervalos α-*cut*.

9.5.3. Operações com números fuzzy

As operações com intervalos, conforme apresentado nos dois itens anteriores, são aplicáveis aos números *fuzzy*. Porém, para se obter uma resposta na forma de um conjunto *fuzzy*, deve-se ter uma função de pertinência *fuzzy*.

Considerando os números M = $(m, \alpha, \beta)_{LR}$ e N = $(n, \gamma, \delta)_{LR}$ do tipo LR, já apresentados, tem-se as seguintes operações, de forma resumida (Pedrycz, 1998):

a)Adição:

$(m, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}$

b)Subtração:

$(m, \alpha, \beta)_{LR}$ - $(n, \gamma, \delta)_{RL} = (m - n, \alpha - \delta, \beta + \gamma)_{RL}$

c)Multiplicação:

As fórmulas de multiplicação são aproximadas e mantêm-se sob a hipótese de que as faixas dos argumentos são pequenas em comparação com os valores modais dos números *fuzzy*.

✓ Se M > 0 e N > 0:

$(m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn, n\alpha + m\gamma, n\beta + m\delta)_{LR}$

✓ Se M > 0 e N < 0:

$(m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn, m\alpha - n\delta, m\beta - n\gamma)_{RL}$

✓ Se M < 0 e N > 0:

$(m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma)_{RL}$

✓ Se M < 0 e N < 0:

$(m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn, - n\beta - m\delta, - m\gamma - n\alpha)_{RL}$

d) Divisão:

Semelhantemente ao caso da multiplicação, a fórmula da divisão entre dois números *fuzzy* é uma aproximação, sendo considerado que as faixas são pequenas em comparação com os valores modais.

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} / (n, \gamma, \delta)_{RL} \approx \left(\frac{m}{n}, \frac{\delta m + \alpha n}{n^2}, \frac{\gamma m + \beta n}{n^2}\right)_{LR}$$