

3. Distribuição espacial aleatória

Em diversos processos logísticos de coleta e distribuição é importante estimar a quantidade de pontos de coleta ou distribuição de uma área de atendimento, a fim de que se possa dimensionar e alocar suprimentos, frotas, custos e pessoal a estes pontos. Essas estimativas requerem um tratamento probabilístico que relacione a quantidade de pontos à sua densidade média ou às dimensões de uma área de atendimento.

NOVAES [1989] comenta que o processo de Poisson, já muito utilizado por suas propriedades de aleatoriedade em problemas de transportes como, por exemplo, o número de veículos em posto de pedágio, número de acidentes em rodovias, a chegada de passageiros ao “check-in” de um aeroporto, seria o melhor processo probabilístico a ser aplicado para estimar o número de pontos em uma área de atendimento. Portanto, a fórmula clássica de Poisson para que se obtenha a probabilidade de ocorrer K eventos em um intervalo fixo de tempo $[0,t]$ é:

$$P[X(t) = K] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{K!}, \text{ para } t \geq 0, K = 0, 1, 2, \dots$$

onde:

$P[X(t) = K]$ → Probabilidade de ocorrer K eventos no intervalo $[0,t]$;

λ → Constante positiva que representa a taxa média de ocorrência de eventos por unidade de tempo.

LARSON & ODONI [1981] apresentam a distribuição de Poisson para um processo espacial da seguinte forma:

$$P[X(S) = K] = \frac{(\lambda A(S))^k e^{-\lambda A(S)}}{K!} \text{ para } A(S) \geq 0, K=0, 1, 2, \dots$$

onde:

S → Uma região delimitada;

$X(S)$ → O número de eventos contidos em S ;

K → Número de eventos;

λ → Densidade média de eventos por área

$A(S)$ → Área da região S , onde ocorrem os eventos.

No caso de uma distribuição de Poisson, as mesmas proposições utilizadas na forma temporal podem ser repetidas na forma espacial, ou seja:

- $X(S) \geq 0$ e $0 < P\{X(S) > 0\} < 1$ se $A(S) > 0$;
- Se $A(S) \rightarrow 0$ então $P\{X(S) \geq 1\} \rightarrow 0$;
- Se os eventos em $A_1(S)$ e $A_2(S)$ são regidos pelo processo de Poisson, onde:

$$P\{X(S_1) = K_1\} = \frac{(\lambda A_1(S))^{K_1} e^{-\lambda A_1(S)}}{K_1!} \quad e$$

$$P\{X(S_2) = K_2\} = \frac{(\lambda A_2(S))^{K_2} e^{-\lambda A_2(S)}}{K_2!}$$

para $A_1(S) \cap A_2(S) = \{\emptyset\}$, $A_1(S) + A_2(S) = A(S)$ e $K = K_1 + K_2$.
Pode-se afirmar que:

$$P\{X(S) = K\} = \frac{(\lambda A(S))^k e^{-\lambda A(S)}}{K!}$$

- $\lim_{A(S) \rightarrow 0} \frac{P\{X(S) \geq 1\}}{P\{X(S) = 1\}} = 1$;
- $E(X) = \lambda A(S)$;
- $\text{VAR}(X) = \lambda A(S)$;

Outra propriedade interessante na distribuição de Poisson é a sua relação com a distribuição Normal ou Gaussiana. **SPIEGEL [2003]** mostra que se X é a variável de Poisson, formulada anteriormente, e $(X - \lambda) / \sqrt{\lambda}$ é a correspondente variável aleatória padronizada, então:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du$$

onde:

$\mu \rightarrow$ A média de eventos para uma distribuição Normal.

Isto significa que a distribuição de Poisson tende para a distribuição Normal, quando $\lambda \rightarrow \infty$ ou que $(X - \lambda) / \sqrt{\lambda}$ é assintoticamente normal. **NOVAES [1989]** acrescenta que, na prática, para $E(X) \geq 15$, pode-se aproximar a distribuição de Poisson por uma distribuição Normal com média e variância iguais.

LEAL [2003] apresenta um exemplo para a estimativa de número de pontos de atendimento em uma área com uma distribuição espacial aleatória, onde mostra as propriedades de uma distribuição de Poisson. Tem-se, então:

Deseja-se calcular a variação dos números de pontos servidos em uma distribuição de garrações de água realizada uma vez por semana, onde a densidade média populacional é de 2000 habitantes por Km^2 , o consumo médio é de 0,20 garrafão de água por habitantes por mês e a área de entrega é de 4 Km^2 .

- *O número de garrações, $E(N)$, servidos por semana é:*

$$E(N) = \lambda At, \text{ para}$$

$$\lambda = (2000 \text{ hab} / \text{km}^2) \cdot 0,20 \text{ garrafão} / (\text{hab} \cdot \text{mes});$$

$$A = 4 \text{ Km}^2;$$

$$t = 7 \text{ dias.}$$

$$E(N) = \frac{2000 \text{ hab} \cdot 4 \text{ km}^2 \cdot 0,20 \text{ garrafão} \cdot 7 \text{ dias}}{\text{km}^2 \cdot \text{hab} \cdot 30 \text{ dias}} = 373,33 \text{ garrações}$$

Este é o número médio de garrações que deverão ser servidos para uma viagem semanal de atendimento à área.

- *Considerando a variância (σ^2) igual à média (propriedade de Poisson), tem-se:*

$$\sigma = \sqrt{373,33} = 19,32 \text{ garrações}$$

- Como $E(N)=373,33$ garrações é maior que 15, pode-se aproximar a distribuição de Poisson por uma função Normal. Então, para um intervalo de confiança de 95%, tem-se como limites da variação de $E(N)$:

$$N_1 \leq E(N) \leq N_2,$$

onde:

$$N_1 = E(N) - 1,96\sigma_N$$

$$N_2 = E(N) + 1,96\sigma_N$$

Portanto, $E(N)$ varia no intervalo $[335,46;411,2]$.

3.1. A distância entre pontos próximos

Um problema típico de Logística é avaliar a distância entre pontos próximos de uma região que estão distribuídos por um processo de Poisson. Essa avaliação ocorre no dimensionamento de serviços de emergência públicos, equipes de manutenção técnica e patrulhamentos. Essa distância é calculada de acordo com as métricas euclidiana e retangular.

Para a métrica euclidiana **LARSON & ODoni [1981]** exemplificam este problema logístico, concebendo uma região de área A com pontos de respostas de emergência com um densidade de γ pontos por unidade de área . Os autores determinam a distância entre um ponto de incidente qualquer e o ponto mais próximo de resposta. A solução segue os seguintes passos:

- Considere o ponto de incidente com coordenadas (x,y) ;
- Construa um círculo de raio r em torno do ponto de incidente (x,y) ;
- A probabilidade que haja exatamente K unidades de resposta dentro do círculo de raio r é:

$$P\{X(\text{círculo}) = K\} = \frac{(\gamma\pi r^2)^K e^{-\gamma\pi r^2}}{K!} \quad K= 0,1,2,\dots$$

A probabilidade de não haver outro ponto no círculo, além do ponto central é:

$$P\{X(\text{círculo}) = 0\} = e^{-\gamma\pi r^2}$$

- Sendo D a distância do ponto central do círculo ao ponto mais próximo, tem-se a seguinte função de distribuição acumulada:

$$F_D(r) \equiv P\{D \leq r\} = 1 - P\{D > r\} = 1 - P\{X(\text{círculo}) = 0\}$$

$$F_D(r) = 1 - e^{-\gamma\pi r^2} \quad \text{para } r \geq 0$$

- A função densidade de probabilidade é:

$$f_d(r) = \frac{d}{dr} F_D(r) = 2r\gamma\pi e^{-\gamma\pi r^2} \quad r \geq 0$$

Esta função é conhecida como uma Distribuição de Rayleigh com parâmetro $\sqrt{2\gamma\pi}$, tendo sua média e desvio padrão iguais a :

$$E[D] = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^{-1}} = 0,5\gamma^{-1/2} \quad \sigma_D = \sqrt{\frac{2 - \frac{\pi}{2}}{2\pi\gamma}} = 0,261\gamma^{-1/2}$$

- O coeficiente de variação da distribuição é:

$$C_v = \frac{\sigma_D}{E[D]} = 2\sqrt{\frac{2 - \frac{\pi}{2}}{2\pi}} = 0,523$$

LARSON & ODONI [1981] estimam para a métrica retangular, seguindo os seguintes passos:

- Considere o ponto de incidente com coordenadas (x,y) ;
- Construa um quadrado girado em 45° , com a distância do ponto central deste quadrado a uma de suas arestas igual a r . A área deste quadrado é igual a $2r^2$;

- A probabilidade que haja exatamente K unidades de resposta dentro do quadrado onde a metade da diagonal é r, e portanto o seu lado é $r\sqrt{2}$ pode ser escrita como:

$$P\{X(\text{quadrado}) = K\} = \frac{(\gamma 2r^2)^K e^{-\gamma 2r^2}}{K!} \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

A probabilidade de não haver outro ponto no círculo, além do ponto central é:

$$P\{X(\text{quadrado}) = 0\} = e^{-\gamma 2r^2}$$

- Sendo D a distância do ponto central do quadrado ao ponto mais próximo, tem-se a seguinte função de distribuição acumulada:

$$F_D(r) \equiv P\{D \leq r\} = 1 - P\{D > r\} = 1 - P\{X(\text{círculo}) = 0\}$$

$$F_D(r) = 1 - e^{-\gamma 2r^2} \quad \text{para } r \geq 0$$

- A função densidade de probabilidade é:

$$f_d(r) = \frac{d}{dr} F_D(r) = 4r\gamma e^{-\gamma 2r^2} \quad r \geq 0$$

Esta função é conhecida como uma distribuição de Rayleigh com parâmetro $\sqrt{4\gamma}$, tendo sua média e desvio padrão iguais a :

$$E[D] = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} = 0,627\gamma^{-1/2} \quad \sigma_D = \sqrt{\frac{2 - \pi}{4\gamma}} = 0,327\gamma^{-1/2}$$

- O coeficiente de variação da distribuição é:

$$C_v = \frac{\sigma_D}{E[D]} = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} = 0,523$$

NOVAES [1989] destaca a igualdade dos coeficientes de variação das métricas retangular e euclidiana para distâncias entre pontos próximos,

mencionando que a variação relativa em torno da média C_v independe da métrica seguida.

Adotando um exemplo de **LEAL [2003]** para a estimativa de número de pontos de atendimento em uma área com uma distribuição espacial aleatória, tem-se:

Deseja-se calcular a distância média e o desvio padrão de um ponto para o ponto mais próximo, para um serviço de reparação em uma área de malha urbana mais ajustada para a métrica retangular, onde a densidade de chamadas por km^2 , γ , é de 0,7 e o coeficiente de correção da distância, K , é 1,3.

- *A distância média na métrica retangular é:*

$$E[D] = \frac{1}{4} \sqrt{2\pi\gamma^{-1}} = \frac{1}{4} \sqrt{2\pi 0,7^{-1}} = 0,749 Km$$

- *O desvio padrão é:*

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{2 - \frac{\pi}{2}}{4\gamma}} = \sqrt{\frac{2 - \frac{\pi}{2}}{4 \cdot 0,7}} = 0,390 km$$

- *Para um coeficiente de correção (K) igual a 1,3, tem-se:*

$$E[D] = 1,3 \cdot 0,749 Km = 0,973 Km$$

$$\sigma_D = 1,3 \cdot 0,390 Km = 0,508 Km$$

LARSON & ODoni [1981] relatam que, na prática, a maioria dos sistemas não se amolda integralmente aos postulados de uma distribuição de Poisson. Por isso, cabe ao modelador de um sistema pesar os benefícios de utilizar um modelo simples com uma distribuição de Poisson contra o custo de resultados não precisos e o custo de desenvolvimento de modelos mais complexos.

Os autores, então, apresentam alternativas de distribuição espacial para casos onde não se verifica a propriedade de falta de memória de Poisson, isto é, onde a existência ou não existência de um processo de distribuição em uma região não influencia um outro processo de Poisson em áreas próximas. Por exemplo, há casos onde a existência de certos pontos de comércio, indústria ou serviços atraem para pontos próximos o mesmo tipo de atividade. Observam-se, então, ruas com

diversas oficinas de carro, ou lojas de materiais para construção e setores de bairro com um bom número de clínicas médicas. Este processo é conhecido como de “Clustering”. Por outro lado, há certas atividades que provocam a não ou pouca existência de outras em áreas próximas. Este processo é conhecido como “spread” e ocorre com bibliotecas, supermercados e “fastfoods”.

A modelagem dos processos de “clustering” e “spread” não é fácil de ser utilizada e algumas adaptações, portanto, são praticadas para contornar as dificuldades. Uma adaptação praticada pelos pesquisadores é considerar uma cidade ou região como um conjunto de células de mesma dimensão e procurar dimensionar o número de pontos em uma particular célula. Se os pontos estão distribuídos por um processo de Poisson sabe-se que a média é igual à variância e isso pode ser representado por:

$$r = \frac{\sigma_N^2}{E[N]} = 1,$$

onde:

$\sigma_N^2 \rightarrow$ Variância;

$E[N] \rightarrow$ Média.

Essa distribuição pode ser ilustrada desta forma:

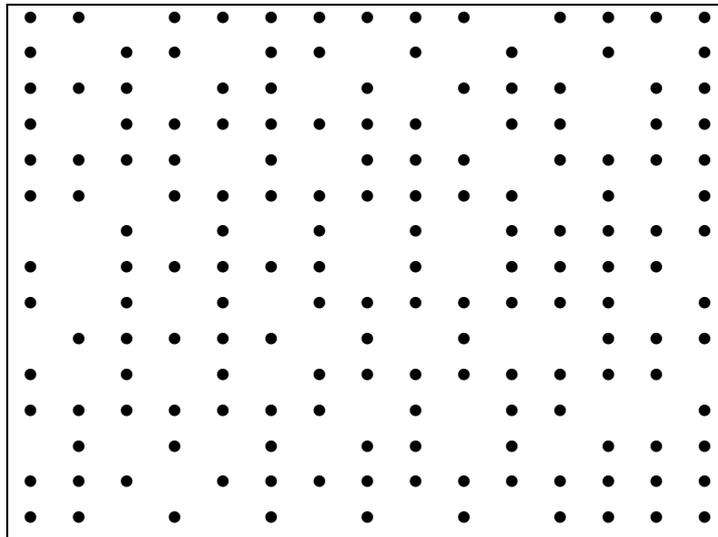


Figura 9 - Ilustração de uma distribuição de Poisson

Para o processo de “spread”, pode-se esperar que mantida a média com os valores do Processo de Poisson, haveria menos valores mais afastados e mais

valores uniformemente distribuídos em torno da média. Isto resultaria em ter a variância menor que a média e portanto:

$$r = \frac{\sigma_N^2}{E[N]} < 1$$

Caso se tenha uma perfeita distribuição, onde para cada célula há uma perfeita regularidade de pontos e um mesmo número, a variância seria zero, o mesmo ocorrendo com r . **LARSON & ODONI [1981]** comentam que muitas vezes o processo de spread é chamado de processo regular. Ele pode ser ilustrado pela figura a seguir:

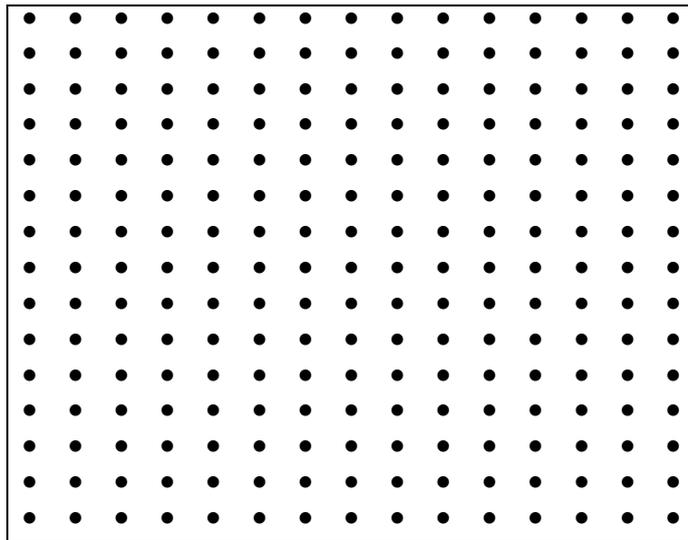


Figura 10 - Ilustração de uma distribuição "spread"

Para o processo de "Clustering", haveria muitas células sem algum ponto e outras com maior número de pontos que a média prevista pelo processo de Poisson. Portanto neste caso a variância seria maior que no processo de Poisson e então:

$$r = \frac{\sigma_N^2}{E[N]} > 1$$

No caso extremo deste processo, haveria todas as células vazias exceto uma que teria todos os pontos estimados, isto é, $E[N]$.

Este processo pode ser ilustrado, desta forma:

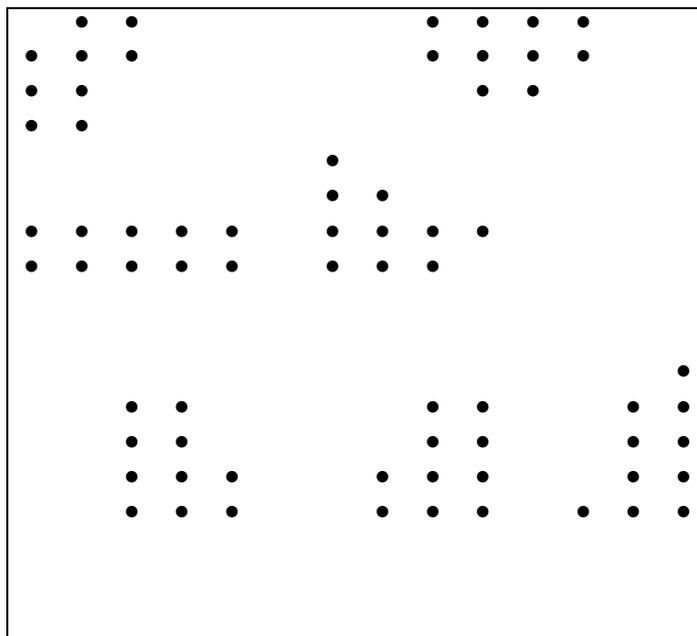


Figura 11 - Ilustração de uma distribuição "clustering"

ROGERS [1974] estudou particulares processos de "spread" e "clustering", ligados ao processo de Poisson e que são úteis para a logística de varejo. O processo de "spread" de Rogers é um processo binomial. O processo se desenvolve, considerando a entrada de pontos em uma célula de interesse num intervalo de tempo $[0,t]$, sendo que no instante 0 não há algum ponto. O que se quer determinar é o número de pontos que haverá num instante t qualquer. A suposição inicial é que os pontos começam a entrar na célula num processo de Poisson, com uma taxa c por unidade de tempo. Então, após o primeiro ponto entrar na célula, a célula se torna menos atrativa, e a entrada do próximo ponto se dará a uma taxa $c-b$ por unidade de tempo ($c > 0, b > 0$). O processo se desenvolve tal que após k chegadas a taxa é reduzida para $c-kb$. **ROGERS [1974]** assume que c/b é o número inteiro para o maior valor de k e que, portanto, a taxa de entrada de pontos na célula para k_{\max} é $c - k_{\max}b = 0$. **ROGERS [1974]** ilustra este processo com o seguinte diagrama:



Figura 12 - Processo de “spread” de Rogers

LARSON & ODoni [1981] apresentam as seguintes fórmulas para esse processo:

$$P_m(t) = \binom{c/b}{m} (1 - e^{-bt})^m (e^{-bt})^{(c/b)-m} \quad \text{para } m=0,1,2,\dots,c/b \text{ e } t \geq 0$$

onde:

$P_m(t)$ → a probabilidade de m pontos num instante t ;

c → a taxa positiva inicial de entrada pelo processo de Poisson;

b → a taxa positiva de perda de atratividade de entrada na área ou célula;

$$E[N]_{(t)} = \frac{c}{b}(1 - e^{-bt}) \quad \text{e} \quad \sigma_{N(t)}^2 = \frac{c}{b}(1 - e^{-bt})e^{-bt}$$

onde:

$E[N]_{(t)}$ → a média de pontos no instante t ;

$\sigma_{N(t)}^2$ → a variância.

A razão r da variância pela média é $r = e^{-bt}$, um valor sempre menor que a unidade, concordando com as deduções de r para um processo “spread” apresentadas anteriormente.

Para o processo “clustering” de **ROGERS [1974]** a distribuição é binomial positiva. O modelo assume que uma célula se torna mais atrativa com cada entrada de pontos na célula. Se a entrada na célula começa com um processo de Poisson a uma taxa c por unidade de tempo. Então, após o primeiro ponto entrar na célula, a célula se torna mais atrativa, e a entrada do próximo ponto se dará a

uma taxa $c+b$ por unidade de tempo. E assim o processo se desenvolve tal que após m chegadas a taxa será de $c+mb$ ($c>0$, $b>0$). . **ROGERS [1974]** ilustra este processo com o seguinte diagrama:

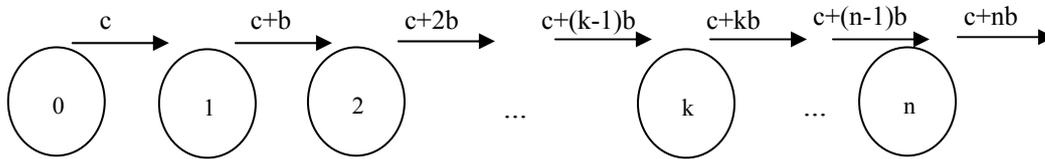


Figura 13 - Processo de “clustering” de Rogers

LARSON & ODONI [1981] apresentam as seguintes fórmulas para esse processo:

$$P_m(t) = \binom{c/b + m - 1}{m} (1 - e^{-bt})^m (e^{-bt})^{c/b} \quad \text{para } m=0,1,2,\dots,c/b \text{ e } t \geq 0$$

onde:

$P_m(t)$ → a probabilidade de m pontos num instante t ;

c → a taxa positiva inicial de entrada pelo processo de Poisson;

b → a taxa positiva de ganho de atratividade de entrada na área ou célula;

$$E[N]_{(t)} = \frac{c}{b}(e^{bt} - 1) \quad \text{e} \quad \sigma_{N(t)}^2 = \frac{c}{b}(e^{bt} - 1)e^{bt}$$

onde:

$E[N]_{(t)}$ → a média de pontos no instante t ;

$\sigma_{N(t)}^2$ → a variância.

A razão r da variância pela média é $r = e^{bt}$, um valor sempre menor que a unidade, estando de acordo com as deduções de r para um processo “clustering” apresentadas anteriormente.