1– INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÃO

Apesar da existência de alguns trabalhos anteriores, pode-se dizer que, motivado pelos problemas formulados durante a 2ª Guerra Mundial, Dantzig (Dantzig, 1963) foi o responsável pela padronização da formulação de problemas de programação linear e da implementação de um método para sua resolução, o método *Simplex*. Este método ganhou um grande impulso com o aumento da capacidade computacional, permitindo a resolução de problemas com um crescente número de variáveis em um tempo progressivamente menor.

Após o trabalho de Dantzig, a programação linear teve um grande desenvolvimento, aparecendo diversos trabalhos e livros na área (Dantzig, 1963), (Hadley, 1963), (Simonnard, 1962), (Bazaraa, Jarvis et al. 1990), (Chvátal, 1983), (Taha, 1997) e (Tucker e Nering, 1993), onde são apresentados também diversos exemplos de aplicações. Entre os exemplos de aplicações podem ser citados, no setor industrial, os problemas de transportes, de alocação de recursos, de determinação dos níveis de atividade, de operação de refinarias de petróleo, entre outros.

Depois de um problema real ter sido modelado como um problema de programação linear e tendo sido identificada uma solução ótima, surgem indagações do tipo: "seria este resultado único?", "o que ocorreria se um dos dados de entrada mudasse um pouco?", ou, "qual a sensibilidade desta solução a mudanças nos dados iniciais?". Estas perguntas são motivadas, em grande parte, pelo fato de os dados utilizados inicialmente serem, muitas vezes, meras estimativas; seus valores tornam-se conhecidos somente após a obtenção de uma solução para o problema. Portanto, é de grande importância para a interpretação do modelo determinar a sua sensibilidade a mudanças em alguns parâmetros, tais como os preços dos elementos de entrada do modelo, como, por exemplo, preço dos carvões que serão misturados para formar o coque metalúrgico. Como geralmente é de vital relevância que as respostas às perguntas acima sejam rápidas, pois são objeto de tomada de decisão, procura-se fazer a análise da sensibilidade do modelo depois de otimizado, de modo a aproveitar a solução obtida, evitando a necessidade de resolvê-lo novamente. Segundo Taha (Taha, 1997), a meta da análise de sensibilidade é determinar se as mudanças nos coeficientes do modelo original deixarão a solução ainda ótima e, caso contrário, como a nova solução (caso exista) pode ser obtida eficientemente. Um dos primeiros trabalhos nesta área foi a análise de sensibilidade em um modelo de programação em uma companhia integrada de óleo (Charnes, Cooper et al., 1954). Em 1963, Hadley (Hadley, 1963) apresentou formalmente o problema de análise de sensibilidade ou análise pós-ótima. Alguns outros trabalhos de grande relevância foram surgindo, tais como o de Tomas Gal (Gal, 1979), que faz uma abordagem matemática dos principais tópicos de análise de sensibilidade, e o de Harvey Greenberg (Greenberg, 1983), no qual é descrito o sistema computacional (ANALYZE) que, baseado na teoria desenvolvida sobre análise de sensibilidade, ajuda nesta análise e na interpretação de resultados de modelos de programação linear, inclusive quando as soluções são infactíveis ou ilimitadas.

Muitos problemas em indústrias costumam ser colocados em termos de modelos de programação linear, sejam estes modelos de misturas, como no caso da indústria alimentícia, química e siderúrgica, ou modelos para determinação do caminho ótimo no setor de distribuição de energia elétrica (Stoll, 1989), entre outros. Portanto, pode-se dizer que a programação linear tem servido de apoio não só ao setor operacional, na determinação dos níveis de produção, mas também ao setor tático, como a compra de matérias-primas. Desse modo, a programação linear tem sido uma poderosa ferramenta de apoio à tomada de decisões nos diversos setores de uma indústria.

Especificamente no caso de empresas que utilizam o modelo de mistura para determinar a sua produção, usa-se o modelo de programação linear para determinar quais as matérias-primas a serem compradas, sejam elas ingredientes (indústrias de rações) ou carvões (indústrias siderúrgicas). Nestes, casos a negociação para compra é de vital importância para o preço final do produto acabado, ração ou aço. É, portanto, importante que se faça uma análise prévia da influencia da variação dos custos e das qualidades das matérias-primas utilizadas, antes do momento da negociação de compra, evitando otimizar o novo modelo a cada mudança no parâmetro discutido durante a negociação.

Diversas siderúrgicas brasileiras vêm utilizando um modelo de misturas anualmente na determinação dos carvões e das quantidades que devem ser usadas para compor o coque (que é uma mistura de carvões) a ser utilizado nos alto fornos. Uma vez determinadas, pela área técnica, as quantidades dos carvões a serem usados, a área comercial encarrega-se de fazer a negociação de compra dos escolhidos. Portanto, a decisão de comprar determinados carvões está, acima de tudo, baseada no modelo de programação linear. Este problema tem-se mostrado cada vez mais atual e presente no dia a dia das siderúrgicas a coque. Assim, faz-se necessária a existência de ferramentas que auxiliem na interpretação deste modelo de programação linear e que tornem mais fácil a análise pós-ótima por técnicos do setor de compras da companhia, que muitas vezes são leigos em programação linear.

Entretanto, a programação linear possui limitações quando da presença de incertezas e imprecisões nos dados de entrada. A ferramenta disponível para tratar estes casos, a análise de sensibilidade, apresenta, como resultado, faixa de valores em que os dados de entrada podem variar sem que a solução ótima encontrada seja alterada. Estando de posse dos possíveis valores que os insumos podem assumir numa negociação, o tomador de decisões gostaria de ter em mãos as possíveis soluções para cada um desses valores. Neste caso, a análise de sensibilidade não se mostra útil, o que motiva a procura de outras metodologias que se adaptem melhor a essa realidade. Uma dessas metodologias é a programação matemática *fuzzy*.

A programação matemática *fuzzy*, e em particular a programação linear *fuzzy*, é uma ferramenta que permite a inclusão de conceitos vagos e imprecisos no modelo do problema. Assim, este passa a ser descrito em termos de um modelo de programação linear *fuzzy*, possibilitando a incorporação de incertezas contidas nos coeficientes ao modelo tradicional – denominado *crisp* –, podendo, desta forma, tornar-se um sistema de apoio à tomada de decisão.

A aplicação do ferramental derivado dos conceitos de conjuntos *fuzzy* e de distribuição de possibilidade para a modelagem de informações imprecisas permite a resolução de problemas que normalmente não podem ser tratados pela programação matemática tradicional, como é o caso da programação linear. Entretanto, diferentemente da metodologia tradicional, onde é apresentado um ponto ou um conjunto finito de pontos como a solução ótima do problema, no modelo *fuzzy* a solução ótima não pode ser mais representada desta forma. Neste caso, a solução do problema é apresentado como uma região onde é possível se encontrar a solução ótima.

Muitos trabalhos desenvolvidos com o intuito de se resolver o problema de programação linear *fuzzy* obtêm a solução ótima a partir de cortes nas funções de pertinência dos coeficientes. Porém, para se ter uma solução com outro grau de pertinência é necessário repetir o mesmo processo. Este trabalho tem, portanto, como principal motivação a solução deste problema.

1.2. OBJETIVOS

As metodologias desenvolvidas para a resolução de um problema de programação linear *fuzzy* buscaram transformar este problema em um problema tradicional (*crisp*), para em seguida utilizar um método já conhecido, como o Método *Simplex* (Dantzig, 1972), ou o Método de Pontos Interiores (Hooker, 1986), para obter uma solução *crisp*. Esta transformação considera um determinado grau de incerteza para obter o modelo tradicional. Entretanto, a solução obtida representa apenas uma parte da incerteza, sendo necessário que se resolva novamente o problema toda vez que se quiser analisar outros graus de incerteza.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar, formalmente, uma metodologia para a determinação de um conjunto de soluções para um problema de programação linear *fuzzy*. A metodologia desenvolvida procura, por meio do conceito de α-*cuts*, em conjunto com números *fuzzy*, determinar a faixa de valores que compõem o valor ótimo da solução *fuzzy* para um problema de programação linear *fuzzy*. Esta solução apresenta o valor para cada uma das variáveis e o valor da função objetivo em termos de faixa de valores um número *fuzzy*; a cada variável são associadas funções de pertinência.

De posse dos valores obtidos para as variáveis e para o valor da função objetivo, é possível determinar um conjunto de cenários que servirão de base para o tomador de decisões que, de uma forma mais clara, poderá determinar o melhor tipo de solução para o seu problema em um instante de tempo determinado.

Como exemplo de aplicação prática utiliza-se a metodologia proposta em um problema de mistura de carvões para obtenção do coque para siderúrgicas.

Esse problema é inicialmente tratado no âmbito da programação linear tradicional e resolvido pelo método *simplex*; em seguida é resolvido no escopo de programação linear *fuzzy*, que permite levar em conta imprecisões nos coeficientes. Diferentemente do simples uso de intervalos para representar as faixas de variação dos coeficientes, a teoria dos conjuntos *fuzzy* disponibiliza uma forma de quantificar a possibilidade de cada valor estar dentro de seu intervalo de variação.

Embora o estudo de caso seja baseado num exemplo de pequeno porte, a metodologia *fuzzy* aqui desenvolvida pode ser utilizada em termos práticos, não sendo grande o esforço computacional adicional.

Observa-se, contudo, que o desenvolvimento de metodologias que se moldem ao problema acima exposto não é uma tarefa simples, visto que o problema de misturas é considerado um modelo de programação linear complexo e com uma matriz de coeficientes densa, o que torna mais difícil o uso das técnicas de programação linear quando se considera o ambiente *fuzzy*. Assim, torna-se necessário desenvolver técnicas simples e confiáveis para o uso corrente.

1.3. CONTRIBUIÇÕES

Esta tese apresenta as seguintes contribuições principais:

1. *Uma metodologia para resolução de problemas de programação linear fuzzy.*

   Ao contrário das técnicas já disponíveis na literatura, onde se apresenta apenas uma parte da solução possível, a metodologia aqui proposta apresenta um conjunto de soluções onde tanto os valores das variáveis quanto o valor ótimo para a função de custo, ou função objetivo, possuem uma função de pertinência associada. A solução apresentada desta forma permitirá ao usuário analisar os diversos cenários que ocorrem quando das mudanças dos dados de entrada do problema original. Observe-se que esta metodologia difere de outras que apresentam apenas um valor constante para cada grau de incerteza, sendo necessário resolver novamente o problema quando se considera outro grau de incerteza.

2. *Descrição do problema de mistura de carvões em termos de um modelo de programação linear fuzzy:*

O modelo de mistura de carvões é descrito na literatura como um modelo de programação linear onde os coeficientes são (números) determinísticos. No Capítulo 4 é apresentado o modelo de misturas de carvões em termos de um modelo de programação linear *fuzzy*. Este modelo permite que permite uma flexibilixação do modelo tradicional pois considera as incertezas e imprecisões advindas do mundo real, onde são adquiridos os insumos básicos (carvões) da mistura.

3. *Taxonomia de problemas de programação linear fuzzy:*

No Capítulo 2 é apresentada uma taxonomia sobre os principais trabalhos na área de programação linear *fuzzy*.

1.4. ESTRUTURA DA TESE

Este texto está dividido em mais 4 capítulos. O Capítulo 2 trata da teoria de programação linear *fuzzy*, apresentando também uma breve revisão de programação linear clássica. No Capítulo 3 é descrito o modelo geral para problemas de mistura, sendo dada atenção especial ao caso do problema de misturas de carvões para obtenção de coque siderúrgico. No Capítulo 4 é apresentada a metodologia proposta, baseada em programação linear *fuzzy*. Em seguida, no Capítulo 5, é apresentado um estudo de casos onde são aplicadas, em um problema real, a metodologia tradicional (programação linear *crisp*), a metodologia proposta no Capítulo 4, bem como a programação possibilística. Em seguida, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e trabalhos futuros.