

2

Teoria da Informação no Sistema MIMO

Nesta sessão são apresentados os fundamentos teóricos relacionados à capacidade de um sistema com múltiplas antenas no transmissor e receptor, procurando-se interpretar os resultados e fazer uma comparação com os sistemas tradicionais de transmissão.

Inicialmente são apresentados o modelo matemático para o sistema MIMO e o ambiente de propagação considerado para a análise da capacidade do canal.

2.1

Modelo Matemático para o canal MIMO

Um canal rádio de faixa estreita é praticamente caracterizado por um ganho que não varia ao longo da faixa. Fazendo esta consideração para os diversos canais de um sistema MIMO, pode-se escrever que o sinal recebido na antena receptora i correspondente a um sinal $s_j(t)$ na antena transmissora j será dado por $G_{i,j}s_j(t)$ onde $G_{i,j}$ é o ganho do sub-canal entre a antena transmissora j e a antena receptora i . Considerando o conjunto de N antenas transmissoras, o sinal recebido na antena receptora i será:

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^N s_j(t)G_{i,j} + n_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

onde $n_i(t)$ é o ruído na saída da antena receptora i . Definindo os vetores $\mathbf{s}^T = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)]$, $\mathbf{r}^T = [r_1(t), r_2(t), \dots, r_M(t)]$, $\mathbf{n}^T = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)]$ e a matriz $\mathbf{G}$ ($M \times N$) de elemento genérico $G_{i,j}$, pode se escrever:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (2)$$

Em uma transmissão com sinais passa-faixa, os sinais, assim como os ganhos do canal, podem ser representados por suas envoltórias complexas. A Equação 2 representa um único usuário MIMO comunicando através de um canal com desvanecimento plano e ruído gaussiano branco (AWGN). A única interferência presente é a própria interferência entre os fluxos de entrada nos sistemas MIMO.

No ambiente de propagação é assumida a situação ideal para a transmissão. Assim, vários canais paralelos que são aleatórios e estatisticamente independentes, são criados. O canal é conhecido no receptor, mas não no transmissor [1, 2].

2.2

Análise da capacidade

A capacidade do canal é um dos parâmetros mais importantes no desempenho de um sistema de transmissão e estabelece o limite na taxa de bits que pode ser transmitida através do canal. Este limite é obtido utilizando-se um modelo probabilístico para o sistema de transmissão onde mensagens de natureza aleatória são transmitidas em um canal, usando-se para isto um conjunto de sinais definidos de acordo com um determinado esquema de codificação (modulação). Neste modelo, a capacidade do canal é definida como o valor máximo da informação mútua entre os sinais transmitido e recebido considerando o conjunto de possíveis distribuições de probabilidade do sinal transmitido.

A informação mútua entre os sinais transmitido e recebido é uma função da densidade de probabilidade conjunta dos dois sinais. Conhecendo-se a função densidade de probabilidade do sinal transmitido e as características do canal, pode-se determinar a função densidade conjunta dos sinais transmitidos e recebidos e estabelecer um método de maximização que leve à capacidade do canal.

Sabe-se que se o sinal transmitido é uma seqüência $\{s_k\}$ de amostras discretas no tempo com média nula e variância P_s e o canal é de banda limitada a um valor B com ruído aditivo Gaussiano branco e ganho unitário, a capacidade é atingida supondo que $\{s_k\}$ é um vetor Gaussiano com componentes

estatisticamente independentes. Neste caso, tem-se a expressão conhecida da capacidade dada por

$$C = \log_2 \left(1 + \frac{P_R}{P_n} \right) \text{ bit / s / Hz} \quad (3)$$

onde $P_R = P_s$ é a potência do sinal no receptor e P_n é a potência do ruído na banda B do canal.

A seguir serão desenvolvidas algumas expressões de capacidade baseadas nos fundamentos resumidos acima. De início o resultado contido em (3) é estendido ao caso de um único canal, ou seja, um sistema SISO (*Single-Input, Single-Output*) transmitindo um sinal complexo em canal com ganho complexo aleatório, procurando-se obter uma expressão da capacidade do canal para um dado valor do ganho deste canal em função da razão sinal-ruído média.

Com a consideração de um ganho G qualquer no canal fica

$$C = \log_2 \left(1 + \frac{P_T |G|^2}{P_n} \right) \quad (4)$$

sendo P_T a potência transmitida. Considerando G uma variável aleatória, pode se definir uma razão sinal-ruído média como

$$\rho = \frac{P_T E(|G|^2)}{P_n} \quad (5)$$

onde E representa o valor esperado e $E(|G|^2)$ é o ganho médio de potência do canal. Usando (4) e (5), pode se então escrever

$$C = \log_2 \left(1 + \frac{P_T |G|^2}{P_n} \right) = \log_2 \left(1 + \rho |H|^2 \right) \quad (6)$$

$$\text{onde } H = \frac{G}{\sqrt{E(|G|^2)}}$$

Ou seja, H é o ganho normalizado do canal, caracterizado por uma variável aleatória complexa de valor médio quadrático de módulo unitário, isto é

$$E(|H|^2) = 1 \quad (7)$$

2.3

Capacidade com diversidade

Para um sistema com uma única antena transmissora e M receptoras, ou seja SIMO (*Single-Input, Multiple-Output*), supondo que o valor médio quadrático dos ganhos é igual, isto é, $E(|G_{j,1}|^2) = E(|G|^2)$ $j=1,2,...,M$, e que os sinais podem ser combinados coerentemente, tem-se que a potência média do sinal combinado será $M^2 P_T E(|G|^2)$. Levando em conta as M componentes de ruído de mesma potência, P_n que se somam de forma descorrelacionadas, obtém-se:

$$SNR_{SIMO} = \frac{M^2 P_T E(|G|^2)}{M P_n} = M \rho |H|^2 \quad (8)$$

e a capacidade é dada por

$$C = \log_2 \left(1 + \rho \sum_{i=1}^M |H_{j1}|^2 \right) \text{ bits / s / Hz} \quad (9)$$

onde $H_{j,1}$ são os ganhos do canal normalizado para a antena receptora j e ρ é a razão sinal-ruído média dada por (5). É importante observar na Equação (9) que o aumento do número das antenas no receptor resulta em apenas um crescimento logarítmico da capacidade média.

Para um sistema MISO (*Multiple-Input, Single-Output*), N antenas são utilizadas para transmitir e a potência total transmitida é dividida entre as N antenas. Supondo que o valor médio quadrático dos ganhos é igual, isto é, $E(|G_{1,i}|^2) = E(|G|^2)$ $i=1,2,...,N$, a potência do sinal combinado coerentemente será $N^2 (P_T/N) E(|G|^2)$. A razão sinal-ruído média de longo prazo será

$$SNR_{MISO} = \frac{N^2 (P_T/N) E(|G|^2)}{P_n} = N \rho |H|^2 \quad (10)$$

e a capacidade pode ser dada por:

$$C = \log_2 \left(1 + \rho \sum_{i=1}^N |H_{1,i}|^2 \right) \quad b/s/Hz \quad (11)$$

sendo $H_{1,i}$ os ganhos do canal normalizado e ρ é dado por (5).

É possível perceber novamente o crescimento logarítmico da capacidade média com o aumento das antenas transmissoras. Para os sistemas SIMO e MISO, técnicas que maximizam a *SNR* (antenas adaptativas e MRC - *Maximum Ratio Combining*) são utilizadas para aumentar a capacidade do canal.

O sistema MIMO (*Multiple-Input, Multiple-Output*) pode ser visto como uma combinação dos casos SIMO e MISO. Para um sistema MIMO com N transmissores e M receptores, a capacidade do canal é dada por

$$C = \log_2 \left(1 + \rho \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N |H_{ji}|^2 \right) \quad b/s/Hz \quad (12)$$

Considera-se aqui que todos os canais têm o mesmo ganho médio de potência de longo prazo, ou seja, $E[|G_{ji}|^2] = E[|G|^2]$. Isto permite utilizar (5).

Como nos outros sistemas com múltiplas antenas, a premissa da Equação (12) é maximizar a capacidade do canal pela maximização da razão sinal-ruído para um único sinal transmitido. Contudo, a capacidade de um canal MIMO pode ser aumentada drasticamente se for considerado a transmissão de diferentes sinais através de cada antena transmissora [1, 3], aproveitando os múltiplos canais que o sistema MIMO proporciona. Este problema é analisado na próxima seção.

2.4

Capacidade de N canais paralelos

Em [47] são mostrados os seguintes resultados fundamentais da teoria da informação para canais discretos sem memória com ruído aditivo gaussiano branco e potência total de transmissão restrita a um valor P . No caso de N canais paralelos e descorrelacionados, cada um com ganho unitário, tem-se:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (13)$$

onde $\mathbf{r}$ é o sinal recebido, $\mathbf{s}$ o sinal transmitido e $\mathbf{n}$ o ruído gaussiano branco.

Supondo que a potência de ruído em cada canal é $\sigma_i^2, i=1,2,\dots,N$, a capacidade do canal é atingida quando as diversas componentes do sinal são estatisticamente independentes e é dada por:

$$C = \max_{\pi_i} \left(\sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{\pi_i}{\sigma_i^2} \right) \right) \quad (14)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^N \pi_i \leq P \quad (15)$$

Onde π_i é a potência transmitida em cada canal paralelo. O máximo em (14) é obtido para

$$\pi_i^* = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma_i^2}{\pi_i} & ; \quad \mu - \frac{\sigma_i^2}{\pi_i} > 0 \\ 0 & ; \quad \mu - \frac{\sigma_i^2}{\pi_i} \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

onde μ deve ser determinado para satisfazer (15) com igualdade. O processo de obtenção do valor μ é denominado “*waterfilling*”, e a potência ótima é achada iterativamente. A capacidade é dada por

$$C = \sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{\pi_i^*}{\sigma_i^2} \right) \quad (17)$$

Confrontando (17) com (3) observa-se que a capacidade total é a soma das capacidades de cada um N canais paralelos com as potências ótimas.

Os resultados acima podem ser estendidos a canais com ganho G_i quaisquer. Em particular, considere se o caso em que as potências do ruído em todos os receptores são iguais a σ^2 . Então, pode se re-escrever (13) como:

$$r_i = G_i s_i + n_i; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

onde $E[n_i^2] = \sigma^2$. Dividindo-se por G_i , tem se:

$$r_i' = \frac{r_i}{G_i} = s_i + \frac{n_i}{G_i} \quad (19)$$

Observa se então que o sistema pode ser analisado como os resultados anteriores fazendo $\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{G_i^2}$. Ou seja, a capacidade será dada por:

$$C = \sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{\pi_i^*}{\sigma^2} G_i^2 \right) \quad (20)$$

Nota-se que $\frac{\pi_i^*}{\sigma^2} G_i^2 = \text{SNR}_i^*$ é a razão sinal-ruído no i -ésimo receptor.

Assim a capacidade pode ser escrita como:

$$C = \sum_{i=1}^N \log_2 (1 + \text{SNR}_i^*) \quad (21)$$

Para uma distribuição igual de potência entre os transmissores, tem se:

$$C = \sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{P_T}{N\sigma^2} |G_i|^2 \right) \quad (22)$$

A extensão para o caso de sinais de RF representados por suas envoltórias complexas pode ser feita sem maiores dificuldades. As principais considerações a serem feitas são: (i) que as componentes do sinal do ruído e os ganhos do canal são complexos; (ii) os valores médios quadráticos destas componentes devem ser tomados em módulo.

No caso de um canal com ganhos aleatórios, pode se fazer a mesma normalização realizada anteriormente:

$$H_i = \frac{G_i}{\sqrt{E(|G_i|^2)}} \quad (23)$$

Adicionalmente, pode se considerar que todos os ganhos têm o mesmo valor médio quadrático, e assim definir:

$$\rho = \frac{P_T E(|G|_i^2)}{\sigma^2} \quad (24)$$

e tem-se a seguinte capacidade:

$$C = \sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + \rho \frac{\pi_i^*}{P_T} |H_i|^2 \right) \quad (25)$$

sendo $\frac{\pi_i^*}{P_T}$ a fração da potência atribuída ao transmissor i . Se a potência for distribuída igualmente entre todos os N transmissores, chega-se a:

$$C = \sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N} |H_i|^2 \right) \quad (26)$$

2.5

Redução de um sistema MIMO a um sistema de canais paralelos

Será mostrado a seguir que um sistema MIMO pode ser reduzido a um sistema de canais paralelos com a mesma capacidade obtida para o mesmo sinal de entrada. Esta redução é feita através da decomposição de valor singular da matriz de ganhos do canal, ou seja

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \quad (27)$$

onde $\mathbf{G}$ é uma matriz $(M \times N)$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes ortogonais $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}$ com dimensões $M \times M$ e $N \times N$, respectivamente, $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal $M \times N$ cujos os elementos da diagonal são iguais à raiz quadrada dos autovalores de $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ e $(^H)$ significa conjugada-transposta. As colunas de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são os autovetores de $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ e $\mathbf{G}^H\mathbf{G}$, respectivamente.

Usando (27) em (2), tem-se:

$$\mathbf{r} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (28)$$

Definindo

$$\tilde{r} = U^H r$$

$$\tilde{s} = V^H s$$

$$\tilde{n} = U^H n$$

tem se:

$$\tilde{r} = D\tilde{s} + \tilde{n} \quad (29)$$

Pode-se mostrar que este sistema com entrada $\tilde{s}$, canal D , ruído $\tilde{n}$ e saída $\tilde{r}$ é equivalente a (28) no que se refere à capacidade, ou seja, tem se a mesma capacidade para a mesma fdp (função densidade de probabilidade) do sinal de entrada.

Pode-se mostrar também que o número máximo de autovalores não nulos é igual a $m = \min(M, N)$. Assim, $\mathbf{D}$ pode ser escrita como:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_N^{1/2} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ se } M > N$$

ou

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_M^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \text{ se } M < N$$

Para o caso $M > N$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{r}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_N^{1/2} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{s}_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{n}_M \end{pmatrix}$$

$$\tilde{r}_1 = \lambda_1^{1/2} \tilde{s}_1 + \tilde{n}_1$$

$$\tilde{r}_2 = \lambda_2^{1/2} \tilde{s}_2 + \tilde{n}_2$$

...

$$\tilde{r}_N = \lambda_N^{1/2} \tilde{s}_N + \tilde{n}_N$$

...

$$\tilde{r}_M = \tilde{n}_M$$

Assim, tem-se N canais paralelos para ($M > N$). Todos os sinais transmitidos são relevantes e tem-se $M - N$ receptores apenas com ruído.

Para o caso $M < N$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_1 \\ \dots \\ \tilde{r}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_M^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \dots \\ \tilde{s}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \dots \\ \tilde{n}_M \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= \lambda_1^{1/2} \tilde{s}_1 + \tilde{n}_1 \\ \tilde{r}_2 &= \lambda_2^{1/2} \tilde{s}_2 + \tilde{n}_2 \\ &\dots \\ \tilde{r}_M &= \lambda_M^{1/2} \tilde{s}_M + \tilde{n}_M \end{aligned}$$

Assim, tem-se M canais paralelos para ($M < N$). Todos os receptores são relevantes e $M - N$ transmissores não são usados.

Com a redução do sistema MIMO de matriz do canal G a um sistema com m canais paralelos independentes, pode se determinar a capacidade do canal através de (20) substituindo G_i^2 por λ_i , isto é

$$C = \sum_{i=1}^m \log_2 \left(1 + \frac{\pi_i^*}{\sigma^2} \lambda_i \right) \quad (30)$$

Para um sistema em que a potência, P_T , é distribuída igualmente nas N antenas transmissoras, pode se aplicar (22) obtendo

$$C = \sum_{i=1}^m \log_2 \left(1 + \frac{P_T}{N\sigma^2} \lambda_i \right) \quad (31)$$

Supondo uma matriz G com $E\{|G_{ij}|^2\}$ constante para todo i e j . Pode se definir a razão sinal ruído de longo prazo através de (5) e a capacidade por:

$$C = \sum_{i=1}^m \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N} \lambda_i^* \right) \quad (32)$$

sendo $\{\lambda_i^*\}$ os autovalores de $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ e $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{G}}{E\{|G_{ij}|^2\}}$.

Assim, o valor da capacidade dependerá dos números de canais paralelos independentes (m) que poderão ser utilizados na transmissão. O valor de m será definido pelo número de autovalores independentes obtidos da matriz da decomposição da matriz do canal. Pode ser visto em (31) que a capacidade cresce linearmente com $m = \min(M, N)$ [1, 3].

Pode-se mostrar que a capacidade de um canal MIMO dada por (32) também pode calculada pela equação abaixo [1, 3].

$$C = \log_2 \left[\det \left(I + \frac{\rho}{N} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right) \right] \quad \text{b/s/Hz} \quad (33)$$

onde I é uma matriz identidade $M \times M$, ρ é a razão sinal-ruído média recebida em cada antena receptora e H é a matriz determinística do canal $M \times N$. Maiores detalhes da determinação da Equação (33) podem ser encontrados em [1, 3].

Para mostrar que (33) pode calculada por (32), diagonalizamos $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$$

onde $\mathbf{U}$ é uma matriz ortogonal, ou seja, $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$, e $\mathbf{\Lambda}$ uma matriz diagonal definida pela seus os autovalores λ_i^* , onde $\mathbf{\Lambda} = \frac{\mathbf{D}}{E\{|G_{ij}|^2\}}$. Assim:

$$\begin{aligned} C &= \log_2 \left[\det \left(I + \frac{\rho}{N} \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \right) \right] \\ C &= \log_2 \left[\det \mathbf{U}\mathbf{U}^H \left(I + \frac{\rho}{N} \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \right) \right] \\ C &= \log_2 \left[\det \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^H + \frac{\rho}{N} \mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \right) \right] \\ C &= \log_2 \left[\det \mathbf{U} \cdot \det \left(I + \frac{\rho}{N} \mathbf{\Lambda} \right) \cdot \det \mathbf{U}^H \right] \\ C &= \log_2 \left[\det \left(I + \frac{\rho}{N} \mathbf{\Lambda} \right) \right] = \log_2 \left[\prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{\rho}{N} \lambda_i^* \right) \right] \\ C &= \sum_{i=1}^m \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N} \lambda_i^* \right) \end{aligned}$$

2.6

Exemplos

Para observar o comportamento da capacidade em função da matriz do canal, será apresentado alguns exemplos.

Suponha que $\mathbf{H} = \mathbf{I}$. A matriz Λ é dada por:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Para esta situação obtém-se o número máximo de canais paralelos com todos possuindo o mesmo ganho. Para este caso temos a capacidade máxima dada por [3,8] para $N \geq M$:

$$C_{MAX} = N \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N} M \right) \quad \text{bits/s/Hz} \quad (34)$$

Suponha agora que $H_{i,j} = 1$ para todo i e j . A matriz $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ tem todos os elementos iguais e portanto todas as linhas são iguais. A matriz Λ é dada por:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{MN} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Só existe um autovalor diferente de zero, ou seja, existe apenas um único canal paralelo. A capacidade obtida é a capacidade mínima que é dada por [3, 8]:

$$C_{MIN} = \log_2 (1 + \rho MN) \quad \text{bits/s/Hz} \quad (35)$$

Os dois canais acima representam as situações extremas: (i) todos os sub-canais com ganhos iguais; neste caso a capacidade é mínima; (ii) apenas pares distintos de antenas transmissoras e receptoras com ganhos não nulos (iguais) com um único canal paralelo e apenas sub-canais com ganhos não nulos; neste caso a capacidade é máxima.

No caso de canais aleatórios, o grau de correlação entre os canais paralelos tem influência importante na capacidade do canal. Em geral, espera-se um aumento na capacidade com o decréscimo da correlação entre sub-canais. Isto foi verificado em vários experimentos como por exemplo em [9, 10, 11]. Em [9, 10, 11, 35], foram observados que aumentando a distancia entre os elementos do arranjo ou utilizar elementos com polarização diferentes reduz a correlação dos sub-canais. Contudo, aumentar a distancia entre os elementos do arranjo nem sempre é possível e, de fato, nem sempre garante uma descorrelação dos sinais como mostrado em [11, 12].

O aumento e decréscimo da capacidade podem também estar associados a outros parâmetros de propagação tais como espalhamento angular, espalhamento de retardos, número de multipercurso e a potência carregada por eles. É importante ainda notar que o número significativo de autovalores depende da razão sinal-ruído do enlace.

Canais com valores baixos de capacidade têm sido estudados e avaliados em vários trabalhos e são chamados de *keyhole* ou *pinhole* [11, 12]. Para caracterizar este tipo de canal, vamos supor que a matriz do canal é dada por $\mathbf{H} = \mathbf{h}^{Rx} (\mathbf{h}^{Tx})^T$, onde $(\mathbf{h}^{Rx})^T = (h_1^{Rx}, h_2^{Rx} \dots h_M^{Rx})$ e $(\mathbf{h}^{Tx})^T = (h_1^{Tx}, h_2^{Tx} \dots h_N^{Tx})$. Neste caso, o sinal recebido é dado por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} h_1^{Rx} h_1^{Tx} & h_1^{Rx} h_2^{Tx} & \dots & h_1^{Rx} h_N^{Tx} \\ h_2^{Rx} h_1^{Tx} & \ddots & \dots & h_2^{Rx} h_N^{Tx} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ h_M^{Rx} h_1^{Tx} & \dots & \dots & h_M^{Rx} h_N^{Tx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} + \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{r} = \begin{bmatrix} h_1^{Rx} \left[\sum_{i=1}^N s_i h_{1i}^{Tx} \right] \\ h_2^{Rx} \left[\sum_{i=1}^N s_i h_{2i}^{Tx} \right] \\ \vdots \\ h_M^{Rx} \left[\sum_{i=1}^N s_i h_{Mi}^{Tx} \right] \end{bmatrix} + \mathbf{n}$$

Observa-se que as linhas e colunas da matriz de ganhos são linearmente dependentes causando, assim, a redução do posto da matriz.

Para uma interpretação física do modelo matemático sugerido acima, suponha que o sistema MIMO esteja operando em um canal rico em espalhadores, e que os elementos dos arranjos de transmissão e recepção estejam suficientemente separados, de maneira a produzir uma descorrelação nos sinais dos sub-canais. Suponha também que entre o arranjo de transmissão e recepção

exista apenas uma abertura estreita (um *keyhole* ou *pinhole*), através da qual todos os sinais de propagação devem passar (Figuras 2 e 3).

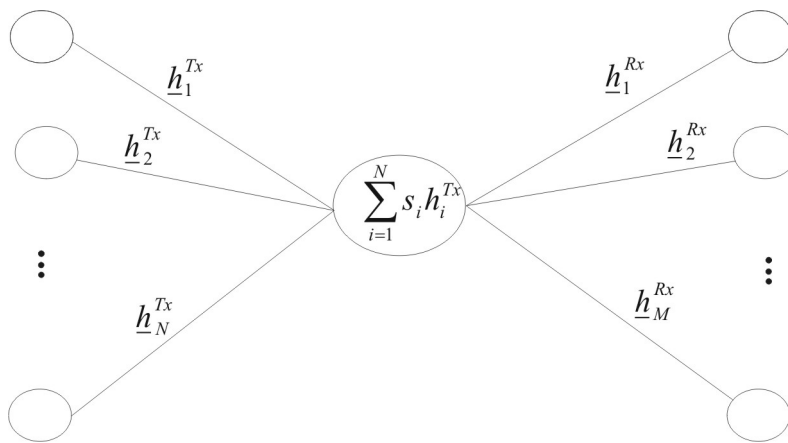


Figura 2 - Representação matemática do canal *Pinhole* ou *Keyhole channel*

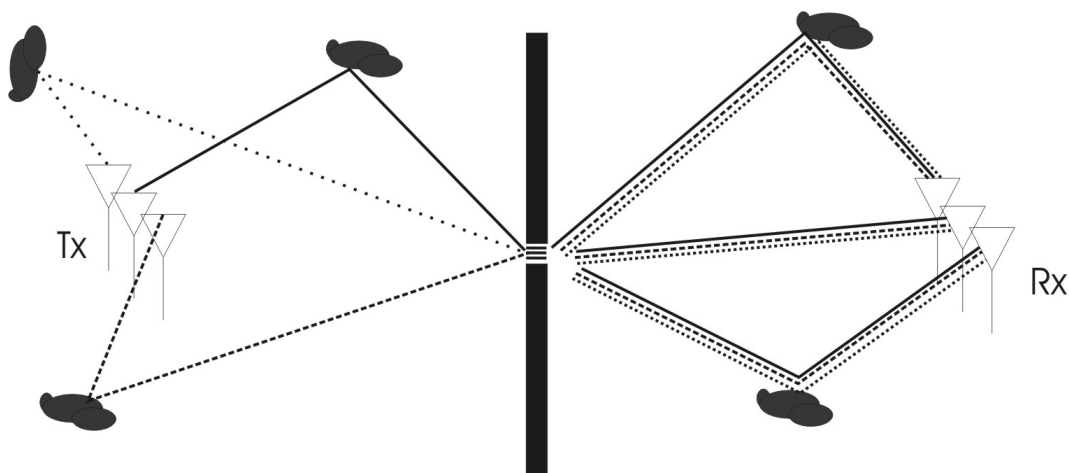


Figura 3 - Fisicamente o canal *Pinhole* ou *Keyhole*

Essa pequena abertura estreita força todos os componentes de multipercursos de um lado propagarem em conjunto no outro lado. Como resultado, tem-se um canal MIMO que não permite uma separação espacial dos sinais no receptor, independentemente de quaisquer outras condições favoráveis. Nenhum ganho de multiplexação é obtido, contudo um ganho de diversidade é obtido com a ordem de diversidade dado por $\min(M, N)$. Na literatura especula-se que portas e corredores poderiam atuar como um *keyhole* para um sistema MIMO *indoor*, e grandes distâncias entre o transmissor e receptor poderiam atuar como um *keyhole* para um sistema *outdoor*.

2.7

Capacidade Ergódica e Capacidade Condicionada

Na modelagem desenvolvida até aqui a capacidade tem sido calculada para valores determinados da matriz de ganhos do canal. Como a matriz do canal é aleatória, a capacidade do canal MIMO é também uma variável aleatória e, neste caso duas definições estatísticas da capacidade são usualmente utilizadas: a capacidade ergódica e a capacidade condicionada.

A capacidade ergódica é definida como o valor esperado da capacidade e é dada por:

$$C = E \left\{ \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_M + \frac{\rho}{N} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right] \right\} \text{ b/s/Hz} \quad (36)$$

Ou seja, a capacidade ergódica do canal é a média dos valores máximos da taxa de informação que pode ser transmitida considerando-se as variações do canal.

A capacidade condicionada (*outage capacity*) é um valor de capacidade C associado a um valor de probabilidade p , significando que existe uma probabilidade p deste valor C não ser alcançado. A capacidade condicionada é dada por:

$$\Pr ob \left\{ \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{M_R} + \frac{\rho}{M_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right] \leq C_{\text{outage}} \right\} = p \quad (37)$$

Variando-se p entre 0 e 1, obtém-se a função distribuição cumulativa da capacidade.

A seguir são apresentados diversos resultados de capacidade para um sistema MIMO com sub-canais estatisticamente independentes todos com desvanecimento plano de Rayleigh. Neste caso, todos os elementos da matriz $\mathbf{H}$ do canal são variáveis aleatórias complexas Gaussianas estatisticamente independentes de média nula e variância unitária. Os resultados foram obtidos por simulação.

Para uma razão sinal ruído e $N = M$ variáveis, tem-se as seguintes capacidades apresentadas na Figura 4.

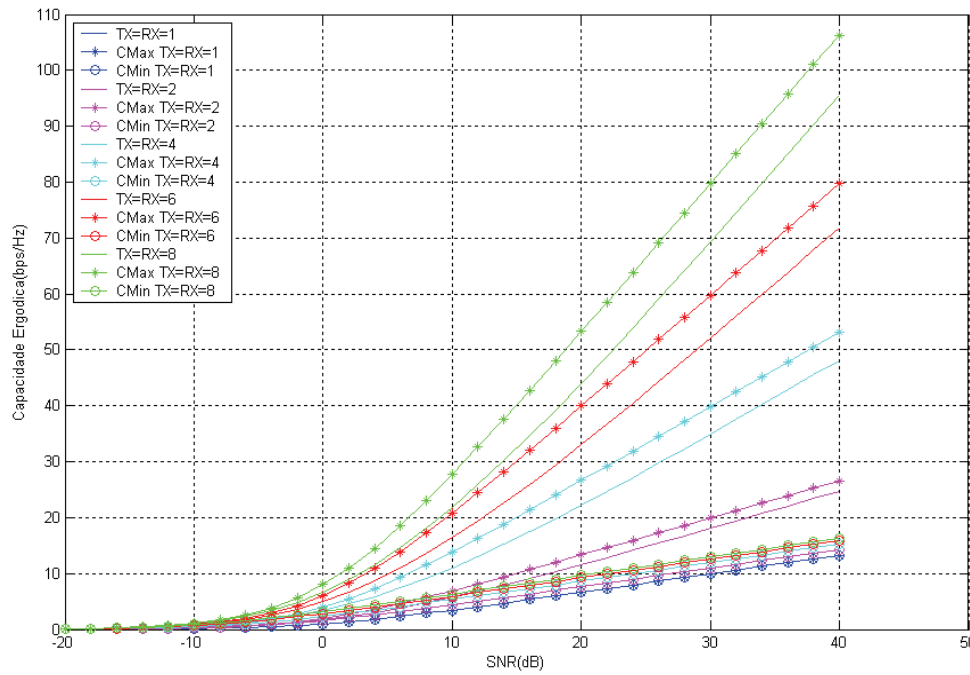


Figura 4 - Capacidades obtidas para uma razão sinal ruído e $N = M$ variável

Para uma razão sinal-ruído e M variáveis e $N = 4$, temos as seguintes capacidades apresentadas na Figura 5.

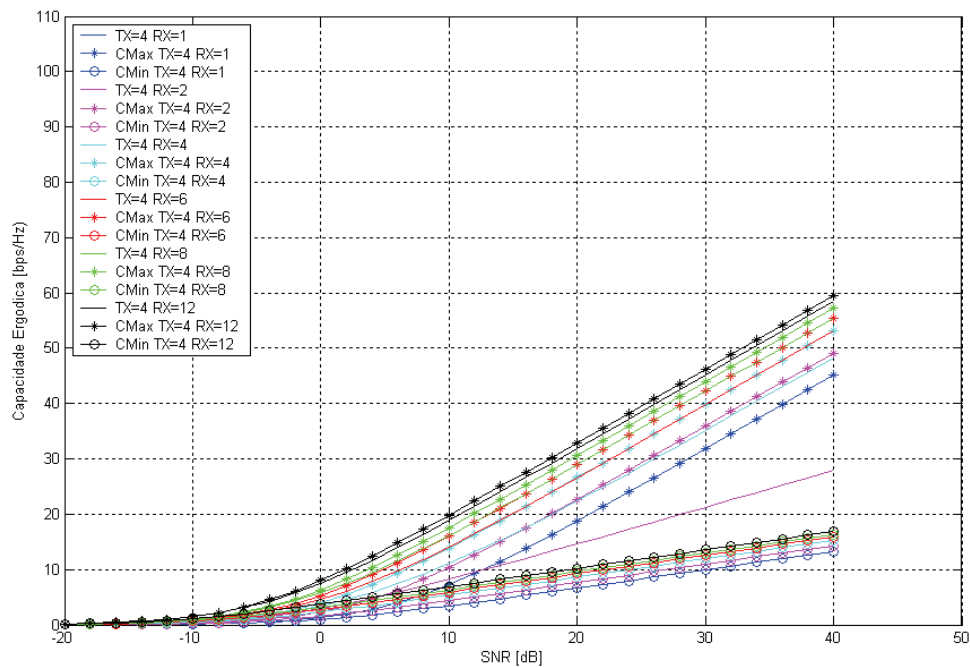


Figura 5 - Capacidade obtida para uma razão sinal-ruído e M variáveis e $N = 4$

Através das Figuras 4 e 5, pode se observar o crescimento linear da capacidade com o aumento da razão sinal-ruído.

Para uma razão sinal ruído $SNR = 20$ fixo e $N = M$ variáveis, tem se as capacidades apresentadas na Figura 6.

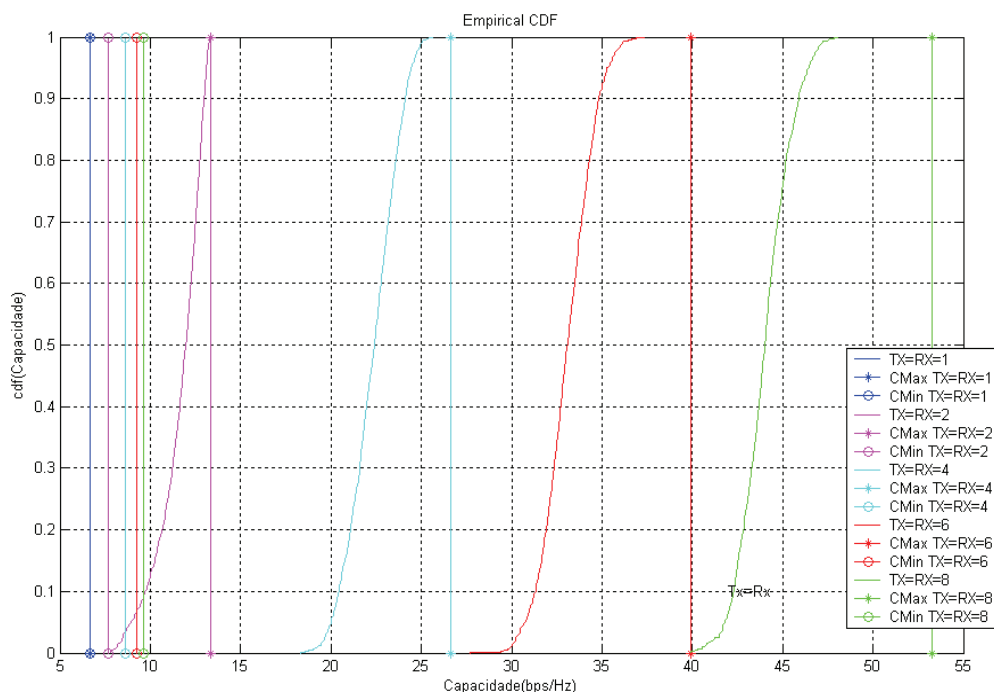


Figura 6 - Capacidades obtidas para uma razão sinal ruído, $SNR = 20$, fixo e $N = M$ variáveis

Para uma razão sinal ruído $SNR = 20$ fixo, M variável e $N = 4$, temos as capacidades mostradas na Figura 7.

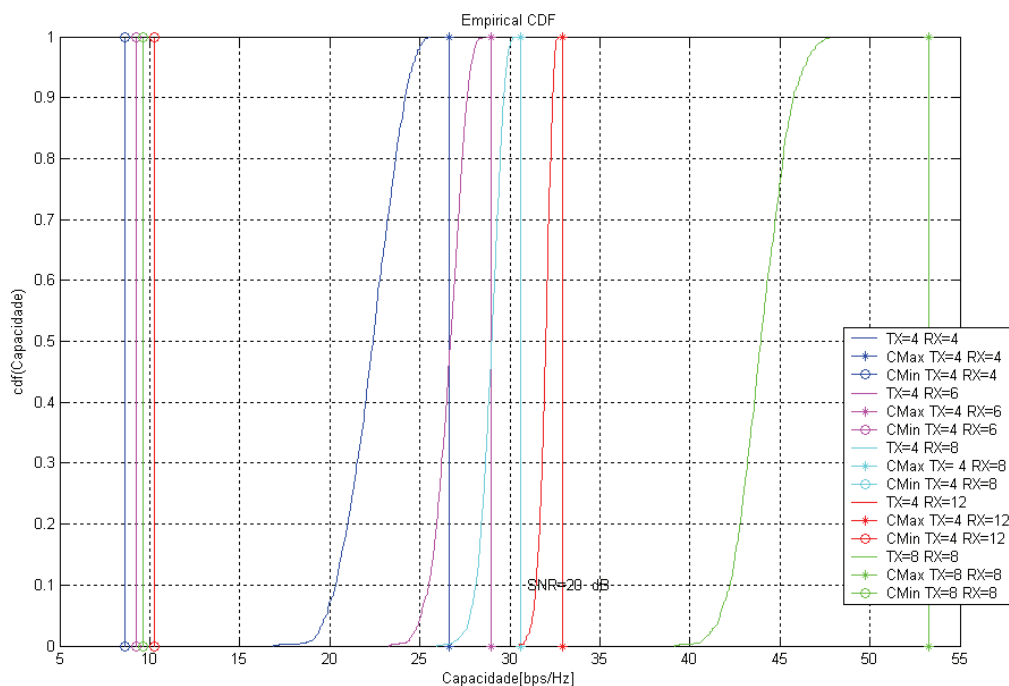


Figura 7 - Capacidades obtidas para uma razão sinal ruído, $SNR = 20$, fixo, M variável e $N = 4$

2.8

Capacidade do sistema MIMO com um canal seletivo em frequência

Toda a análise de capacidade feita até aqui supõe um canal de faixa estreita o que permite expressar o sinal recebido como produto do sinal transmitido por um coeficiente constante, determinístico ou aleatório, ou seja, o canal basicamente introduz um ganho determinístico ou aleatório no sinal transmitido.

Em um canal de faixa larga, obviamente esta aproximação não é válida e o canal deverá ser representado por sua resposta impulsiva temporal ou sua função de transferência $G(f)$. Definindo como $g_{i,j}(t)$ a resposta impulsiva do canal entre a antena transmissora j e a antena receptora i tem-se a seguinte expressão do sinal recebido:

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^N s_j(t) * g_{i,j}(t) + n_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (38)$$

Na ausência de ruído, pode-se obter a seguinte expressão em forma matricial para o sinal no receptor:

$$\mathbf{R}(f) = \mathbf{S}(f)\mathbf{G}(f) \quad (39)$$

onde $\mathbf{G}(f)$ é a matriz cujo elemento genérico é $G_{i,j}(f)$, a transformada de Fourier de $g_{i,j}(t)$ e $\mathbf{S}(f)$ é o vetor cujas componentes são as transformadas de Fourier de $s_j(t)$.

Pode-se mostrar que a capacidade do canal neste caso pode ser expressa por

$$C = \frac{1}{B} \int_B \log_2 \det \left(\mathbf{I} + \frac{\rho}{N} \mathbf{H}^H(f) \mathbf{H}(f) \right) df \quad (40)$$

onde $\mathbf{H}(f)$ é a matriz de função de transferência normalizada do canal e B é a banda considerada.

Uma forma prática de calcular (40) é dividir a banda do canal em sub-bandas suficientemente estreitas para que a variação da função de transferência seja pequena e possa ser considerada constante, como mostra a Figura 8. Neste caso, cada sub-banda representaria um canal de faixa estreita sujeito a um desvanecimento plano e a capacidade é aproximadamente a média das

capacidades obtidas para cada sub-banda, de acordo com a formulação desenvolvida anteriormente, isto é:

$$C = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \log_2 \det \left(I + \frac{\rho}{N} \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i \right) \text{ bit/s/Hz} \quad (41)$$

onde $\mathbf{H}_i$ é a matriz de ganhos normalizados para a sub-banda i .

Um parâmetro importante de um canal de faixa larga aleatório, também denominado canal com desvanecimento seletivo em frequência, é a sua banda de coerência, definida como a largura de faixa dentro da qual a covariância da função de transferência do canal está acima de um determinado limite. Sub-canais com largura menor do que a banda de coerência de um canal seletivo são geralmente considerados de faixa estreita e este critério pode ser utilizado para determinar as sub-bandas no cálculo da capacidade de um canal de faixa larga.

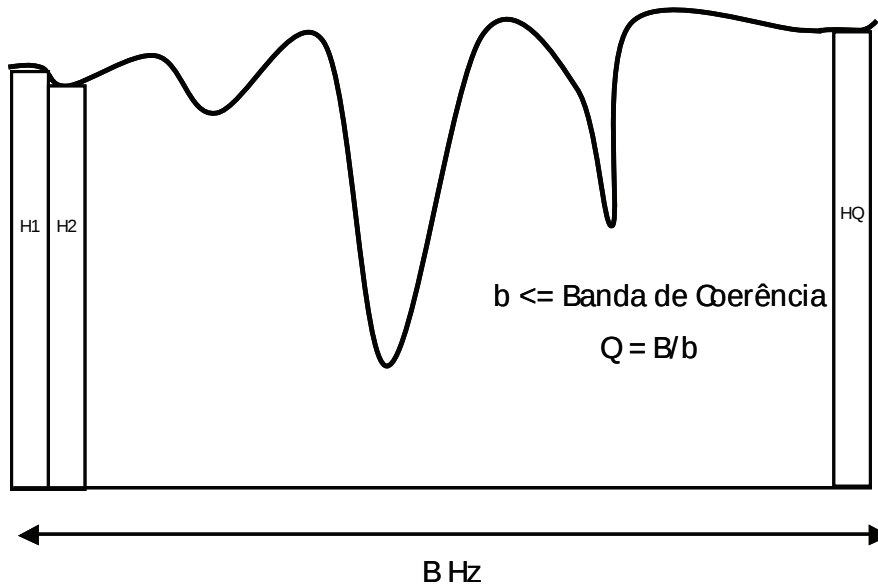


Figura 8 - Capacidade de um canal seletivo em frequência

A análise do sistema MIMO com um canal seletivo em frequência, possibilitou a integração do sistema MIMO com a modulação OFDM (*Orthogonal Frequency-Division Multiplexing*). Um modelo de canal seletivo em frequência para o sistema MIMO-OFDM foi deduzido e uma análise do comportamento da capacidade foi realizada em [4].

2.9

Grau de Liberdade Efetivo (EDOF) e Número de Condição (CN)

A grande capacidade conseguida no sistema MIMO vem basicamente do ganho de multiplexação, ou seja, vem da possibilidade de transmitir simultaneamente diferentes sinais através dos canais paralelos. O posto da matriz do canal é uma maneira de se medir o ganho de multiplexação. Porém, muitos desses canais paralelos podem ter ganhos baixos e, dependendo da potência de transmissão disponível, podem não ser utilizados. Por essa razão, é de interesse conhecer o número efetivo dos canais paralelos. Assim, é importante definir o grau de liberdade efetivo do canal, dado pela Equação (42) [10].

$$EDOF \triangleq \frac{dC(x)}{d(\log_2(x))} \Big|_{x=SNR} \quad (42)$$

Esta medida quantifica o número de sub-canais que contribuem na capacidade. Para valores altos de SNR , o $EDOF$ é aproximadamente igual ao posto da matriz.

Um aspecto chave na avaliação da capacidade é a caracterização dos canais paralelos independentes que podem ser identificadas na matriz do canal. O número de canais paralelos está relacionado ao número dos autovalores significativos (posto da matriz da correlação). Os autovalores podem ser interpretados como os ganhos de potência dos canais paralelos. A distribuição dos autovalores determina a capacidade do sistema, e algumas técnicas de transmissão que tem por objetivo aumentar a taxa de transmissão, tal como multiplexação espacial [3], dependem destes autovalores. Em [6, 13] os canais paralelos foram investigados para diferentes topologias analisando os autovalores. Em [6], um ambiente correlacionado e não correlacionado foi investigado através da análise dos autovalores. Como a matriz do canal é aleatória, os autovalores são variáveis aleatórias e tanto os valores médios como os valores obtidos a partir de um limiar de uma cdf podem ser usados para a descrição dos canais paralelos.

Como já foi demonstrado, para um canal ideal o número de autovalores é $\min(M, N)$. Por outro lado, para um canal totalmente correlatado existe apenas um único autovalor.

A taxa entre o máximo e o mínimo autovalor da matriz de correlação do canal, chamada *Condition Number* (CN), pode fornecer indicações da qualidade do canal. Em geral, canais com valores pequenos de CN apresentam alta capacidade [1]. Assim, tem-se que o CN é dado por:

$$CN = \frac{\lambda_{MAX}}{\lambda_{MIN}} \quad (43)$$