3– PROBLEMA DE MISTURAS

3.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta a descrição do problema de misturas em termos de um modelo de programação linear. Como exemplo, é descrito um problema de mistura de carvões para siderúrgicas a coque. Neste tipo de problema os coeficientes dos termos da função objetivo e das restrições de desigualdade possuem incertezas, as quais podem ser representadas por números *fuzzy*. A utilização dos conceitos de programação linear *fuzzy* permite que o problema seja resolvido através de métodos tradicionais de programação matemática. Este modelo de misturas de carvões será utilizado para demonstrar a viabilidade do uso prático da metodologia proposta no Capítulo 4.

3.2. O MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA PROBLEMAS DE MISTURAS

A resolução do problema de misturas como um modelo de programação linear foi uma das primeiras aplicações desta metodologia (Dantzig, 1963). Neste problema existem dois ou mais componentes, que podem ser um conjunto de matérias-primas, uma ou mais qualidades de cada um destes componentes e um ou mais produtos, de tal forma que certas necessidades sejam satisfeitas. Em geral, pode-se dizer que a qualidade do produto final é uma média ponderada das qualidades dos produtos usados na mistura.

Existe uma grande variedade de problemas nos quais um certo número de componentes ou matérias-primas são combinados para produzir um produto final que satisfaz certas especificações. Exemplos clássicos de tais problemas são os de mistura de óleos em indústrias de refino de petróleo (refinarias), mistura de metais (metalúrgicas), alimentos (ração para animais), misturas de matérias-primas para compor uma dieta balanceada e, em indústrias siderúrgicas, mistura de uma quantidade de carvões para se obter um coque de qualidade específica. Normalmente são dadas as especificações dos componentes (custo e características) junto com as restrições (tais como as necessidades impostas pelos órgãos do governo) e a tarefa principal é produzir uma mistura que minimize o custo total (ou maximize o lucro total) satisfazendo estas restrições. Além disso, pode-se considerar mais de um objetivo para este problema, acrescentando o objetivo de minimizar operações de mistura.

Na Tabela 3.1 estão listados alguns tipos de produtos advindos de misturas de componentes e as qualidades normalmente exigidas.

Produto Final	**Qualidades**	**Matérias-Primas**
Alimento	Quantidade de proteína, carboidrato, gordura, etc.	Milho, soja, aveia, trigo, farelos, farinhas, etc.
Metais	Conteúdo de carbono, manganês e cromo	Minério de ferro (ou metais), refugo de metais e metais usados
Coque	Teor de cinza, enxofre, umidade, matéria volátil, etc.	Carvões vindos de diferentes minas espalhadas pelo mundo

Tabela 3.1 - Exemplos de produtos vindos de mistura

Na próxima seção é descrita a estrutura geral do problema de misturas, sendo modelado como um problema de programação linear.

3.3. ESTRUTURA GERAL DO PROBLEMA DE MISTURAS

Considere-se inicialmente que se deseja misturar n componentes (matérias primas), cada qual com suas características determinadas por teores, que podem estar em termos percentuais, e com seus custos determinados pelo mercado. O produto final deve estar entre níveis aceitáveis de cada uma das m qualidades exigidas. Além disso, deseja-se que o produto final tenha o menor custo final e que seja produzido em lotes de quantidade X.

Deste modo, o problema pode ser equacionado da seguinte forma:

Obter um produto com quantidade X, tendo como resultado uma mistura de custo mínimo atendendo às restrições de qualidade. Cada componente de entrada i, para $i = 1, 2,..., n$ é usado na quantidade x_i, e tem custo unitário c_i. Além disso, cada componente i tem um conjunto de qualidades j, nas proporções a_{ij}, onde $j = 1, 2,..., m$.

O processo produtivo é de mistura sem perdas de quantidades de tal modo que $\sum_{i}^{n} x_i = \mathrm{X}$. As diversas qualidades são também ponderadamente aditivas, ou seja, os coeficientes (a_{ij}, onde j = 1, 2,..., m) usados representam os percentuais das qualidades de cada uma das variáveis, no caso o percentual de qualidade de cada carvão.

Colocando-se em termos matriciais:

- Vetor de custos $\Rightarrow$ $\{c_1, c_2, c_3, ..., c_{n-1}, c_n\}$
- Matriz de qualidades $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{matrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & \cdots & a_{1\,n\text{-}1} & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2\;n\text{-}1} & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\text{-}1\,1} & a_{n\text{-}1\,2} & \cdots & \cdots & a_{n\text{-}1\,n\text{-}1} & a_{n\text{-}1\,n} \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & \cdots & a_{n\,n\text{-}1} & a_{n\,n} \end{matrix} \right\}$

O custo final da mistura deve ser o mínimo de uma média ponderada entre as quantidades de cada componente e o seu preço de mercado, portanto:

Mínimo de $$z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_{n\text{-}1}\,x_{n\text{-}1} + c_n\,x_n$$

sujeito as seguintes restrições de qualidade:

$$LI_j \le \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le LS_j \text{, para todo } j = 1,2,...,m,$$

onde:

LI_j é o limite inferior exigido da qualidade j e,

LS_j é o limite superior exigido da qualidade j.

sendo que a quantidade máxima a ser produzida é fixa em X:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X$$

Transcrevendo em termos de um modelo de programação linear tem-se:

Minimizar $$\sum_{i} c_i\, x_i$$

sujeito a

$$LI \le \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \le LS \text{ , para } j = 1,2,..., m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathrm{X}$$

$$x_i \geq 0, \; i = 1,...,n$$

Esta formulação constitui uma estrutura típica de um modelo de misturas em programação linear. Embora existam outras vertentes, inclusive certos modelos não lineares, este é o que mais se adapta à realidade das siderúrgicas. Na próxima seção apresenta-se o modelo do carvão que é utilizado no estudo de caso. As aproximações consideradas, quando necessárias, são indicadas no texto.

3.4. O MODELO DO CARVÃO

Devido a sua importância no preço final do coque nas usinas siderúrgicas e, conseqüentemente, no valor e na qualidade do aço e do ferro gusa (cerca de 50% do custo do ferro gusa e 20% do custo do aço), a negociação do carvão tem tido uma grande atenção por parte da gerência de suprimento dos carvões. Nas companhias siderúrgicas brasileiras, a utilização de programação matemática para a seleção de carvões foi fortemente influenciada pelo projeto conduzido pela SIDERBRÁS em colaboração com a siderúrgica espanhola ENSIDESA. O modelo SIDERBRÁS tem sido utilizado nos níveis tático (negociação dos contratos anuais de fornecimento) e operacional (programação das misturas de carvões) (Yazaki, 1992).

Com o desenvolvimento deste modelo, as principais companhias siderúrgicas nacionais passaram a adotá-lo na otimização das suas misturas. Este modelo (referenciado neste texto como modelo do carvão) é um modelo de programação matemática que possui como entrada diversos componentes (carvões) e como saída um produto final (coque). Este produto final é a mistura dos componentes de entrada, de tal forma que atenda a certos limites de qualidade exigidos pelos técnicos da área. Note que os limites de qualidade são representados pelas restrições de desigualdade. Sendo assim, a mistura feita com os carvões, que é o coque, deve estar entre os limites superior e inferior de cada qualidade. Estas qualidades exigidas servem para garantir a integridade dos alto-fornos e permitir uma boa qualidade do produto final, que é o aço. O modelo que será utilizado durante todo este texto é um modelo linear simplificado. As simplificações servem apenas para tornar mais fácil o trabalho de análise e, de forma alguma, comprometem os resultados.

A descrição abaixo está baseada em Gandolpho (1996) e em Gandolpho, Vellasco et al. (2002).

O modelo considera N variáveis (i = 1,..., N), neste caso carvões, que devem ser comprados em quantidades não negativas ($q_i \geq 0$), e sujeitos a M restrições de qualidade (respondendo pelo índice j). Cada carvão utilizado possui um custo estimado (c_i) e um teor, ou proporção, de cada qualidade (p_{ij}). Como o produto final desta mistura deve estar entre valores aceitáveis para cada qualidade, são necessárias restrições de qualidade (que devem ser no máximo 2M, pois cada qualidade tem seu limite superior e inferior, assim, para cada qualidade serão colocadas duas inequações). Estas restrições são limitadas superiormente por LS_j e inferiormente por LI_j.

Pelo fato do problema utilizado ser um problema de minimização, é necessário o uso de uma restrição de quantidade mínima de mistura. Como os coeficientes utilizados para os teores são dados em termos percentuais, utiliza-se preferencialmente como quantidade mínima 1ton ou 100ton, de forma a facilitar a interpretação dos resultados.

Para evitar que o modelo escolha como solução mais econômica quantidades nulas, coloca-se uma segunda restrição, denominada restrição de balanço. Note que sem estas duas últimas restrições (restrições de qualidade e de balanço) o modelo certamente escolheria como resultado mais econômico quantidades nulas para cada carvão.

A partir do exposto acima é possível montar o seguinte modelo de programação linear:

$$\text{Minimizar CUSTO TOTAL} = \sum_{i=1}^{n} c_i \, q_i \qquad (3.1)$$

sujeito a

$$LI_j \leq \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \, q_i \leq LS_j \,, \forall\, i \qquad \text{Restrições de qualidade} \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} q_i \geq D \qquad \text{Restrições de Balanço} \qquad (3.3)$$

$$q_j \geq 0, \forall\, j \qquad \text{Quantidades não negativas} \qquad (3.4)$$

É importante ressaltar alguns detalhes deste modelo. A linha da função objetivo (3.1), identificada pela expressão “minimizar”, apresenta o custo total a ser minimizado – a soma ponderada dos custos unitários de cada carvão que compõe a mistura. Na linha seguinte (3.2) tem-se um somatório das qualidades de cada carvão multiplicadas pela sua quantidade; neste caso desmembra-se cada equação em duas, sendo uma parte referente ao atendimento do limite superior e outra ao atendimento do limite inferior de cada qualidade requerida para a mistura. Desta forma, tem-se um total de 2M equações. Tais restrições se referem às características das misturas de carvões formadas e da previsão da qualidade do coque resultante desta mistura, além de outras condições de ordem técnica, comercial e estratégica (Yazaki, 1991). A restrição de balanço colocada em (3.3) fixa a quantidade mínima a ser produzida desta mistura. As equações representadas em (3.4) correspondem à não negatividade das quantidades de cada carvão.

No próximo item é apresentado o problema do carvão modelado como um problema de programação linear *fuzzy*.

3.5.O PROBLEMA FUZZY

O modelo apresentado no item 3.4 é típico da programação linear tradicional, onde todos os coeficientes utilizados são constantes, conhecidos como *crisp*.

Cabe ressaltar que, a caracterização de carvões para coqueificação é feita de maneira que se avaliem as propriedades químicas, físicas e físico químicas, e principalmente as propriedades petrográficas, classificando-o dentro do esquema do usuário.

Com relação aos teores (ou parâmetros de qualidade) de enxofre, de matéria volátil e de cinza são feitas as seguintes explicações:

- ✓ O enxofre é um elemento pernicioso para o aço, e sua inclusão no gusa do alto forno irá exigir uma dessulfuração da aciaria. Além disso, um aumento do teor de enxofre implica num aumento do volume de escória no alto forno.
- ✓ A matéria volátil é uma mistura de gases que se desprende do carvão, durante o aquecimento em temperaturas acima de 900^o C, ao abrigo do ar,

em condições normalizadas. Acima de 33%, a matéria volátil perde o seu significado como padrão de classificação. Para os padrões internacionais, comercialmente os carvões metalúrgicos se classificam em:

1. Baixos (*low volatile coal*) isto é, 24% ou menor conteúdo de voláteis.
2. Meios (*medium volatile coal*) isto é, entre 25% e 29% conteúdo de voláteis.
3. Altos (*high volatile coal*) isto é, maior de 30% conteúdo de voláteis.

✓ O conteúdo de cinzas reflete a limpeza do material. Portanto, é desejável o mínimo possível, porém, os processos de mineração impedem ter um material teórico com teor "*zero-ash*", dado que o processo de mineração por si só incluiu o material que é chamado de diluição ou estéril dentro do carvão.

Portanto, de forma a tornar esse modelo mais flexível e próximo ao problema real, onde existem variações nas qualidades dos carvões, considerou-se que seus coeficientes são números *fuzzy*, com diferentes faixas de variação para cada um deles.

No caso desse exemplo, assim como apresentado no item 3.4, considera-se que os coeficientes da matriz tecnológica, p_{ij}, que representam os teores de cada carvão, e do vetor de custos, c_i, que correspondem aos custos de cada um dos carvões, possuem incertezas e, por este motivo, são modelados como números *fuzzy* triangulares simétricos do tipo (Pedrycz and Gomide, 1998):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2\dfrac{x\text{-}a_1}{a_2\text{-}a_1}, \text{ para } a_1 \le x \le \dfrac{a_1 + a_2}{2} \\ 2\dfrac{x\text{-}a_2}{a_1\text{-}a_2}, \; para \; \dfrac{a_1 + a_2}{2} \le x \le a_2 \;, \\ 0, \quad \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

onde a_1 = limite inferior e a_2 = limite superior no intervalo

No próximo capítulo será apresentada a metodologia proposta para resolver problemas de programação linear *fuzzy*.