

## 2.

### Revisão bibliográfica

A análise dinâmica ou análise de vibrações é o estudo da relação entre o movimento de um sistema físico e as forças que o causam. Geralmente a prática usual se limita ao comportamento de estruturas submetidas a cargas estáticas, admitindo-se que as cargas aplicadas lentamente às estruturas são instantaneamente equilibradas. Contudo, existem estruturas que são freqüentemente submetidas a forças cujas amplitudes variam continuamente com o tempo. Têm-se na natureza diversos exemplos desse fenômeno entre os quais citam-se: forças causadas pela ação do vento, movimentos decorrentes de abalos sísmicos, ondas sonoras, vibrações produzidas por máquinas rotativas e até mesmo o caminhar de pessoas. Sob esses tipos de carregamento, os elementos estruturais entram em vibração; portanto, a análise dinâmica das estruturas é tão importante na garantia da estabilidade de uma estrutura quanto na sua análise estática.

GHAVAMI et al (2002) apresenta um trabalho com pequenos segmentos de bambu. Segmentos em balanço de seção transversal retangular com dimensões de 3 x 12 milímetros e comprimento de aproximadamente 500 milímetros, tudo aproximadamente. Utilizam-se duas vigas da espécie *Dendrocalamus giganteus* para esse experimento. As medições são tomadas através de acelerômetros e os amortecimentos são obtidos com o método do decremento logarítmico. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores experimentais do fator de amortecimento.

Espécime 1		Espécime 2	
Teste	$\xi$ (%)	Teste	$\xi$ (%)
1	0.690	1	0.542
2	0.645	2	0.539
3	0.507	3	0.427
4	0.516	4	0.537
Média	0.590	Média	0.511

## 2.1.

### Graus de liberdade

Em dinâmica estrutural o número de coordenadas necessárias para especificar a configuração ou a posição de um sistema em qualquer instante é chamado de número de graus de liberdade. Assim, estruturas contínuas têm um número elevado de graus de liberdade. O processo de idealização ou seleção de um modelo matemático apropriado permite a redução dos números de graus de liberdade para um número reduzido e em alguns casos somente a um grau de liberdade. Esses sistemas de um grau de liberdade podem ser descritos convenientemente por um modelo como o mostrado na Figura 2.1 que tem os seguintes elementos:

- (1) O elemento massa,  $m$ , representa a massa e a sua inércia que são características inerentes da estrutura;
- (2) o elemento mola com constante de rigidez,  $k$ , representa a força elástica restaurada e a capacidade de energia potencial da estrutura;
- (3) o elemento amortecedor com coeficiente de amortecimento,  $c$ , representa a característica de dissipação de energia da estrutura;
- (4) e a força de excitação  $F(t)$  representa a ação das forças externas no sistema estrutural. A força  $F(t)$  é escrita dessa forma para indicar que é uma função do tempo.

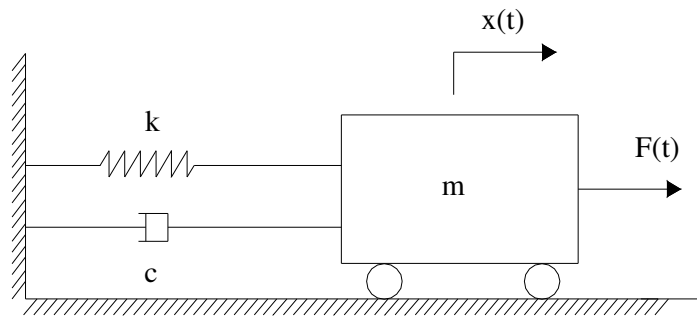


Figura 2.1. Modelo matemático de um sistema com um grau de liberdade.

## 2.2.

### Vibração livre

Um sistema estrutural está sujeito à vibração livre quando é atuado somente pela energia potencial e pela energia cinética internas ao sistema.

#### 2.2.1.

##### Sistema massa-mola

O sistema massa-mola de um grau de liberdade, é mostrado na Figura 2.2, sendo  $m$  a massa e  $k$  a rigidez da mola.

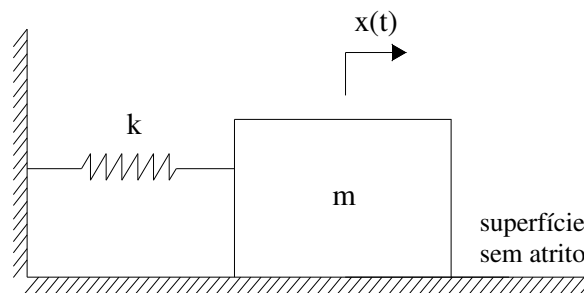


Figura 2.2 – Sistema massa-mola sem atrito.

A equação do movimento para este sistema é dada pela equação:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.1)$$

Uma possível solução para a equação acima é da forma:

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \quad (2.2)$$

Logo, a equação do movimento é reescrita na forma:

$$mA\lambda^2 e^{\lambda t} + kAe^{\lambda t} = 0 \quad (2.3)$$

Como  $Ae^{\lambda t} \neq 0$ , pode-se cancelar este termo, e resolver a equação de segundo grau, chamada equação característica, obtendo-se:

$$m\lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{-k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.4)$$

Como,  $\lambda = \pm i\omega_n$  onde  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é definida como a frequência natural do sistema e a solução fica conforme:

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t} \quad (2.5)$$

Têm-se agora duas constantes arbitrárias,  $A_1$  e  $A_2$ , para determiná-las, são necessárias duas condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_0$ , sendo que a primeira representa a posição inicial e a segunda a velocidade inicial.

Sabe-se que  $e^{i\omega_n t}$  é a forma exponencial para  $\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t$  e assim, a equação que descreve a dinâmica do sistema pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x(t) = C \cos \omega_n t + D \sin \omega_n t \quad (2.6)$$

Onde C e D, novamente, são constantes arbitrárias que podem ser determinadas a partir das condições iniciais do problema, expostas anteriormente.

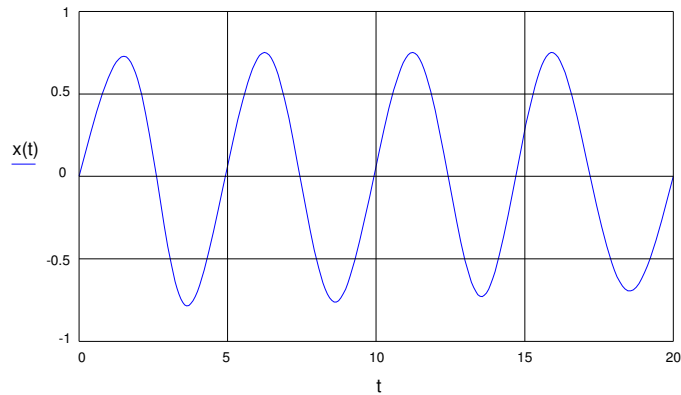


Figura 2.3 – Exemplo de resposta de um sistema sem amortecimento.

### 2.2.2.

#### Amortecimento viscoso

O sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade mostrado na Figura 2.4 é constituído de uma massa,  $m$ , conectada a uma referência fixa por uma mola de rigidez,  $k$ , e um amortecedor com coeficiente de amortecimento,  $c$ .

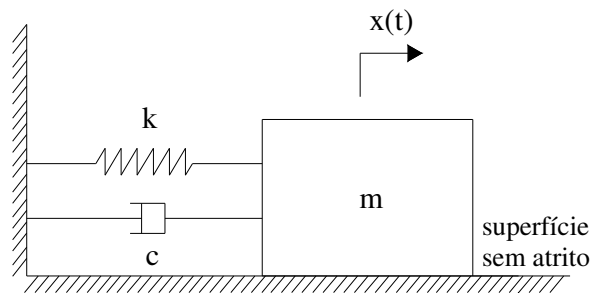


Figura 2.4 – Sistema massa-mola-amortecedor sem atrito.

A equação do movimento para este sistema é dada segundo:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.7)$$

ou

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (2.8)$$

Sendo:  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$  e  $2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$ , onde  $\xi$  é fator de amortecimento do sistema.

O sistema está sujeito as seguintes condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ , sendo que a primeira representa a posição inicial e a segunda a velocidade inicial.

Uma solução como já visto anteriormente é dada por:

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \quad (2.9)$$

Assim temos:

$$\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t} \quad (2.10)$$

$$\ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t} \quad (2.11)$$

Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.7) temos:

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)Ae^{\lambda t} = 0 \quad (2.12)$$

Já que  $Ae^{\lambda t} \neq 0$ , pode-se cancelar este termo e obter a equação:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (2.13)$$

As soluções para a equação anterior são de acordo como a seguir.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} \quad (2.14)$$

A solução (2.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{4m^2}} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \\ &= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2\right](-1)} = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sendo que  $\omega_d = i\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$  é chamada de frequência circular amortecida.

Assim, a solução do sistema, se as raízes forem distintas, tem a seguinte forma:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (2.16)$$

Substituindo (2.15) em (2.16), tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\left(\frac{c}{2m} + i\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} + Be^{\left(\frac{c}{2m} - i\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} = \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} \left[ Ae^{i\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}t} + Be^{-i\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}t} \right] = \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} (Ae^{i\omega_d t} + Be^{-i\omega_d t}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Na forma geométrica, a solução anterior fica:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} (C \cos \omega_d t + D \sin \omega_d t) \quad (2.18)$$

O valor de  $\lambda$  pode ser real ou complexo, dependendo do termo  $c^2 - 4mk$ . Assim, tem-se 3 casos possíveis. O amortecimento crítico é definido segundo a seguinte equação:

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{mk} \quad (2.19)$$

O fator de amortecimento do sistema é definido conforme a seguinte equação:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (2.20)$$

Sendo assim, as raízes da equação podem ser escritas conforme (2.21).

$$\lambda_{1,2} = \omega_n [-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}] \quad (2.21)$$

De acordo com o valor de  $c^2 - 4mk$  ou  $\xi$ , têm-se 3 casos a seguir:

$\xi < 1$  – duas raízes complexas e conjugadas.

$\xi = 1$  – duas raízes reais e iguais.

$\xi > 1$  – duas raízes reais e diferentes.

A seguir são apresentados sucintamente os 3 casos de movimento amortecido. É de interesse apenas o movimento sub-amortecido. Sendo este o caso 1, onde:  $\xi < 1$  – duas raízes complexas e conjugadas.

### 2.2.2.1.

#### Movimento sub-amortecido ( $\xi < 1$ )

Este caso é o de maior interesse da engenharia devido à grande frequência com que ocorre, correspondendo a um baixo valor de amortecimento. Então verifica-se que as raízes da equação podem ser escritas da forma a seguir:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n (-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}) = -\xi\omega_n \pm i\omega_d \quad (2.22)$$

A solução geral fica como em (2.23).

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \quad (2.23)$$

As constantes A e B da equação (2.23) são determinadas a partir das condições iniciais do movimento em  $t=0$ .

Para  $x(0) = x_o$ , substituindo na equação (2.23) tem-se:

$$A = x_o$$

Para  $\dot{x}(0) = \dot{x}_o$ , substituindo na equação (2.23) tem-se:

$$\dot{x}(0) = -A\xi\omega_n + B\omega_d \quad \therefore \quad B = \frac{\dot{x}_o}{\omega_d} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} x_o$$

A solução fica da forma:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} [x_o \cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{x}_o}{\omega_d} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} x_o\right) \sin(\omega_d t)] \quad (2.24)$$



Fazendo a composição dos harmônicos, tem-se:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} x_0\right)^2} \cos(\omega_d t - \theta) \quad (2.25)$$

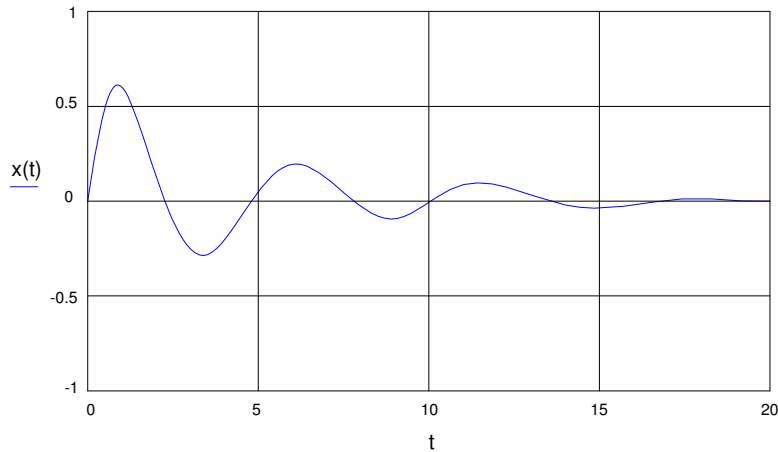


Figura 2.5 – Exemplo de resposta de um sistema sub-amortecido.

### 2.2.2.2.

#### Movimento criticamente amortecido ( $\xi=1$ )

É a transição entre o movimento sub-amortecido e superamortecido. As raízes são reais e iguais e  $c=c_{cr}$ , conforme visto na equação (2.20). Então, a raiz fica conforme (2.26).

$$\lambda = -\omega_n \quad (2.26)$$

Pode-se escrever agora a solução geral da seguinte maneira:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \quad (2.27)$$

Aplicando-se as mesmas condições iniciais obtém-se a resposta do sistema de acordo com:

$$x = e^{-\omega_n t} [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t] \quad (2.28)$$

Neste caso, não existe oscilação, a massa não passa pela sua posição inicial com o mesmo sentido da sua velocidade inicial uma segunda vez.

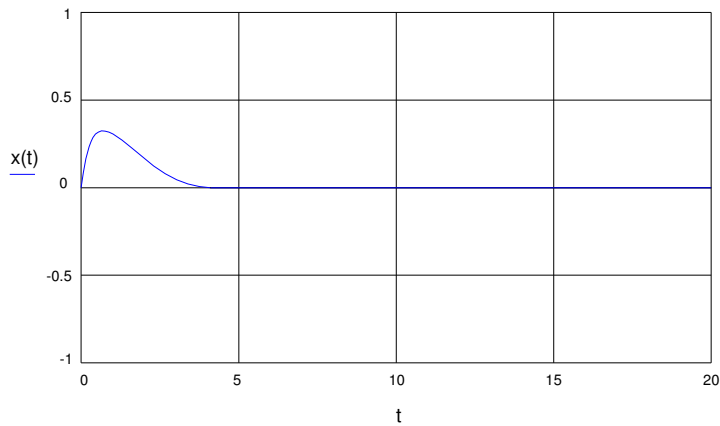


Figura 2.6 – Exemplo de resposta de um sistema criticamente amortecido.

### 2.2.2.3.

#### Movimento super amortecido ( $\xi > 1$ )

As raízes são reais e diferentes. O movimento não é oscilatório. As raízes são:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n [-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}] \quad (2.29)$$

A solução fica da forma:

$$x(t) = Ae^{\omega_n[-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]t} + Be^{\omega_n[-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]t} \quad (2.30)$$

Como  $e^\theta = \cosh \theta + \sinh \theta$  e  $e^{-\theta} = \cosh \theta - \sinh \theta$ , tem-se:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} A[\cosh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t) + \sinh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t)]$$

$$+ B[\cosh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t) - \sinh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t)]$$

Se  $A+B=C$  e  $A-B=D$ , logo:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} [C \cosh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t) + D \sinh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t)] \quad (2.31)$$

Aplicando-se as mesmas condições iniciais obtém-se a seguinte solução final:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} [x_0 \cosh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t) + \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} x_0 \right) \sinh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}t)] \quad (2.32)$$

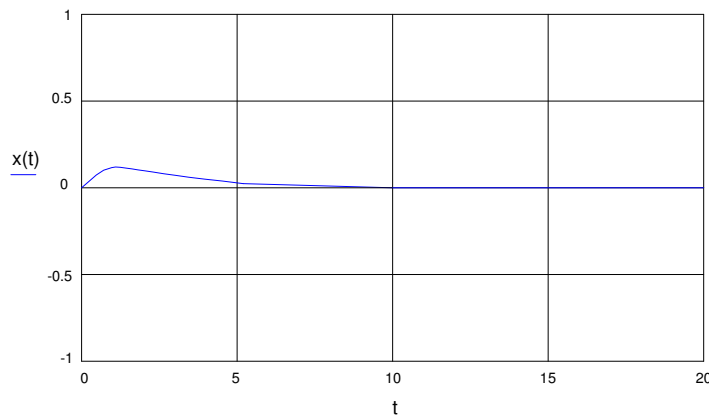


Figura 2.7 - Exemplo de resposta de um sistema super amortecido.

### 2.3.

#### Propriedades dinâmicas

A frequência natural de vibração e o amortecimento são as duas mais importantes propriedades dinâmicas de um sistema vibratório. Em um sistema estrutural qualquer, é de grande importância a determinação das frequências naturais para avaliarem os níveis de vibrações que o sistema apresentará por causa da ressonância. O conhecimento da propriedade de amortecimento do sistema também conduz a informações valiosas sobre a estrutura interna e a micromecânica do material, e é de grande importância no estudo da fadiga e da fluência.

### **2.3.1.**

#### **Freqüência natural**

A determinação da freqüência natural é de fundamental importância em qualquer sistema estrutural. Para cada sistema existem várias freqüências naturais, variando também de sistema para sistema. Esta é a freqüência com que o sistema oscila quando muda da posição estática para a vibratória. É dependente da rigidez que o sistema apresenta e de sua massa.

### **2.3.2.**

#### **Amortecimento**

A propriedade de uma estrutura em dissipar energia é chamada amortecimento e este pode ser gerado através de três mecanismos: arraste fluido dinâmico (amortecimento fluido), dissipação de energia interna do material (amortecimento material) e por atrito ou impacto entre as partes constituintes de uma estrutura (amortecimento estrutural). O amortecimento fluido é o resultado da energia dissipada por viscosidade e pressão de arraste aplicada em uma estrutura, como, por exemplo, o fluxo de óleo entre o pistão e o cilindro absorvedor de choque que provê a maior parte do amortecimento de um automóvel. Alguns materiais, como borracha e chumbo, possuem alto amortecimento material e são usados para absorver choque ou são laminados e colocados nos elementos estruturais formando compostos altamente amortecidos. Um exemplo de amortecimento estrutural pode ser visto na fricção de duas superfícies parafusadas em uma articulação. Este mecanismo dissipa a maior parte da energia em estruturas metálicas que vibram sob ação de vento. O amortecimento total de uma estrutura é a soma das componentes de amortecimento fluido, amortecimento material e amortecimento estrutural. Geralmente em estruturas, o amortecimento é dominado por amortecimento fluido ou amortecimento estrutural, a menos que a estrutura seja provida de sistemas atenuadores especialmente projetados. (RESENDE, 2003)

**2.3.2.1.****Medição do amortecimento**

Uma maneira conveniente para medir o amortecimento é através do fator de perda  $\eta$ , que é obtido pela relação entre a perda de energia em um ciclo de oscilação,  $W$ , e o pico de energia potencial,  $V$ , armazenado neste sistema durante o ciclo. O fator de perda é então definido como:

$$\eta = \frac{W}{2\pi V} \quad (2.33)$$

Considerando que o fator de perda em estruturas é muito pequeno e a influência do amortecimento na resposta da vibração pode ser notado somente próximo da ressonância então o fator de perda pode ser obtido pela equação a seguir:

$$\eta = 2\xi \quad (2.34)$$

**2.3.2.1.1.****Métodos de análise**

Dois métodos confiáveis de determinação do amortecimento são os métodos do decremento logarítmico e de meia potência.

**Método do Decremento Logarítmico**

A resposta de um sistema com um grau de liberdade em vibração livre amortecida é uma oscilação harmônica, conforme mostrado na equação (2.25).

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} C \cos(\omega_d t - \theta) \quad (2.35)$$

Onde  $C$  e  $\theta$  são constantes.

Para pequenos fatores de amortecimento ( $\xi \leq 0.10$ ),  $\omega_n = \omega_d$  é aceito como boa aproximação. A equação (2.35) é mostrada na Figura 2.8.

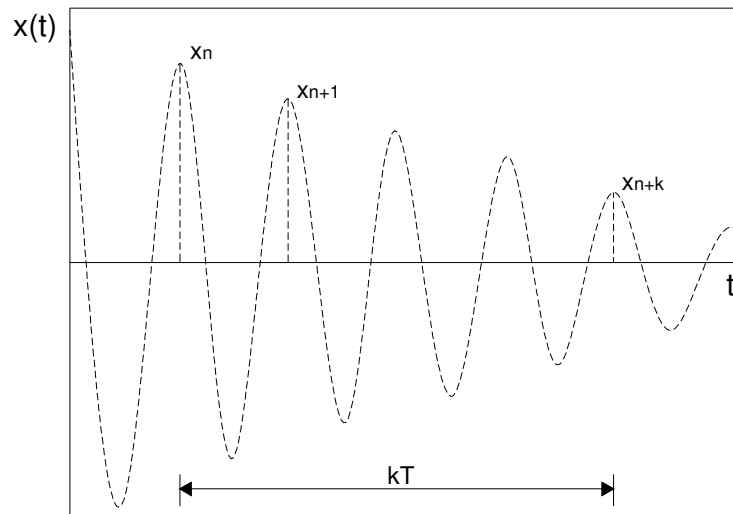


Figura 2.8 - Resposta sub-amortecida de um sistema com um grau de liberdade.

Quando se faz a relação entre dois picos consecutivos da resposta sub-amortecida, chamados de  $x_n$  e  $x_{n+1}$ , obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x[\omega_d t - \theta]}{x[\omega_d (t + \frac{2\pi}{\omega_d}) - \theta]} = e^{2\pi\xi\omega_n / \omega_d} \quad (2.36)$$

Aplicando-se o logaritmo neperiano em  $\frac{x_n}{x_{n+1}}$  e considerando que

$\omega_n = \omega_d$ , tem-se:

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \delta = 2\pi\xi \quad (2.37)$$

A equação (2.37) é a definição de decremento logarítmico,  $\delta$ . Logo, o fator de amortecimento fica:

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad (2.38)$$

Quando o amortecimento é muito pequeno pode-se utilizar a relação entre  $k$  picos positivos medidos no período natural  $kT$ . Tem-se então:

$$\ln \frac{x_x}{x_{n+k}} = k\delta = 2\pi\xi \quad (2.39)$$

O fator de amortecimento fica como na equação (2.40).

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi k} \ln \frac{x_n}{x_{n+k}} \quad (2.40)$$

### Método da Meia Potência

A resposta permanente de um sistema com um grau de liberdade, sujeito a um carregamento harmônico de frequência  $\Omega$  e amplitude  $p_0$  é mostrado conforme a equação a seguir:

$$x(t) = p \text{sen}(\Omega t - \theta) \quad (2.41)$$

Onde  $p$  é a amplitude da resposta permanente dada por:

$$p = D \frac{p_0}{k} \quad (2.42)$$

Na equação (2.40)  $D$  é o fator dinâmico amplificador e é definido como:

$$D = [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-1/2} \quad (2.43)$$

Sendo o fator da frequência:

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (2.44)$$

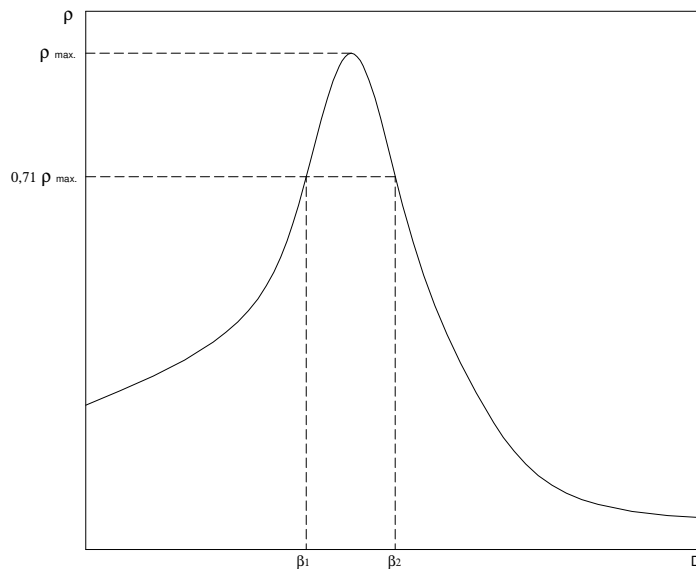


Figura 2.9 – Método da meia potência.

O forte efeito do amortecimento no controle da amplitude da resposta próximo da ressonância ( $\beta=1$ ) é claramente mostrado no gráfico. O fator de amortecimento é obtido por este método por dois valores de  $\beta$  em  $\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_{\max}$ , como mostrado na Figura 2.9. Considera-se que, para as equações (2.42) e (2.43),  $\rho_{\max} = \frac{1}{2\xi} \frac{P_o}{k}$  a seguinte equação é formulada:

$$[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta^2)]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\xi} \quad (2.45)$$

A solução desta equação leva a dois valores aproximadamente simétricos,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , como mostrado na Figura 2.9. O fator de amortecimento é então obtido pela equação (2.46).

$$\xi = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} \quad (2.46)$$

A verificação experimental do fator de amortecimento pelo método da meia potência consiste em executar um número suficiente de respostas próximas da ressonância, plotar isso em um gráfico e traçar uma linha horizontal na ordenada  $\rho_{\max} / \sqrt{2}$ . Encontra-se então os valores de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  e finalmente calcula-se o fator de amortecimento pela equação (2.46).

## 2.4.

### Análise modal

Existem dois procedimentos para determinação das características dinâmicas, denominados de Análise Modal Teórica e Análise Modal Experimental.

O primeiro procedimento consiste na formulação de um modelo matemático da estrutura em estudo através de uma técnica de discretização. O Método dos Elementos Finitos é muito utilizado para esse caso, obtêm-se as matrizes físicas de massa e de rigidez da estrutura. Então, utilizam-se essas matrizes na formulação de um problema de autovalores e autovetores, sendo que a solução são as freqüências naturais e os modos de vibração da estrutura.



Esses resultados constituem o chamado modelo modal teórico (LOFRANO, 2003).

O segundo procedimento através dos dados experimentais determina as frequências modais, fatores de amortecimento modais e modos de vibração. Através de ensaios experimentais são obtidas as características da resposta do sistema, que são geralmente dadas através de Função de Respostas em Frequência (FRF) ou resposta impulsiva (Maia et al, 1997 apud LOFRANO, 2003).

### **2.4.1.**

#### **Análise modal experimental**

Tipicamente, as características dinâmicas de um sistema estrutural são definidas pela função de transferência. Seis tipos de funções de transferências são empregados na análise de estruturas: Receptância (deslocamento/força), Mobilidade (velocidade/força), Inertância (aceleração/força), Rigidez Dinâmica (força/deslocamento), Impedância Mecânica (força/velocidade) e Massa Aparente (força/aceleração).

A análise modal experimental determina o modelo modal de uma estrutura, ou seja, suas frequências naturais, amortecimentos modais e formas modais de vibração.

Na técnica de análise modal, a função resposta em frequência da estrutura pode ser medida em um ponto único, com a excitação impulsiva aplicada em vários pontos da estrutura, ou a estrutura pode ser excitada em um único ponto, usando-se sinais aleatórios de banda larga, com a função resposta em frequência medida em vários pontos da estrutura.

#### **2.4.1.1.**

##### **Função Resposta em Frequência (FRF)**

A Função Resposta em Frequência (FRF) para S1GL é um caso particular da Função de Transferência. A função de transferência apresenta a seguinte forma:

$$H(\omega) = \frac{x(\omega)}{F(\omega)} \quad (2.47)$$

Que é a função que relaciona a resposta do sistema a uma excitação a ele aplicada.

Para determinar  $H(\omega)$ , é considerado um sistema segundo o da Figura 2.1, com condições iniciais homogêneas e excitação harmônica conforme:

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (2.48)$$

A equação do movimento resulta na seguinte forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (2.49)$$

A solução particular da equação é da forma:

$$x(t) = F_0 H(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.50)$$

Que substituindo na equação do movimento obtém-se:

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \quad (2.51)$$

A equação (2.51) é a forma mais comum de se apresentar uma FRF. A FRF expressa pela equação (2.51) é denominada receptância, geralmente denotada por  $\alpha(\omega)$  ou  $\alpha(i\omega)$ . Esta quantidade complexa descreve a relação entre a resposta em termos de deslocamento e da força de excitação aplicada à um sistema, caracterizando completamente as suas propriedades. (AGUILERA, 2005).

Diversas estruturas não podem ser modeladas como um sistema de um grau de liberdade, em virtude de que seu comportamento dinâmico, geralmente, necessitar de mais do que uma coordenada para ser completamente descrito. Portanto, um sistema com  $N$  graus de liberdade, consiste em um conjunto de FRF's diferentes, e é descrito por um modelo modal com  $N$  frequências naturais e  $N$  formas modais. Cada FRF pode ser escrita sob a forma de uma série de termos, cada um dos quais diz respeito à contribuição de cada modo de vibração à resposta total. Assim a receptância pode ser escrita como:

$$\alpha_{ks}(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{j A_{ks}}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\eta_j \omega \omega_j} \quad (2.52)$$

Onde  $\eta_j$  é o fator de perda modal,  $^j A_{ks}$  é a constante modal e  $\omega_j$  é a frequência natural, relativas ao  $j$ -ésimo modo de vibração;  $\omega$  é a frequência do carregamento; e  $\alpha_{ks}$  é a resposta modal do sistema, onde  $k$  é a posição do deslocamento e  $s$  é a posição da força.

#### 2.4.1.1.1.

#### Função Resposta em Frequência Pontual

A FRF pontual, quando sua magnitude é representada em escala logarítmica, apresenta uma anti-ressonância para cada par de ressonância, conforme mostra a Figura 2.10.

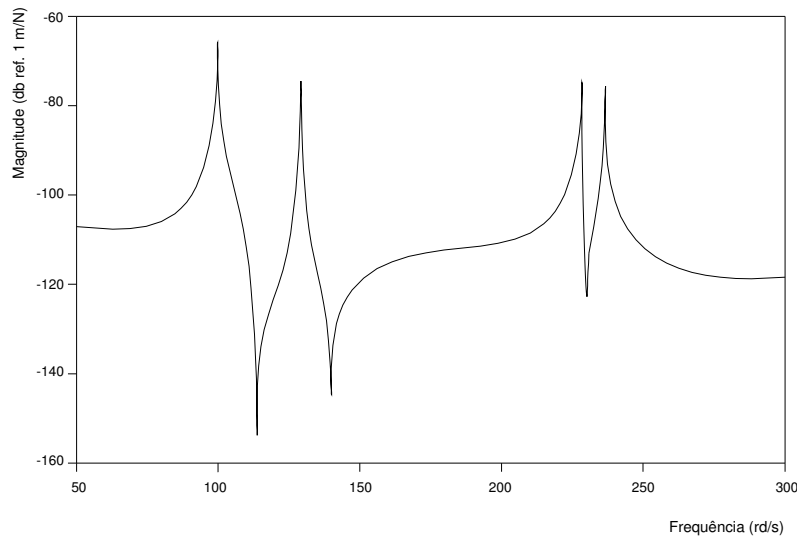


Figura 2.10-Função Resposta em Frequência (FRF) pontual.

A Figura 2.10 mostra picos invertidos entre picos de ressonância. Os picos são referentes a cada frequência natural do sistema. Os picos invertidos representam a mudança de fase de  $180^\circ$  associada com as ressonâncias.

#### 2.4.1.1.2.

#### Função Resposta em Frequência de Transferência

Neste caso não é certa a ocorrência da anti-ressonância para cada par de ressonância, conforme mostrado na Figura 2.11.

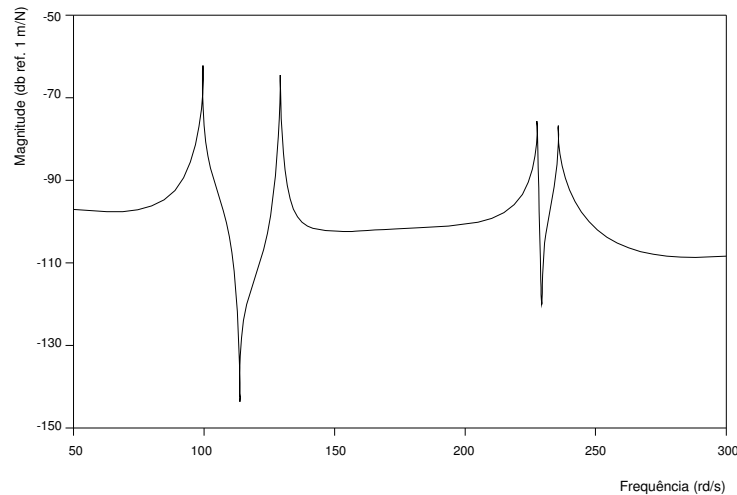


Figura 2.11 – Função Resposta em Frequência (FRF) de transferência.

Apresentam picos bem menores e os ângulos de fase diferentes de  $0^\circ$  e  $180^\circ$ .

#### 2.4.1.1.3.

#### Função Resposta em Frequência Impulsiva

A Função Resposta Impulsiva corresponde a uma Função Resposta em Frequência, e envolve o cálculo da inversa da Transformada de Fourier, que é uma característica padrão de um analisador espectral. (MAIA et al, 1997 apud AGUILERA, 2005)

#### 2.4.1.2.

#### Métodos de identificação modal

Os modelos no domínio do tempo, de um modo geral, tendem a fornecer melhores resultados quando existe uma larga faixa de frequência ou um número grande de modos presentes, considerando que os modelos no domínio da frequência tendem a fornecer melhores resultados quando a faixa de frequência de interesse é limitada e o número de modos é relativamente pequeno.

Os métodos no domínio do tempo e da frequência podem ser divididos em diretos e indiretos. Uma segunda classificação diz respeito ao número de modos que podem ser analisados ligados aos S1GL e SVGL. No domínio do tempo tem-se somente a análise de SVGL, enquanto que no domínio da

freqüência podemos ter a análise S1GL e SVGL como método indireto e como método direto apenas a análise SVGL.

Geralmente, quando se excita uma estrutura, um conjunto de FRF's é obtido, tendo por base a coleta de uma série de dados medidos. Estas FRF's são o resultado da excitação da estrutura em cada ponto selecionado e a medição da resposta em várias posições ao longo da estrutura. Alguns métodos de análise modal somente podem ser aplicados a uma única FRF de cada vez. Estes métodos são denominados métodos de única entrada/ única saída (SISO). Outros métodos permitem que várias FRF's sejam analisadas simultaneamente, com respostas tomadas em vários pontos sobre a estrutura, mas usando uma excitação pontual. Esses são denominados de métodos globais ou métodos de única entrada/ múltiplas saídas (SIMO). A filosofia por trás dessa categoria de métodos é que as freqüências naturais e os fatores de amortecimento não variam (teoricamente) de uma FRF para outra (elas são propriedades globais da estrutura) e, assim, deveria ser possível obter um conjunto único e consistente daquelas propriedades, processando várias FRF's ao mesmo tempo. Finalmente, existem métodos que podem processar simultaneamente todas as FRF's disponíveis obtidas de posições de várias respostas e excitações. Esses métodos são denominados de polireferência ou múltiplas entradas/ múltiplas saídas (MIMO). Situações de múltiplas entradas/ única saída (MISO) são também possíveis, mas são pouco usadas. (SOEIRO, 2001)

A Figura 2.12 mostra o diagrama com várias categorias possíveis de métodos.

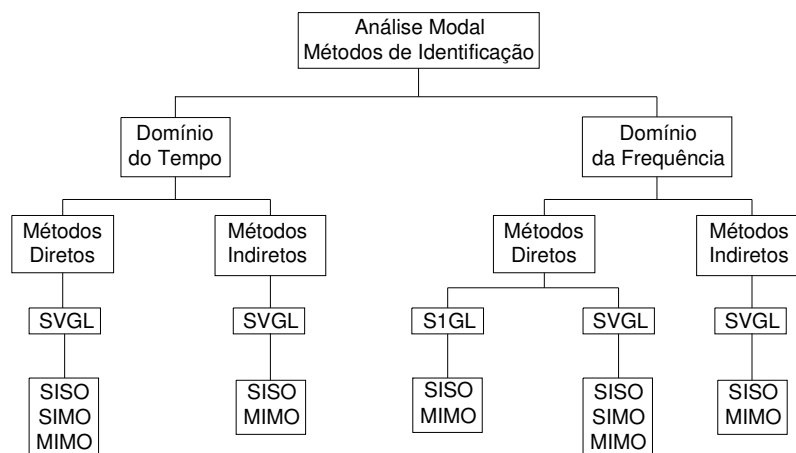


Figura 2.12 – Classificação dos métodos de análise modal.

### 2.4.1.2.1.

#### Métodos no domínio do tempo

##### Método da Exponencial Complexa

O método da exponencial complexa é um método simples de identificação modal, no domínio do tempo, que está na categoria dos métodos indiretos de vários graus de liberdade e que é classificado na categoria SISO, ou seja, é projetado para analisar uma única função impulsiva de cada vez.

No domínio da frequência, para um sistema linear, amortecido e N graus de liberdade, a FRF do tipo receptância  $\alpha_{ji}$  (deslocamento medido no ponto j para uma força aplicada no ponto i) pode ser dada pela equação (2.53).

$$\alpha_{ji}(i\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{{}^r A_{ji}}{\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega_d)} \quad (2.53)$$

Com  $\omega_d = \omega_r \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $\omega_{d(r+N)} = -\omega_{d(r)}$  e  ${}^{r+N} A_{ji} = {}^r A_{ji}^*$ . O símbolo (\*) usado denota o complexo conjugado. O método da exponencial complexa, ao contrário dos métodos de identificação modal no domínio da frequência, trabalha a função resposta impulsiva, obtida da equação (2.53) pela aplicação da transformada de Fourier, conforme a seguir:

$$h_{ji}(t) = \sum_{r=1}^{2N} {}^r A_{ji} e^{s_r t} \text{ ou } h(t) = \sum_{r=1}^{2N} A'_r e^{s_r t} \quad (2.54)$$

Onde  $s_r = -\omega_{n(r)} \xi_r + i\omega_{d(r)}$ . A resposta temporal  $h(t)$  é avaliada em uma série de intervalos igualmente espaçados  $\Delta t$ , por:

$$h_0 = h(0) = \sum_{r=1}^{2N} A'_r$$

$$h_1 = h(\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A'_r e^{s_r(\Delta t)} \quad (2.55)$$

$\vdots \rightarrow \vdots$

$$h_L = h(L\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r' e^{s_r(L\Delta t)}$$

Ou fazendo  $V_r = e^{s_r t}$ , simplesmente:

$$\begin{aligned} h_0 &= \sum_{r=1}^{2N} A_r' \\ h_1 &= \sum_{r=1}^{2N} A_r' V_r \\ &\vdots \rightarrow \vdots \\ h_L &= \sum_{r=1}^{2N} A_r' V_r^L \end{aligned} \quad (2.56)$$

Onde tem-se que  $A_r'$  é a constante modal e  $s_r$  são os autovalores.

Deve ser notado que na equação (2.56) os valores de  $A_r'$  e  $V_r$  não são conhecidos. Então, para calcular esses valores é utilizada uma técnica desenvolvida por Prony em 1775 e conhecida como Método de Prony (SOEIRO, 2001). Baseia-se no fato de que os pólos  $s_r$ , para um sistema sub-amortecido, sempre ocorrem em pares complexos conjugados. Foi estabelecido que existe um polinômio em  $V_r$ , de ordem  $L$ , com coeficientes reais  $\beta$ , denominados de coeficientes auto-regressivos, tal que a seguinte relação matemática pode ser escrita:

$$\beta_0 + \beta_1 V_r + \beta_2 V_r^2 + \dots + \beta_L V_r^L = 0 \quad (2.57)$$

Assim, de modo a calcular os coeficientes  $\beta$ , para avaliar  $V_r$ , é necessário apenas multiplicarem-se ambos os lados de cada uma das equações (2.56) pelos valores correspondentes de  $\beta_0$  a  $\beta_L$  e somar os resultados. Essa operação fornece a equação a seguir:

$$\sum_{j=0}^L \beta_j h_j = \sum_{j=0}^L (\beta_j \sum_{r=1}^{2N} A_r' V_r^j) = \sum_{j=0}^{2N} (A_r' \sum_{j=0}^L \beta_j V_r^j) \quad (2.58)$$

A soma interna da equação (2.58) é exatamente o polinômio da equação (2.57). Então, como o polinômio se anula para cada valor de  $V_r$ , segue que:

$$\sum_{j=0}^L \beta_j h_j = 0, \text{ para cada valor de } V_r \quad (2.59)$$

Através da equação (2.59) é possível calcular os coeficientes  $\beta_j$  que permitirão a solução do polinômio da equação (2.57), determinando-se os valores de  $V_r$ . Para calcular os  $\beta_j$  procede-se como segue:

- Por conveniência  $L$  pode ser tomado como  $2N$ ;
- Então, existirão  $2N$  conjuntos de pontos  $h_j$ , cada um adiantado em relação ao outro em intervalo de tempo  $\Delta t$ ;
- Toma-se  $\beta_{2N}$  igual à unidade.

Portanto, o resultado deste procedimento é a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \cdots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ h_{2N+2} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

Ou, simplesmente:

$$[h]_{2N \times 2N} \{\beta\}_{2N \times 1} = \{h\}_{2N \times 1} \quad (2.61)$$

Determinados os coeficientes  $\beta_j$ , um algoritmo de solução de polinômio pode ser usado para determinar as raízes  $V_r$ . Posteriormente, usando a relação  $V_r = e^{s_r t}$  e seu valor complexo correspondente, podem-se determinar as frequências naturais e os fatores de amortecimento. Por outro lado, com os valores de  $V_r$ , usa-se a equação (2.56) para calcular os resíduos e, conseqüentemente, as constantes modais. Os resíduos são facilmente calculados reescrevendo a equação (2.56) como:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ V_1 & V_2 & \dots & V_{2N} \\ V_1^2 & V_2^2 & \dots & V_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ V_1^{2N-1} & V_2^{2N-1} & \dots & V_{2N}^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{2N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2N-1} \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

Onde, por conveniência, foram tomados os primeiros (2N-1) valores de  $h_j$ . Na realidade, é bastante tomar (N -1) valores, uma vez que  $A_r$  e  $V_r$  aparecem em pares conjugados (SOEIRO,2001).

### **Método da Exponencial Complexa – Mínimos Quadrados (LSCE)**

Este método de identificação foi introduzido em 1979 e é a extensão do método da exponencial complexa para um procedimento global de identificação modal (SOEIRO, 2001). Portanto, este método é um método SIMO, ou seja, ele processa simultaneamente várias Funções Respostas Impulsivas, referentes a vários pontos de medição, que são obtidas a partir da aplicação de uma força em um único ponto. Neste procedimento de análise, um conjunto consistente de parâmetros globais (frequências naturais e fatores de amortecimento modais) é obtido eliminando-se a variação obtida para estes parâmetros quando se aplica o método da exponencial complexa em diferentes Respostas Impulsivas.

### **Método de Ibrahim**

Trata-se de um método global de ajustamento no domínio do tempo. A formulação deste método inclui estados vetoriais, onde a resposta de deslocamento e velocidade necessita de cálculos de integração da resposta de aceleração livre. Usa resposta em vibração livre amortecida ao invés da Função Resposta Impulsiva. Para um sistema de N graus de liberdade, a resposta da estrutura para um ponto i e um instante t é expressa como a soma da resposta individual de cada modo (MAIA et al, 1997 apud AGUILERA, 2005).

### 2.4.1.2.2.

#### Métodos no domínio da freqüência

##### Método da Amplitude de Pico

Este é o método mais simples conhecido para identificar os parâmetros modais de uma estrutura. As freqüências são tomadas simplesmente da observação dos picos da curva de magnitude da resposta. Os fatores de amortecimento são calculados da agudeza dos picos e as formas modais são calculadas das razões das amplitudes dos picos em vários pontos sobre a estrutura. De modo a levar em conta a amplitude da força de excitação, o uso da receptância representa um melhoramento do método. Esse método considera que os modos são reais e, embora seja bastante simplório, ele pode fornecer resultados razoáveis se os modos são bem separados e se o amortecimento não é muito alto.

##### Método da Resposta de Quadratura e do Componente Máximo de Quadratura

Este método difere do método da amplitude de pico pela forma de determinar a posição das freqüências naturais da estrutura. O método da resposta de quadratura localiza as freqüências naturais nos pontos onde a componente em fase da resposta (a parte real) é nula. Isto corresponde a uma diferença de fase de 90 graus entre a função força e a resposta. O método do componente máximo de quadratura considera que as freqüências naturais ocorrem nos pontos onde a componente de quadratura da resposta (parte imaginária) tem um máximo (ou mínimo). Essa componente está 90 graus fora de fase com a excitação (SOEIRO, 2001).

##### Método de Ajuste do Círculo

Como foi visto anteriormente, a Receptância de um sistema de N graus de liberdade, com amortecimento histerético, é dada pela seguinte expressão:

$$\alpha_{ks}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{r A_{ks}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega \omega_r} \quad (2.63)$$

Onde  $\eta_r$  e  ${}^r A_{ks}$  são, respectivamente, o fator de perda e a constante modal complexa  ${}^r A_{ks} = A_r e^{i\phi_r}$  associados com r-ésimo modo.

Na prática, existe uma faixa limitada de frequências para a qual os dados experimentais são coletados. A contribuição à resposta total dos termos situados fora da faixa experimental de frequência pode ser levada em conta por meio de resíduos. O método de ajustamento de círculo assume a hipótese que a contribuição dos modos fora da faixa àquela particular sob estudo é uma constante. Assim a equação (2.63) é aproximada por:

$$\alpha_{ks}(\omega) = \frac{{}^r A_{ks}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega \omega_r} + {}^r B_{ks} \quad (2.64)$$

Onde  ${}^r B_{ks}$  é uma constante complexa associada com o modo r. Por outro lado, como já discutido, o diagrama de Nyquist de  $1/(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega \omega_r)$  é um círculo. Olhando a equação (2.64), observa-se que a multiplicação pela constante complexa  ${}^r A_{ks}$  significa uma ampliação ou redução do raio do círculo, tanto quanto uma certa rotação, e que a adição de  ${}^r B_{ks}$  corresponde a uma simples translação (SOEIRO, 2001). Como de fato é apresentado no diagrama de Nyquist a equação (2.64), a curva completa não será exatamente um círculo, mas apresentará seções de arco de círculo ao redor da frequência natural, como ilustrado na Figura 2.13.

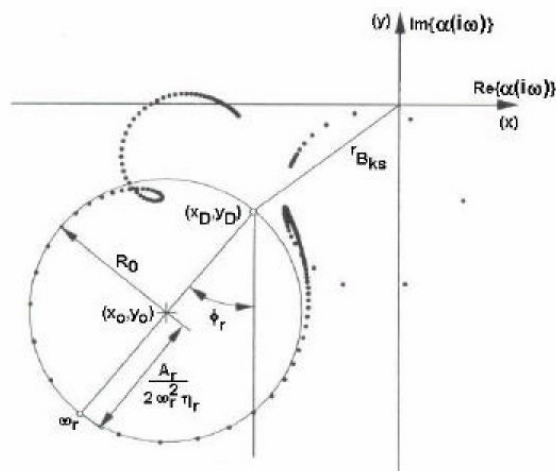


Figura 2.13 – Diagrama de Nyquist mostrando o ajuste do círculo.

Este método consiste basicamente no ajuste de um círculo à curva de resposta em frequência, próxima à frequência natural. A curva complexa não representará exatamente um círculo, mas apresentará seções de círculo ao redor da frequência natural.

Este método é frequentemente desconsiderado devido ao fato de se dizer que ele somente trabalha bem quando os modos estão bem separados e para valores de amortecimento não tão altos. Entretanto, na opinião de alguns pesquisadores esse método trabalha muito bem para a maioria dos casos mesmo quando se trata de estruturas altamente complexas (SOEIRO, 2001).

### **Método dos Mínimos Quadrados**

Seja a função Receptância para o mecanismo de amortecimento hysterético, conforme mostrado a seguir:

$$\alpha_{ks}(i\omega) = \sum_j \frac{{}^j A_{ks}}{s_j - \omega^2} \quad \text{onde} \quad s_j = \omega_j^2(1 + \eta_j) \quad (2.65)$$

O somatório da equação (2.65) se estende pelo número de modos da banda de frequência considerada. Por simplicidade, faz-se  $A_j = {}^j A_{ks}$ .

O erro em cada valor experimental da frequência é:

$$E_k = \frac{A_r}{s_r - \omega^2} + \sum_{j \neq r} \frac{A_j}{s_j - \omega^2} - H(i\omega_k) \quad (2.66)$$

Sendo  $H(i\omega_k)$  o valor experimental da função resposta em frequência do tipo Receptância e o somatório representa a contribuição dos modos afastados do  $r$ -ésimo modo.

Por definição:

$$B_k = \sum_{j \neq r} \frac{A_j}{s_j - \omega^2} - H(i\omega_k) \quad (2.67)$$

onde os parâmetros  $A_j$  e  $s_j$  são conhecidos previamente. Por exemplo, suponha-se que esses parâmetros tenham sido determinados por ajustamento do círculo por Nyquist ou pelo método inverso. Desta forma, os  $B_k$  podem ser calculados, com  $k=1, 2, \dots, N$ , sendo  $N$  o número de pontos de frequência em que  $H(i\omega_k)$  foi medida. Portanto, pode-se reescrever a equação (2.66) como a seguir:

$$E_k = \frac{A_r}{s_r - \omega_k^2} + B_k \quad \text{ou} \quad E_k = \frac{1}{s_r - \omega_k^2} [A_r + B_k(s_r - \omega_k^2)] \quad (2.68)$$

O objetivo aqui é o de atualizar os valores das constantes modais e autovalores pelo método do mínimo erro quadrático. Assim, definindo o fator de peso  $P_k = 1/(s_r - \omega_k^2)$ , que é computado com o valor prévio de  $s_r$ , pode-se escrever a seguinte expressão para o erro quadrático:

$$\text{ERRO}_k^2 = E_k E_k^*$$

$$E_k E_k^* = |P_k|^2 \left[ |A_r|^2 + (s_r - \omega_k^2) A_r^* B_k + (s_r^* - \omega_k^2) A_r B_k^* + |(s_r - \omega_k^2) B_k|^2 \right] \quad (2.69)$$

Então, somando-se os erros referentes a cada ponto  $k$  de frequência, derivando em relação aos conjugados complexos das constantes modais e autovalores, e igualando a zero, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum_k |P_k|^2 & \sum_k |P_k|^2 B_k \\ \sum_k |P_k|^2 B_k^* & \sum_k |P_k|^2 |B_k|^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_r \\ s_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_k |P_k|^2 B_k \omega_k^2 \\ \sum_k |P_k|^2 |B_k|^2 \omega_k^2 \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

A solução da equação (2.70) fornece os valores atualizados de  $A_r$  e  $s_r$ , computados em função dos valores previamente estabelecidos dentro da banda de frequência varrida por  $k$ .

A cada iteração, o valor do erro é calculado pela equação (2.69) usando-se os valores atualizados. Então, um critério de convergência adequado deve ser usado, tal como o apresentado na equação abaixo, de modo a sinalizar quando o processo iterativo deve ser encerrado:

$$\frac{|\text{Erro}_{\text{atual}}^2 - \text{Erro}_{\text{anterior}}^2|}{\text{Erro}_{\text{anterior}}^2} < 0,01 \quad (2.71)$$

O desenvolvimento matemático aqui apresentado permite que se estabeleça a seguinte metodologia:

1. Tomar como dados de entrada inicial um conjunto de valores de  $A_j$  e  $s_j$ , correspondentes aos modos contidos na banda de frequência de interesse, obtidos por qualquer um dos métodos já apresentados.

2. Montar a equação (2.70), resolvê-la e determinar o novo conjunto de  $A_j$  e  $s_j$ . Esse procedimento deve ser feito para a obtenção de valores atualizados de  $A_j$  e  $s_j$  para cada um dos modos contidos na banda de frequência de interesse.
3. Verificar o critério de convergência. Se este critério for obedecido parar o procedimento, caso contrário, repetir os passos anteriores até que a convergência seja obtida.

É claro que a convergência é obtida com menor número de iterações se os valores iniciais de  $A_j$  e  $s_j$  forem bem escolhidos. Uma boa recomendação é a de se obterem os valores iniciais de  $A_j$  e  $s_j$  pelo ajustamento do círculo de Nyquist (SOEIRO, 2001).

## 2.5.

### Considerações finais

Como este é o primeiro trabalho sobre o estudo dinâmico com bambu, houve a necessidade de se fazer uma revisão bibliográfica completa em análise dinâmica que servirá de base para qualquer outra pesquisa desenvolvida nesta área, já que não será necessária a utilização de todos os métodos nesta dissertação.

Com a revisão bibliográfica realizada, já existe base para desenvolver os experimentos, estudando as espécies *Dendrocalamus giganteus*, *Phyllostachys aurea* e *Guadua angustifolia*.