7
Análise de Sensibilidade

7.1
Considerações Gerais

Conforme visto no Capítulo 5, os algoritmos utilizados neste trabalho necessitam das derivadas da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto para determinar a direção de busca do processo de otimização. De forma geral, estes gradientes são calculados a partir dos gradientes das respostas da estrutura e, dependendo do problema, as respostas de interesse podem ser deslocamentos, tensões, freqüências naturais e cargas críticas.

A análise de sensibilidade, também chamada de gradientes das respostas da estrutura, desempenha um papel central no processo de otimização, pois é avaliada a cada passo do algoritmo.

Os gradientes podem ser desenvolvidos de forma analítica, por diferenças finitas ou pelo método semi-analítico, sendo estes apresentados, de forma sucinta, a seguir:

(i) Método Analítico

O método analítico consiste na diferenciação direta das equações de equilíbrio lineares e não-lineares do problema. É um método preciso e eficiente, contudo, as expressões resultantes, em determinados casos, podem ser longas e de difícil obtenção, o que às vezes inviabiliza sua aplicação.

(ii) Diferenças Finitas (MDF)

A mais simples técnica para cálculo da sensibilidade com respeito a variável de projeto é a aproximação por diferenças finitas. Esta técnica é geralmente cara computacionalmente, mas é de fácil implementação e é muito utilizada. A idéia deste método é aproximar a derivada através da expressão a seguir:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{7.1}$$

onde Δx é uma perturbação absoluta suficientemente pequena para produzir resultados satisfatórios. Geralmente, essa perturbação é definida através da seguinte expressão:

$$\Delta x = \eta \cdot x \tag{7.2}$$

sendo η o valor da perturbação relativa.

A maior dificuldade no MDF é selecionar o valor da perturbação η, parâmetro fortemente ligado à precisão do método: um valor muito pequeno conduz a erros de arredondamento, causados pela forma como os números reais são representados nos computadores, enquanto que um valor muito grande conduz a erros de truncamento, pois a derivada só é exata quando Δx tende a zero. Perturbações relativas entre 10^{-4} a 10^{-8} geralmente levam a bons resultados, sendo suficiente para aplicações práticas.

(iii) Método Semi-Analítico

A idéia do Método Semi-Analítico é combinar a eficiência do Método Analítico com a simplicidade e generalidade do Método das Diferenças Finitas. Neste sentido, para o cálculo dos gradientes são utilizadas as expressões gerais obtidas a partir da diferenciação direta das equações de equilíbrio. Contudo, determinados termos dessas expressões são obtidos a partir do Método das Diferenças Finitas.

Assim como no MDF, a precisão deste método é controlada pelo tamanho das perturbações η adotadas. Empregando-se a mesma faixa de perturbações recomendadas anteriormente, os resultados, para a maioria dos casos práticos, são perfeitamente satisfatórios.

A seguir, a partir dos métodos descritos, em particular do método analítico, são desenvolvidas as expressões necessárias para o cálculo das sensibilidades empregadas no presente trabalho. Para facilitar a apresentação das equações, considera-se uma estrutura descrita por uma única variável.

7.2
Sensibilidade dos Deslocamentos

A sensibilidade dos deslocamentos de sistemas discretos, com relação às variáveis de projeto x, é obtida a partir da seguinte equação de equilíbrio:

$$F(x,u) = P(x) \tag{7.3}$$

Sendo que o vetor de forças externas $P(x)$ é, no caso mais geral, assim como o vetor das forças internas $F(x,u)$,dependente das variáveis de projeto.

Assim, diferenciando-se a equação de equilíbrio em relação a uma variável de projeto x, tem-se:

$$\frac{\partial F(x,u)}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial F(x,u)}{\partial x}=\frac{dP(x)}{dx} \tag{7.4}$$

O segundo termo da equação corresponde à derivada do vetor de forças internas em relação aos termos explícitos das variáveis de projeto, enquanto que o primeiro termo se deve à dependência implícita de ***F*** em relação a x por meio dos deslocamentos ***u***.

Reorganizando os termos da equação (7.4), e sendo a matriz de rigidez tangente definida por $K_t = \partial F(u,x)/\partial u$, tem-se:

$$K_t \frac{du}{dx}=\frac{dP(x)}{dx}-\frac{\partial F(x,u)}{\partial x} \tag{7.5}$$

e, finalmente,

$$\frac{du}{dx}=K_t^{-1}\left(\frac{dP(x)}{dx}-\frac{\partial F(x,u)}{\partial x}\right) \tag{7.6}$$

onde du/dx representa a sensibilidade dos deslocamentos com relação às variáveis de projeto x. A parcela do lado direito da equação (7.5) é denominada de *pseudo-forças.*

Se uma análise linear é desenvolvida, a parcela $\partial F/\partial x$ pode ser definida por:

$$\frac{\partial F(u,x)}{\partial x}=\frac{\partial (K(x).u)}{\partial x}=\frac{dK(x)}{dx}u \tag{7.7}$$

A sensibilidade dos deslocamentos locais dos elementos q é determinada empregando-se a matriz de transformação correspondente T_m, ou seja,

$$\frac{dq_m}{dx}=T_m\frac{du}{dx} \tag{7.8}$$

7.3 Sensibilidade das Forças Externas {P(x)}

A sensibilidade das forças externas é basicamente construída a partir das variações nas parcelas de carga relativas ao peso próprio dos elementos estruturais envolvidos no processo, sendo, no caso específico, estes elementos constituídos apenas por pilares. Contudo, a utilização do conceito de vão efetivo e o emprego do parâmetro de instabilidade γ_z para avaliar, de forma aproximada, os efeitos de 2ª ordem, introduz no sistema parcelas adicionais àquelas devidas ao peso próprio.

7.3.1 Parcelas devidas ao Peso Próprio

Sendo i_m e j_m os nós inicial e final do elemento l_m, o gradiente associado às componentes verticais de força, $Pz(x)$, no sistema de coordenadas global, é dada por:

$$\frac{dPz_{i_m}}{dx} = \frac{dPz_{j_m}}{dx} = \frac{dAx_m}{dx}\frac{l_m}{2}\rho_c \tag{7.9}$$

onde Ax_m é a área da seção transversal do elemento l_m; e ρ_c é o peso específico do concreto.

Uma vez que apenas pilares são considerados no processo ótimo, as demais componentes de força apresentam gradientes nulos.

7.3.2 Parcelas devidas à consideração do vão Efetivo

A consideração do vão efetivo ℓ_{ef} das vigas, conforme definido na equação (3.1), e a definição de cargas ao longo das barras tornam o vetor das forças externas sensível às variações dimensionais dos pilares. Tais sensibilidades, geralmente desprezadas, podem ser avaliadas pelo Método das Diferenças Finitas por:

$$\frac{dM_i}{dx} = \frac{M_i(\ell_{ef} - \Delta x) - M_i(\ell_{ef})}{\Delta x} \tag{7.10a}$$

$$\frac{dV_i}{dx} = \frac{V_i(\ell_{ef} - \Delta x) - V_i(\ell_{ef})}{\Delta x} \tag{7.10b}$$

onde M_i e V_i são as forças nodais calculadas a partir das expressões (3.2), apresentadas no item (3.1.1); Δx corresponde à perturbação dimensional dos pilares, que conduz a um encurtamento de ℓ_{ef}, a partir da lateral esquerda ou direita, dependendo da posição do pilar em relação à viga. É possível, ainda, que a redução ocorra simultaneamente nas duas extremidades, caso ambos os pilares pertençam ao mesmo grupo. O uso do MDF na determinação de dP/dx torna o método utilizado no cálculo de du/dx semi-analítico.

Caso apenas cargas nodais sejam impostas ao sistema, ou o comprimento efetivo das vigas não seja considerado, as forças externas serão admitidas independentes de x, ou seja, $dP/dx = 0$. Igual resultado é obtido se a variável de projeto em questão é o f_{ck}.

7.3.3 Parcelas devidas ao parâmetro γ_z

Como visto em (2.12), os efeitos de 2ª ordem podem ser obtidos a partir da majoração adicional dos esforços horizontais da combinação de carregamento considerada por $0{,}95\gamma_z$. Desta forma, quando tal aproximação for aplicada, as cargas horizontais tornam-se sensíveis as variáveis de projeto, uma vez que γ_z é dependente dos deslocamentos das estrutura.

Admitindo-se que as cargas horizontais são constituídas apenas pelas cargas acidentais devidas ao vento, Vx e Vy ,o gradiente do vetor das forças externas, no sistema de coordenadas global, relativo ao parâmetro γ_z, é dado por:

$$\frac{dVx_i}{dx} = 0.95 \cdot Vx \frac{d\gamma_{z,x}}{dx} \tag{7.11a}$$

$$\frac{dVy_i}{dx} = 0.95 \cdot Vy \frac{d\gamma_{z,y}}{dx} \tag{7.11b}$$

sendo

$$\frac{d\gamma_{z,x}}{dx} = \gamma_{z,x}{}^2 \frac{1}{My_{1,tot,d}} \frac{d\Delta My_{tot,d}}{dx} \tag{7.11a}$$

$$\frac{d\gamma_{z,y}}{dx} = \gamma_{z,y}{}^2 \frac{1}{Mx_{1,tot,d}} \frac{d\Delta Mx_{tot,d}}{dx} \tag{7.11b}$$

e

$$\frac{d\Delta Mx_{tot,d}}{dx} = \sum_{i=1}^{nn} \left(Pz_i \frac{dv_i}{dx} + \frac{dPz_i}{dx} v_i \right) \tag{7.11a}$$

$$\frac{d\Delta My_{tot,d}}{dx} = \sum_{i=1}^{nn} \left(Pz_i \frac{du_i}{dx} + \frac{dPz_i}{dx} u_i \right) \tag{7.11b}$$

Sendo nn o número de nós da estrutura

7.4
Sensibilidade dos Esforços Internos Solicitantes

A sensibilidade dos esforços internos solicitantes em relação às variáveis de projeto x é obtida diferenciando-se as expressões que definem estes esforços nas extremidades de cada elemento. Na forma geral, é apresentada como:

$$\frac{df_m}{dx} = \frac{\partial f_m}{\partial x} + \frac{\partial f_m}{\partial q}\frac{dq}{dx} \tag{7.12}$$

As parcelas explícitas e implícitas das derivadas de f_m, em relação à variável x, são apresentadas separadamente com a finalidade de evidenciar a parcela explícita, a qual é empregada no cálculo das *pseudo-forças*. Assim, admitindo-se, inicialmente, que nenhuma fonte de não linearidade é considerada, têm-se as seguintes expressões:

$$\frac{dNx_2}{dx} = E.\frac{dAx}{dx} \cdot u_2' + E \cdot Ax \cdot \frac{du_2'}{dx} \tag{7.13a}$$

$$\frac{dNx_1}{dx} = -\frac{dNx_2}{dx} \tag{7.13b}$$

$$\frac{dMy_2}{dx} = -E.\frac{dIy}{dx} \cdot w_2'' - E.Iy.\frac{dw_2''}{dx} \tag{7.13c}$$

$$\frac{dMy_1}{dx} = E.\frac{dIy}{dx} \cdot w_1'' + E.Iy.\frac{dw_1''}{dx} \tag{7.13d}$$

$$\frac{dMz_2}{dx} = E.\frac{dIz}{dx} \cdot v_2'' + E.Iy.\frac{dv_2''}{dx} \tag{7.13e}$$

$$\frac{dMz_1}{dx} = -E.\frac{dIz}{dx} \cdot v_1'' - E.Iy.\frac{dv_1''}{dx} \tag{7.13f}$$

$$\frac{dVy_2}{dx} = -\left(\frac{dMz_2}{dx} + \frac{dMz_1}{dx} \right) \Big/ L \tag{7.13g}$$

$$\frac{dVy_1}{dx} = -\frac{dVy_2}{dx} \tag{7.13h}$$

$$\frac{dVz_2}{dx} = \left(\frac{dMy_2}{dx} + \frac{dMy_1}{dx}\right) \Big/ L \tag{7.13i}$$

$$\frac{dVz_1}{dx} = -\frac{dVz_2}{dx} \tag{7.13j}$$

$$\frac{dMx_2}{dx} = \frac{dMx_1}{dx} = 0.0 \tag{7.13k}$$

Quando os efeitos da não linearidade geométrica são considerados, parcelas adicionais, às apresentadas nas equações (7.13), devem ser construídas a partir da diferenciação das expressões (3.14), nas quais a parcela não-linear dos esforços internos, nos extremos das barras, são apresentados.

Para os casos em que a variável de projeto em questão é o f_{ck}, a parcela explicita dos gradientes precisa ser alterada. Assim, considerando que, dentro do modelo de análise empregado, todas as forças internas são diretamente proporcionais ao módulo de elasticidade E_{ci}, a parcela explicita dos gradientes é dada por:

$$\frac{\partial f_m}{\partial f_{ck}} = \frac{f_m}{E_{ci}} \cdot \frac{dE_{ci}}{df_{ck}} \tag{7.14}$$

Onde:

$$\frac{dE_{ci}}{df_{ck}} = \frac{2800}{\sqrt{f_{ck}}} \tag{7.15}$$

Valor este obtido por diferenciação direta da expressão (3.4).

As expressões apresentadas correspondem à sensibilidade dos esforços internos no sistema local de coordenadas. Assim, antes de empregar a parcela explícita de df_m/dx na equação (7.5), para o cálculo das *pseudo-forças*, estas devem ser transportadas para o sistema global a partir da matriz de transformação.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = T_m^T \frac{\partial f_m}{\partial x} \tag{7.16}$$

.

7.5 Sensibilidade da Armadura

Como citado no capítulo 6, item (6.2), dentro do modelo proposto, uma etapa computacional a mais é exigida a fim de integrar os módulos locais de otimização com o sistema de otimização global.

A integração entre os níveis é realizada por intermédio dos gradientes das variáveis locais (As e Asw) em relação às variáveis globais (*B1, H1, B2* e f_{ck}).

7.5.1 Sensibilidade da Armadura Longitudinal

O gradiente da armadura longitudinal pode ser obtido diferenciando-se a equação de equilíbrio das forças internas, na seção crítica do elemento,

$$Rd = Sd \tag{7.17}$$

onde Sd representa os esforços internos solicitantes de projeto e Rd os esforços internos resistentes.

Durante o dimensionamento de uma seção de concreto armado, além da armadura, outros parâmetros são determinados a nível local. Estes parâmetros são a deformação D e a inclinação da linha neutra α, que são utilizados no processo de diferenciação da equação (7.17), como mostrado a seguir:

$$\frac{\partial Rd}{\partial x} + \frac{\partial Rd}{\partial D}\frac{dD}{dx} + \frac{\partial Rd}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial Rd}{\partial As}\frac{dAs}{dx} = \frac{dSd}{dx} \tag{7.18}$$

Reorganizando-se os termos obtém-se,

$$\frac{\partial Rd}{\partial D}\frac{dD}{dx} + \frac{\partial Rd}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial Rd}{\partial As}\frac{dAs}{dx} = \frac{dSd}{dx} - \frac{\partial Rd}{\partial x} \tag{7.19}$$

A expressão (7.19) assemelha-se à equação (7.5), onde o termo à direita da igualdade representaria as pseudo-forças. Os gradientes dos esforços resistentes em relação aos parâmetros D, α e As representam a matriz de rigidez tangente correspondente à configuração deformada resistente última da seção de concreto armado. Os gradientes dD/dx, $d\alpha/dx$ e dAs/dx equivalem aos gradientes dos deslocamentos. Assim, explicitando-se os esforços solicitantes e resistentes de projeto e reescrevendo a equação (7.19) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial MRd_y}{\partial D} & \dfrac{\partial MRd_y}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial MRd_y}{\partial As} \\ \dfrac{\partial MRd_z}{\partial D} & \dfrac{\partial MRd_z}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial MRd_z}{\partial As} \\ \dfrac{\partial NRd_x}{\partial D} & \dfrac{\partial NRd_x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial NRd_x}{\partial As} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{dD}{dx} \\ \dfrac{d\alpha}{dx} \\ \dfrac{dAs}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{dMSd_y}{dx} - \dfrac{\partial MRd_y}{\partial x} \\ \dfrac{dMSd_z}{dx} - \dfrac{\partial MRd_z}{\partial x} \\ \dfrac{dNSd_x}{dx} - \dfrac{\partial NRd_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(7.20)}$$

Do sistema (7.20), a única incógnita de interesse corresponde ao gradiente de *As*, dAs/dx. Os termos que compõem a matriz tangente são todos conhecidos, já que estes são determinados em uma etapa anterior, durante o processo de dimensionamento da seção. Desta forma, apenas as parcelas correspondentes aos gradientes totais dos esforços solicitantes, $dMSd_y/dx$, $dMSd_z/dx$ e $dNSd_x/dx$, e os gradientes explícitos dos esforços resistentes de projeto, $\partial MRd_y/\partial x$, $\partial MRd_z/\partial x$ e $\partial NRd_x/\partial x$, associados às *pseudo-forças*, precisam ser determinadas nesta etapa. Tais parcelas são apresentadas nos itens (7.6) e (7.7).

7.5.2
Sensibilidade da Armadura Transversal

A partir das expressões (4.29) e (4.30), o gradiente da armadura transversal em relação às variáveis de projeto é dado por:

(i) Pilar

$$\frac{dAsw}{dx} = 0{,}0001415 \cdot \frac{dPe_{As}}{dx} \qquad \textbf{(7.21)}$$

(ii) Pilar-Parede

$$\frac{dAsw}{dx} = 0{,}25 \cdot \frac{dAs}{dx} \qquad \textbf{(7.22)}$$

onde:

Pe_{As}: perímetro ao longo do qual a armadura longitudinal é distribuída;

Caso a variável de projeto em questão seja o f_{ck}, o gradiente de Pe_{As} é nulo.

7.6
Sensibilidade dos Esforços Solicitantes de Projeto

Da mesma forma que os esforços solicitantes, gerados a partir da análise, precisaram incorporar parâmetros, tais como excentricidade acidental e efeitos locais de 2ª ordem, para que estes esforços fossem empregados no dimensionamento das seções de concreto, faz-se, também, necessário incorporar tais parâmetros no cálculo dos gradientes dos esforços solicitantes de projeto. As expressões resultantes desta incorporação são apresentadas nos itens a seguir.

7.6.1
Seção Crítica nos Extremos dos Pilares

Neste caso, apenas a consideração da excentricidade acidental e_a faz-se necessário. Assim, tem-se o gradiente dos momentos finais determinados por:

$$\frac{dMsd}{dx} = \frac{dM_{1d,A}}{dx} + sign\left(M_{1d,A}\right) \cdot sign\left(N_x\right) \frac{dN_x}{dx} \cdot e_a \qquad \textbf{(7.23)}$$

$M_{1d,A}$ tem a mesma definição de (4.2.5.2).

7.6.2
Seção Crítica no Centro dos Pilares – Efeitos locais de 2ª ordem

Para as seções intermediárias, deve-se incorporar, além da excentricidade acidental, os efeitos locais de 2ª ordem. Assim, dependendo do método aplicado na determinação dos momentos locais de 2ª ordem, as expressões empregadas na determinação dos gradientes dos momentos finais assumem as seguintes formas:

(i) Pilares calculados a partir do pilar padrão com curvatura aproximada

$$\begin{aligned}\frac{dMsd}{dx} = \alpha_b \frac{dM_{1d,A}}{dx} + sign\left(M_{1d,A}\right) \cdot sign\left(N_x\right) \frac{dN_x}{dx} \cdot \left(e_a + e_2\right) + \\ + sign\left(M_{1d,A}\right) \cdot abs\left(N_x\right) \cdot \frac{de_2}{dx}\end{aligned} \qquad \textbf{(7.24)}$$

com

$$\frac{de_2}{dx} = -0{,}005 \cdot \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx} \qquad \textbf{(7.25)}$$

Nas expressões acima é admitido que $\nu \geq 0{,}5$ e que $\frac{d\alpha_b}{dx} = 0$.

Caso a variável de projeto em questão seja o f_{ck}, o gradientes $\frac{de_2}{dx}$, devido a sua independência em relação a esta variável, torna-se nulo.

(ii) Pilares calculados a partir do pilar padrão com rigidez aproximada

Neste caso, o gradiente pode ser obtido por diferenciação direta das expressões (4.26 e 4.27). Desta forma, adicionando-se, após a diferenciação, os efeitos devido a excentricidade acidental, obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{dMsd}{dx} = -sign(M_{1d,A}) \cdot \left(\frac{dB}{dx} \cdot M_{d,tot} + \frac{dC}{dx} \right) \Big/ \left(2 \cdot A \cdot M_{d,tot} + B\right) + \\ + sign(M_{1d,A}) sign(N_x) \frac{dN_x}{dx} \cdot e_a \tag{7.26}$$

sendo:

$$\frac{dB}{dx} = \frac{dN_d}{dx} \cdot h \cdot \left(3.840 - \lambda^2\right) + N_d \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \left(3.840 - \lambda^2\right) + 2 \cdot N_d \cdot h \cdot \lambda \cdot \frac{d\lambda}{dx} - \\ -19.200 \cdot \alpha_b \cdot \frac{dM_{1d,A}}{dx}; \tag{7.27b}$$

$$\frac{dC}{dx} = -3.840 \cdot \alpha_b \cdot \left(\frac{dN_d}{dx} \cdot h \cdot M_{1d,A} + N_d \cdot \frac{dh}{dx} \cdot M_{1d,A} + N_d \cdot h \cdot \frac{dM_{1d,A}}{d} \right) \tag{7.27b}$$

$M_{d,tot}$, A, B e C têm as mesmas definições de (4.2.5.2).

Para os casos em que os momentos finais de projeto, Msd, forem inferiores ao momento mínimo $M_{1d,mim}$, adotar-se-á:

$$\frac{dMsd}{dx} = \frac{dM_{1d,\min}}{dx} = sign(Msd) \cdot \left(sign(Nx) \frac{dNx}{dx} \cdot 0{,}015 + abs(Nx) \cdot 0{,}03 \cdot \frac{dh}{dx} \right) \tag{7.28}$$

onde h é a altura da seção na direção considerada.

7.7
Sensibilidade dos Esforços Resistentes de Projeto

Admitindo-se como constantes a armadura As e as deformações extremas da seção , cujos valores correspondem a configuração deformada resistente última da mesma, novos esforços resistentes da seção são calculados para uma variável de projeto tomada igual a $x + \Delta x$. Assim, empregando-se o MDF, os gradientes dos esforços resistentes de projeto são obtidos por:

$$\frac{\partial MRd_y}{\partial x} = \frac{MRd_y(x+\Delta x) - MRd_y(x)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial MRd_y}{\partial x} = \frac{MRd_y(x+\Delta x) - MRd_y(x)}{\Delta x} \qquad \textbf{(7.29)}$$
$$\frac{\partial NRd_x}{\partial x} = \frac{NRd_x(x+\Delta x) - NRd_x(x)}{\Delta x}$$

Caso a variável de projeto em questão seja o f_{ck}, os gradientes relativos aos esforços resistentes assumem uma outra forma. Considerando que a resistência da seção é composta por duas parcelas distintas, uma correspondente ao aço $\left(Rd_{aço}\right)$ e outra parcela correspondente ao concreto $\left(Rd_{con}\right)$, e sendo esta última parcela diretamente proporcional ao f_{ck}, os referidos gradientes podem ser determinados diretamente, a partir da parcela resistente relativa ao concreto, pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial MRd_y}{\partial f_{ck}} = \frac{MRd_{y,con}}{f_{ck}}$$
$$\frac{\partial MRd_z}{\partial f_{ck}} = \frac{MRd_{z,con}}{f_{ck}} \qquad \textbf{(7.30)}$$
$$\frac{\partial NRd_x}{\partial f_{ck}} = \frac{NRd_{x,con}}{f_{ck}}$$