

2. Métricas espaciais

2.1. Definições

Um dos aspectos mais relevantes no planejamento de um sistema logístico é a definição da localização dos pontos que formam uma cadeia de suprimentos. Esses pontos são, normalmente, associados a fornecedores, produtores, armazéns, depósitos e clientes, ou quaisquer outros elementos de uma rede logística para os quais é possível demarcar sua posição geográfica.

A definição da posição geográfica desses pontos contribui, sobremaneira, para reduzir custos de transportes, minimizar tempo de atendimento, maximizar a satisfação do cliente ou otimizar alguma medida de utilidade que reflita as estratégias adotadas por uma cadeia de suprimento.

Tem-se, portanto, de buscar métodos de análise que resolvam problemas de localização geográfica dos pontos de uma cadeia de suprimento, medindo de forma acurada as distâncias entre esses pontos e procurando situá-los de forma otimizada sob restrições de capacidade de produção, transporte, tempos e custos.

De início, uma característica importante na análise de problemas de localização é a restrição de percurso. Quando há condicionantes de caminho entre dois pontos de uma cadeia de suprimentos, fica-se diante de uma rede, onde os nós são os pontos já mencionados e os caminhos são os arcos da rede. A análise de rede representa, de forma geral, os problemas de localização sob um sistema de transporte em uma malha já definida, onde se tem determinadas as possibilidades de percursos. A otimização de percursos em uma rede é tratada através de grafos e não será mencionada nesta dissertação.

PIZZOLATO [2003] comenta que, quando não há restrição de percurso, pode-se dizer que há um conjunto infinito de itinerários entre dois pontos, que, para os casos tratados nessa dissertação, este conjunto estaria no mesmo plano. Este tipo de análise sem restrição de percurso se presta, por exemplo, para localização de instalações petrolíferas no mar ou para a definição de pontos de distribuição de serviços elétricos, telefônicos e de água. Também, pode-se utilizar esta abordagem para projetos de rede com restrições no percurso, onde há um número expressivo de configurações, sem a necessidade de resultados detalhados. Um exemplo para esses casos ocorre, geralmente, em áreas geográficas amplas,

onde os pontos, a serem determinados, podem ser cidades. Nestes casos agregam-se os dados, simplificando a análise e encontrando respostas menos precisas porém mais rápidas. Diante dessas ocorrências, titula-se esse tipo de análise como análise agregada.

Na análise agregada sem restrições de percurso, o primeiro passo para o problema de localização de pontos é a definição da métrica que se utilizará para a mensurar as distâncias entre esses pontos. As métricas mais utilizadas são a Métrica Euclidiana e a Métrica Retangular.

Conforme **PIZZOLATO [2003]**, a Métrica Euclidiana utiliza-se do princípio de que o caminho mais curto entre dois pontos é uma reta e a mensuração dessa reta provém da geometria básica desenvolvida por Euclides.

A Métrica Retangular é mais utilizada em rede de artérias urbanas por ser mais coerente com os traçados perpendiculares das rotas constituídas de ruas e avenidas, normalmente, exibidos nas cidades modernas ou planejadas. A Métrica Retangular é referenciada, muitas vezes pelos autores norte-americanos, como Métrica de Manhattan ou Métrica Metropolitana, devido ao delineamento da rede urbana de transportes da Ilha de Manhattan na cidade de New York.

As distâncias entre dois pontos nas métricas euclidiana e retangular podem ser definidas da seguinte forma:

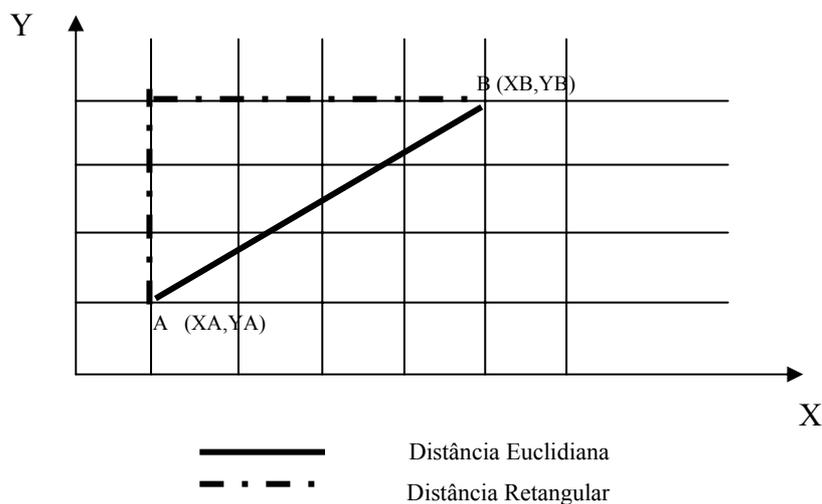


Figura 1 – Distância Euclidiana e Retangular

Distância Euclidiana:

$$DE_{AB} = \left[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 \right]^{1/2}$$

Distância Retangular:

$$DR_{AB} = [|X_A - X_B| + |Y_A - Y_B|]$$

Na prática, numa cadeia de suprimento, raramente tem-se um trajeto entre dois pontos em forma de uma linha reta ou de forma retangular tão clássica quanto da Ilha de Manhattan. Normalmente as distâncias efetivas entre pontos são maiores que a distância euclidiana, já que essa é a distância mínima. Então para se usar a Métrica Euclidiana ou a Métrica Retangular, procura-se ajustá-las às distâncias reais, empregando um fator de correção. Esse fator, segundo **NOVAES [1989]**, pode ser obtido por regressão simples, tendo-se portanto:

$$D_{AB} = a + bDE_{AB}$$

ou

$$D_{AB} = a + bDR_{AB}$$

NOVAES[1970], tomando como amostra 110 ligações sobre a rede de estradas pavimentadas do Estado de São Paulo, ajustou, por regressão simples ($R^2 = 0,989$), a seguinte relação entre as distância real e euclidiana:

$$D = 23,9 + 1,11DE \text{ (para } DE \geq 60Km \text{)}$$

$$D = 1,48DE \text{ (para } D \leq 60Km \text{)}$$

O mesmo foi feito para a malha ferroviária do Estado de São Paulo, resultando na seguinte relação ($R^2 = 0,990$) :

$$D = 9,8 + 1,25DE$$

Para a malha urbana da cidade de São Paulo, determinaram-se as seguintes relações entre a distância efetiva e distâncias euclidianas ou retangulares, medidas em quilômetros:

$$D = 0,81 + 1,366DE \text{ (amostra de 57 pares de pontos, } R^2 = 0,950 \text{)}$$

$$D = 1,13 + 1,048DR \text{ (amostra de 30 pares de pontos, } R^2 = 0,766 \text{)}$$

Segundo **NOVAES [1989]**, observa-se nas fórmulas de ajustes apresentadas anteriormente que os fatores de correção para as malhas urbanas são geralmente maiores que os estimados para as malhas rodoviárias. Isto ocorre devido não só a razões históricas e geomorfológicas de crescimento das cidades mas pelas restrições de tráfego como sentidos obrigatórios e cruzamentos. **NOVAES [1989]** menciona que, independente do tipo de malha rodoviária que se leva em conta, os fatores de correção para a Métrica Euclidiana apresentam valores maiores que os fatores para a Métrica Retangular,. De fato, se a distância retangular é sempre igual ou maior que a distância euclidiana, isto deve normalmente ocorrer, ou seja:

$$DE_{AB} \leq DR_{AB}$$

$$D = b_E \cdot DE_{AB}$$

$$D = b_R \cdot DR_{AB}$$

$$b_R < b_E$$

Segundo **NOVAES [1989]**, adota-se, para estudos preliminares em malhas urbanas, b_E igual a 1,30. Este mesmo valor é citado por **LOVE et al [1988]**, como o sendo utilizado na província de Ontário, no Canadá. Entretanto para a rede rodoviária nos EUA, as distâncias entre as principais cidades são 18% maiores que as distâncias euclidianas.

Alguns autores apresentam outros tipos de métricas para a mensuração de distância entre pontos. Embora essas métricas não sejam tão utilizadas quanto às métricas retangulares e euclidianas, elas podem medir com maior eficácia as distâncias entre pontos, conforme as características de algumas malhas de transporte.

LOVE et al [1988] comentam ser inapropriado assumir somente as métricas euclidiana e retangular como soluções de ajustes das distâncias entre pontos. Os autores concluem que as métricas euclidiana e retangular são apenas dois casos

especiais, onde ρ é igual a 2 e ρ é igual a 1, respectivamente, para a seguinte função:

$$D_{\rho(AB)} = \left[|X_A - X_B|^\rho + |Y_A - Y_B|^\rho \right]^{1/\rho}, \quad 1 \leq \rho \leq \infty.$$

Modelar as distâncias reais usando $D_{\rho(AB)}$ como função resultaria em medidas mais acuradas do que se restringir o uso para a métrica retangular ($\rho=1$) ou métrica euclidiana ($\rho=2$). LOVE et al [1988] apresentam, portanto, cinco fórmulas que foram utilizadas para mensuração de distâncias em áreas urbanas e rurais americanas na década de 70. São elas:

- A primeira fórmula é uma métrica retangular com os eixos inclinados de um ângulo θ , com um fator de correção constante K e dois pontos q com coordenadas (q1,q2) e r com coordenadas (r1,r2):

$$d_1(q, r; k, \theta) = k \sum_{i=1}^2 |q_i(\theta) - r_i(\theta)|, \quad k > 0$$

$$\text{onde } q_1(\theta) = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta, \quad r_1(\theta) = r_1 \cos \theta + r_2 \sin \theta,$$

$$q_2(\theta) = -q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta \quad \text{e} \quad r_2(\theta) = -r_1 \sin \theta + r_2 \cos \theta$$

- A segunda fórmula é a métrica euclidiana ($\rho=2$) com um fator de correção constante K, para dois pontos q e r com coordenadas (q1,q2) e (r1,r2), respectivamente:

$$d_2(q, r; k) = k \left[\sum_{i=1}^2 (q_i - r_i)^2 \right]^{1/2}, \quad k > 0$$

- A terceira fórmula é uma generalização da segunda fórmula. Para outros valores de ρ , e usando inclinações de eixos, pode-se obter distâncias mais precisas. Ela utiliza um fator de correção constante K,

para dois pontos q e r com coordenadas (q_1, q_2) e (r_1, r_2) , respectivamente:

$$d_3(q, r; k, \rho) = k \left[\sum_{i=1}^2 |q_i - r_i|^\rho \right]^{1/\rho}, \quad k > 0, \rho \geq 1$$

LOVE et al [1988] utilizaram essa fórmula com k e ρ iguais a 1, para o cálculo de distâncias de armazéns com baías retangulares e observaram que para plantas de armazéns com retornos obrigatórios para cruzamentos, o valor de K se alterava, diferentemente do valor de ρ . Ou seja, quanto maior era o número de bloqueios, K aumentava expressivamente e ρ tendia a permanecer com valores próximos a 1. Os autores acrescentam que o mesmo raciocínio se aplica a malhas urbanas com ruas de mão única e retornos obrigatórios para cruzamentos.

- A quarta fórmula é um desdobramento da terceira fórmula e também pode obter valores de distâncias mais precisos com a inclinação dos eixos. Ela utiliza um fator de correção constante K , para dois pontos q e r com coordenadas (q_1, q_2) e (r_1, r_2) , respectivamente. Os parâmetros ρ e s podem ter valores diferentes.

$$d_4(q, r; k, \rho, s) = k \left[\sum_{i=1}^2 |q_i - r_i|^\rho \right]^{1/s}, \quad k > 0, \rho \geq 1, \rho/s \geq 1$$

- A quinta fórmula utiliza, para dois pontos q e r com coordenadas (q_1, q_2) e (r_1, r_2) respectivamente, os fatores m_1, m_2 e m_3 como correção ao invés do K utilizado em outras fórmulas:

$$d_5(q, r; m_1, m_2, m_3) = \left[m_1(q_1 - r_1)^2 + m_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + m_3(q_2 - r_2)^2 \right]^{1/2}, \quad m_1 > 0$$

$$\text{e } m_2^2 < 4m_1m_3$$

LOVE et al [1988] aplicaram estas cinco fórmulas em 7 regiões dos Estados Unidos. As distâncias foram obtidas ou através das secretarias de transportes das regiões ou diretamente de mapas de estradas publicados. Os autores escolheram regiões que representassem a rede de estradas americanas com seus diversos graus de obstruções físicas. Para selecionarem as melhores fórmulas foram utilizados dois critérios de ajuste:

- O primeiro critério de decisão era a minimização da soma dos desvios absolutos, isto é:

$$AD_f = \sum_{j=1}^{v-1} \sum_{t=j+1}^v |d_f(a_j, a_t) - A_{jt}|, \text{ onde}$$

AD_f - soma dos desvios absolutos entre a distância ajustada por uma fórmula e a distância real;

$d_f(a_j, a_t)$ - A distância ajustada por uma fórmula;

A_{jt} - A distância real;

- O segundo critério de decisão minimiza a soma dos quadrados dos desvios absolutos, divididos pelas distâncias reais.

$$SD_f = \sum_{j=1}^{v-1} \sum_{t=j+1}^v \frac{[d_f(a_j, a_t) - A_{jt}]^2}{A_{jt}}$$

Este critério normaliza os desvios quadrados e tem maior sensibilidade para grandes desvios.

Os resultados da pesquisa de LOVE et al [1988] indicaram a quarta fórmula como a de melhor ajuste para as regiões escolhidas. Contudo, nem sempre a definição de seus parâmetros satisfizeram as condições necessárias de convexidade, prejudicando o seu uso em modelos de locação com funções objetivas. A terceira e a quinta fórmula cumpriram as condições de convexidade para todos os casos e tiveram bons ajustes. A terceira fórmula apresentou melhores resultados para eixos com alguma inclinação aos eixos originais.

Finalmente, BALLOU [2001] apresenta duas fórmulas interessantes para ajustamento de distâncias a distâncias reais.

A primeira fórmula tem características híbridas das métricas retangulares e euclidianas e foi desenvolvida por BRIMLEY & LOVE [1992]:

$$D_{ab} = b_0 + b_1[|X_a - X_b| + |Y_a - Y_b|] + b_2[(X_a - X_b)^2 + (Y_a - Y_b)^2]^{1/2}$$

Os coeficientes b_0 , b_1 e b_2 são encontrados pelo ajustamento da equação à distância real.

A segunda fórmula evita as distorções causadas na projeção de um globo num plano, utilizando as coordenadas de latitude-longitude e a fórmula de distância de grande círculo (trigonometria esférica). A fórmula do grande círculo (trigonometria esférica) é:

$$D_{ab} = 3959 \left\{ \arccos \left[\sin(LAT_a) \times \sin(LAT_b) + \cos(LAT_a) \times \cos(LAT_b) \times \cos |LONG_b - LONG_a| \right] \right\}$$

onde:

D_{ab} → Expressa a distância entre os pontos a e b em milhas;

LAT_a, LAT_b → Latitudes dos pontos a e b em radianos;

$LONG_a, LONG_b$ → Longitudes dos pontos a e b em radianos;

BALLOU [2001] apresenta algumas vantagens para o uso desta fórmula:

- É possível utilizar as coordenadas de latitude e longitude em qualquer parte do mundo;

- Há várias fontes disponíveis apresentando as latitudes e longitudes de diversos pontos do planeta;
- Os resultados são precisos;
- O sistema de coordenadas é bastante conhecido.

O autor menciona que o método do grande círculo é, geralmente, o método escolhido em programas de computador para o planejamento logístico e utiliza-se, na sua aplicação, os fatores de correção 1,17 e 1,20 para rodovias e ferrovias respectivamente.

2.2. Ponto central

2.2.1. Métrica Euclidiana

Os problemas de localização de pontos de uma cadeia logística têm como exemplo mais básico a definição de somente um ponto que atenda a vários outros pontos conhecidos desta cadeia. A determinação deste ponto partiu de soluções para obtenção do ponto central euclidiano. Os primeiros resultados para se conseguir o ponto central datam do começo do século XVII com Torricelli e Fermat e passam por vários matemáticos como Heinen, Simpson, Sylvester e Pierce. São soluções puramente geométricas sem relação com produção ou custos. Somente com **WEBER [1909]** teve-se o primeiro caso de incorporação da teoria de locação industrial na determinação do ponto central. Este ponto visava otimizar medidas de utilidade como tempo ou custo. Sua posição estaria minimizando a soma das distâncias ponderadas dos pontos dados e as suas coordenadas x,y estariam determinadas satisfazendo à seguinte função objetivo:

$$\text{Min } f(x, y) = \sum_{i=1}^N P_i \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

O ponto mínimo (x,y) é a solução da função objetivo. Este ponto é obtido igualando a zero as derivadas de $f(x,y)$ em relação à x e y . Tem-se, então:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^N P_i (x - x_i) \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{-1/2} = 0$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^N P_i (y - y_i) \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{-1/2} = 0$$

Das equações acima, tem-se:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^N P_i x_i / \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^N P_i / \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}}$$

e

$$y = \frac{\sum_{i=1}^N P_i y_i / \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^N P_i / \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}}$$

que são as coordenadas do ponto central.

Observando as fórmulas das coordenadas x, y do ponto central, fica claro que a sua determinação requer algum método iterativo de convergência, pois, para determinarmos x e y , precisa-se conhecer as distâncias dos outros pontos ao ponto (x, y) , o que envolve as variáveis x e y que se deseja determinar.

As soluções encontradas até a metade do século passado não tiravam proveito do cálculo numérico e de sua matemática iterativa, utilizada somente a partir do advento da informática. Entretanto E. Weisfeld, no ensaio “*Sur le point le quel la somme des distances de n points donnés est minimum*” publicado em 1937 pela revista japonesa *Tôhoku Mathematics Journal*, apresentou um método iterativo como solução que, curiosamente, ficou totalmente desconhecido até o final dos anos 60. Devido a este fato, o método de Weisfeld é conhecido como de autoria de H.W. Kuhn e E. Kuenne pelo ensaio “*An efficient algorithm for the*

numerical solution of the generalized Weber problem in spatial problem”, publicado em 1962 pelo Journal of Regional Science.

Segundo **BALLOU[2001]**, **LEAL[2003]** e **NOVAES [1989]**, o método de Weisfeld consiste de:

1. Considere inicialmente $\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}$ igual para qualquer valor de i , ou seja a distância de qualquer ponto dado ao ponto central é a mesma;
2. Calcule os primeiros valores para x e y , com as seguintes fórmulas:

$$x^0 = \frac{\sum_{i=1}^N P_i x_i}{\sum_{i=1}^N P_i} \quad \text{e} \quad y^0 = \frac{\sum_{i=1}^N P_i y_i}{\sum_{i=1}^N P_i}$$

3. Calcule os valores de $\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}$, usando os valores determinados anteriormente para x^0 e y^0 ;
4. Use os valores determinados para $\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}$, para calcular x^1 e y^1 através das fórmulas:

$$x^1 = \frac{\sum_{i=1}^N P_i x_i / \left[(x^0 - x_i)^2 + (y^0 - y_i)^2 \right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^N P_i / \left[(x^0 - x_i)^2 + (y^0 - y_i)^2 \right]^{1/2}}$$

e

$$y^1 = \frac{\sum_{i=1}^N P_i y_i / \left[(x^0 - x_i)^2 + (y^0 - y_i)^2 \right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^N P_i / \left[(x^0 - x_i)^2 + (y^0 - y_i)^2 \right]^{1/2}}$$

5. Repita as etapas 3 e 4 até que as iterações sucessivas obedçam a um critério de convergência.

Usam-se dois critérios de convergência. Um seria considerar a diferença relativa entre dois pontos sucessivos da iteração menor que a precisão almejada.

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| / x^{(k)} \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| y^{(k+1)} - y^{(k)} \right| / y^{(k)} \leq \varepsilon$$

O segundo critério trataria de terminar a iteração da determinação do ponto central, expondo as derivadas parciais $\partial f(x, y) / \partial x$ e $\partial f(x, y) / \partial y$ que tendem a zero, a um valor bem próximo do nulo.

$$\partial f(x, y) / \partial x \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \partial f(x, y) / \partial y \leq \varepsilon$$

Há a possibilidade do ponto central coincidir com um dos pontos dados e, neste caso, haver a anulação da distância euclidiana, provocando instabilidade numérica no cálculo. Para esses casos, [NOVAES\[1989\]](#) propõe o acréscimo de uma constante à seguinte fórmula e exemplifica o valor do acréscimo em torno de 50 metros para distâncias na ordem de quilômetros, isto é, 5 centésimos da unidade medida da distância:

$$De_i = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2} + \Delta D$$

ΔD , a constante referida, é positiva e de valor desprezível.

O método de Weisfeld é utilizado no item **SISLOG/Métricas Espaciais/Métrica Euclidiana**. Neste exemplo, ε está representado pelo campo

“Precisão(%)” e seu valor deve ser fornecido em porcentagem. O campo “Dt” significa a constante ΔD .



Figura 2 – Entrada de dados do SISLOG/Métricas Espaciais/Métrica Euclidiana

FRANCIS et al [1992] abordam, de outra forma, a questão do ponto ótimo coincidir com um dos pontos dados. Consideram o seguinte vetor:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \gamma_i(P_k)(P_k - P_i), \text{ onde}$$

$$\gamma_i(X) = \frac{P_i}{\left[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \right]^{1/2}}, \text{ } P_k \text{ é uma possível melhor locação de}$$

coordenadas (x,y) , P_i é um dos pontos i fornecidos juntamente com P_k e p_i é o peso relativo no ponto i . Definem ρ_k como a distância entre a origem e o vetor apresentado e concluem que P_k será a melhor locação se satisfizer a seguinte relação:

$$\rho_k \leq p_k$$

Portanto, se for testada esta relação antes de se iterar pelo método de Weisfeld, poder-se-á concluir se algum dos pontos dados é uma melhor locação ou não, evitando-se o uso de ΔD , ou dispensando o método iterativo caso seja comprovada a coincidência com algum ponto dado.

Conforme um exemplo de FRANCIS et al [1992], tem-se os seguintes valores:

i	1	2	3	4
p_i	1/6	1/3	1/3	1/6
P_i	(4,2)	(8,5)	(11,8)	(13,2)

Tabela 1 – Pontos do exemplo de métrica euclidiana de FRANCIS et al [1992]

O valor de ρ_1 , o ρ_K termo para o ponto (4,2) é 0,4441465833. Este valor é maior que 1/6, não satisfazendo a relação $\rho_k \leq p_i$. O valor de ρ_2 é 0,109092477 que é menor que 1/3, o valor de p_2 . Para o ponto (8,5) a relação $\rho_k \leq p_i$ é satisfeita, portanto P_2 é uma melhor locação.

FRANCIS et al [1992] apresentam também um outro critério de convergência das iterações pelo método de Weisfeld. Os autores apresentam a seguinte relação:

$$f(X^*) \geq f(X_k) - \nabla f(X_k) X_k + \min\{\nabla f(X_k) P_i : i = 1, \dots, m\}, \text{ onde}$$

$$f(X^*) \text{ é o mínimo valor para } f(X) = \sum_{i=1}^N P_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2};$$

$$f(X_k) \text{ é um provável mínimo valor de } f(X) = \sum_{i=1}^N P_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2} \text{ na}$$

K-ésima iteração;

$$\nabla f(X_k) \text{ é o vetor linha } \sum_{i=1}^m \gamma_i(X_k)(X_k - X_i)$$

$P_i : i = 1, \dots, m$ são os pontos dados.

O lado direito da relação é o limite inferior da função $f(X)$. Os autores chamam de “gap” a diferença entre o valor de $f(X)$ e o menor valor que ele

poderia ter na k-ésima iteração. Quando “gap” for zero ou bem próximo de zero, significa que X é o ponto central ótimo e que se podem encerrar as iterações do Método de Weisfeld.

FRANCIS et al [1992] propõem o uso do “gap” dividido pelo menor valor que $f(X)$ poderia ter na k-ésima iteração como um erro relativo, er , a ser usado nas iterações computacionais de locação ótima. Assim, tem-se:

$$er = \frac{\min\{\nabla f(X_k)P_i^T : i = 1, \dots, m\} - \nabla f(X_k)X_k^T}{f(X_k) - \nabla f(X_k)X_k^T + \min\{\nabla f(X_k)P_i^T : i = 1, \dots, m\}}$$

A tabela a seguir apresenta os pontos e os seus respectivos pesos usados no item **SISLOG/Métricas Espaciais/Métrica Euclidiana**. Este exemplo também é usado por FRANCIS et al [1992].

Ponto	x	y	p
P1	0	0	1
P2	0	10	1
P3	5	0	1
P4	12	6	1

Tabela 2 – Pontos do exemplo do SISLOG/Métricas Espaciais/Métrica Euclidiana

Como se tem o conhecimento antecipado de que nenhum ponto fornecido é o ponto central, assumiu-se Dt ou ΔD igual a zero e para se obter um número considerável de aproximações, adotou-se uma precisão(%) de 0,05. A coluna “limite_inferior” expressa a relação:

$$Limite_Inferior = f(X_k) - \nabla f(X_k)X_k^T + \min\{\nabla f(X_k)P_i^T : i = 1, \dots, m\}$$

The screenshot shows a window titled 'Resultados' with a sub-header 'Aproximações'. It contains a table with 8 columns: 'Aprox', 'Xc', 'Yc', 'F(X)', 'Limite Inferior', 'Gap', and 'Er'. The table lists 15 iterations. Below the table, there are navigation buttons and two input fields: 'X Central' with the value 3.999 and 'Y Central' with the value 2.002. A 'Fechar' button is located at the bottom.

Aprox	Xc	Yc	F(X)	Limite Inferior	Gap	Er
3ª aproximação	3.949	2.627	24.665	24.059	0.606	0.025
4ª aproximação	3.935	2.358	24.620	24.317	0.302	0.012
5ª aproximação	3.944	2.209	24.605	24.431	0.173	0.007
6ª aproximação	3.958	2.124	24.600	24.497	0.103	0.004
7ª aproximação	3.971	2.074	24.598	24.536	0.062	0.003
8ª aproximação	3.981	2.045	24.597	24.559	0.038	0.002
9ª aproximação	3.987	2.028	24.597	24.574	0.023	0.001
10ª aproximação	3.992	2.017	24.597	24.582	0.014	0.001
11ª aproximação	3.995	2.011	24.597	24.588	0.009	0.000
12ª aproximação	3.997	2.007	24.597	24.591	0.006	0.000
13ª aproximação	3.998	2.004	24.597	24.593	0.003	0.000
14ª aproximação	3.999	2.003	24.597	24.595	0.002	0.000
15ª aproximação	3.999	2.002	24.597	24.595	0.001	0.000

X Central: 3.999 Y Central: 2.002

Fechar

Figura 3 –SISLOG/Métricas Espaciais/Métrica Euclidiana/Resultado

Deste modo pode-se constatar que o valor de $f(X)$ e seu limite inferior convergem para 24,597, ou a sua diferença, no programa chamada de “Gap”, tende a zero.

Algumas observações devem ser feitas quanto ao método de Weisfeld. Uma delas é relatada por **BALLOU [2001]** quando conclui que, para uma solução bem próxima da ótima, as fórmulas para x^0 e y^0 , apresentadas, anteriormente no segundo item do método de Weisfeld, são suficientes. As pesquisas realmente demonstram que o erro de se usar essas fórmulas é significativamente pequeno para os casos de:

- O peso de um ou alguns pontos não for expressivamente maior do que os pontos restantes;
- Haver um grande número de pontos dados;
- Considerar o peso, quando representado por custos ou receitas de transportes, linearmente proporcionais à distância.

BALLOU [2001] estima um erro médio de 1,6% do valor ótimo, para 50 pontos e taxas lineares de transporte. No exemplo apresentado anteriormente para somente 4 pontos, caso fosse considerada a 1ª aproximação $X^* = (4,250;4,000)$,

$F(X)$ teria o valor de 25,263. Este valor é 2,07% maior que o valor de $F(X)$ no ponto ótimo (4,2).

2.2.2. Métrica Retangular

A determinação do ponto central, que visa otimizar medidas de utilidade como tempo, distâncias ou custos em relação a diversos outros pontos, pode seguir a métrica retangular, quando aplicada à rede de corredores no interior de armazéns retangulares ou malhas urbanas com características retangulares em suas vias. Sua solução está na otimização da seguinte função:

$$\text{Min } f(x, y) = \sum_{i=1}^N P_i [|x - x_i| + |y - y_i|]$$

$|x - x_i| + |y - y_i|$ é a distância retangular entre um ponto de localização e um ponto i dado. A relação pode ser distributivamente representada por:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N P_i |x - x_i| + \sum_{i=1}^N P_i |y - y_i|$$

Considerando:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^N P_i |x - x_i| \quad \text{e} \quad f_2(y) = \sum_{i=1}^N P_i |y - y_i|$$

Tem-se:

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$$

O interessante na métrica retangular é que o momento de transporte total é a soma do momento de transporte no eixo x e o momento de transporte no eixo y . Se, portanto, $f(x, y)$ é igual a $f_1(x) + f_2(y)$ e os dois termos $f_1(x)$ e $f_2(y)$ se mostram independentes, pode-se concluir que a minimização de $f(x, y)$ se dá minimizando $f_1(x)$ e $f_2(y)$, separadamente. E mais, deduz-se que, como $f_1(x)$ e

$f_2(y)$ apresentam características iguais como função, o modo de minimizar uma função certamente se aplica a outra função.

NOVAES[1989] apresenta um método eficiente para a determinação dos mínimos de $f_1(x)$ e $f_2(y)$ conhecido como Método de Fibonacci. Como a função-soma dos módulos é uma poligonal convexa unimodal, pode-se afirmar que ela só tem um único ponto mínimo. Sua forma, para o eixo x, no exemplo a seguir é:

i	1	2	3
P_i	1	1	1
$X(x,y)$	(10,10)	(15,20)	(18,9)

Tabela 3 – Pontos para o exemplo do método de Fibonacci

$$f_1(x) = |x - 10| + |x - 15| + |x - 18|$$

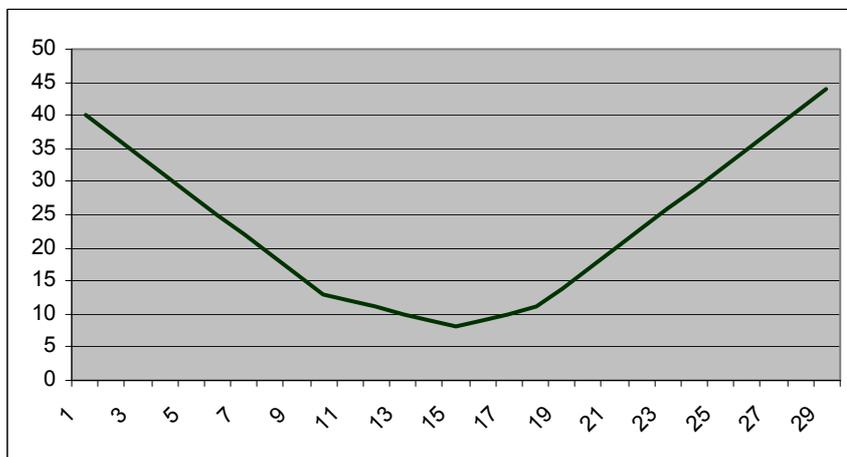


Figura 4 – Gráfico da função $f_1(x) = |x - 10| + |x - 15| + |x - 18|$

A aplicação do Método de Fibonacci segue o seguinte pseudocódigo:

Início

Leia K;

/ K é o número de iterações que determinará a precisão final deste */*
*/*processo*/*

Encontre o extremo inferior de x;

$X_i := \text{extremo inferior};$

Encontre o extremo superior de x;

$X_s := \text{extremo superior};$

$S1 := X_i;$

$S2 := X_s;$

$F := 2/(1 + \sqrt{5});$ / F é o inverso da razão da seção áurea */*

/ o segmento $s2-s1$ é dividido em 3 partes pelos pontos R1 e R2*/*

$i := 1;$ / contador das iterações*/*

Enquanto $i \leq K$ faça

*$R1 := (1-F) * (S2-S1) + S1;$*

*$R2 := F * (S2-S1) + S1;$*

$G1 := f_1(R1);$

$G2 := f_1(R2);$

Se $G1 \leq G2$ então

$S2 := R2$

Senão

$S1 := R1;$

Fim se;

$I := i + 1;$

Fim enquanto;

$X_c := (S1 + S2) / 2;$ / X_c é a abscissa do ponto central procurado*/*

Fim

Usa-se o mesmo pseudocódigo para se determinar Y_c , cuja função para o exemplo exposto é:

$$f_2(y) = |y - 10| + |y - 20| + |y - 9|$$

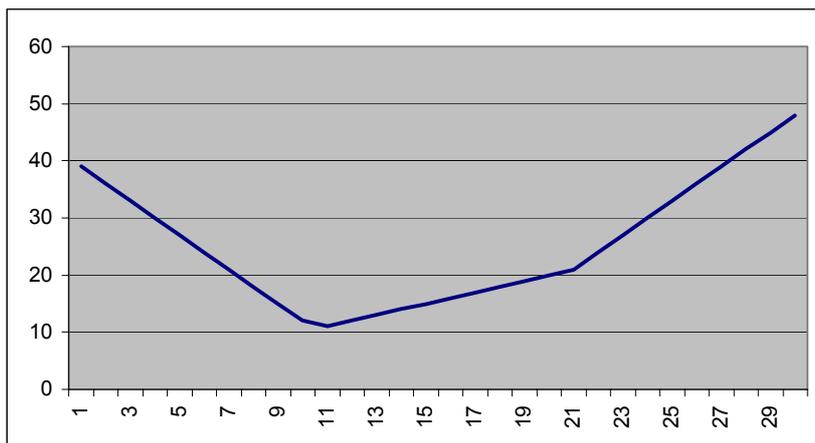


Figura 5 - Gráfico da função $f_2(y) = |y-10| + |y-20| + |y-9|$

O método de Fibonacci é utilizado no item **SISLOG/Métricas Espaciais/Métrica Retangular/Método Fibonacci**. K está representado pelo Campo “Número de Iterações”. Segundo **NOVAES [1989]**, o número de iterações determina a precisão final do método, em relação ao intervalo (S2-S1) inicial, descrito no pseudocódigo e esta precisão pode ser definida como:

$$\varepsilon = F^k = \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)^k, \text{ onde } \varepsilon \text{ é a precisão final.}$$

No exemplo anterior considerando o intervalo inicial $X_s - X_i$ igual a (18-10) e $Y_s - Y_i$ igual a (20-9), ambos medidos em quilômetros, tem-se, para um número de iterações igual a 20, as precisões em relação as coordenadas X e Y, ε_x e ε_y , respectivamente:

$$\varepsilon_x = \varepsilon \cdot (X_s - X_i) = \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)^{20} \cdot (18 - 10) \approx 53cm \quad \text{e}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon \cdot (Y_s - Y_i) = \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)^{20} \cdot (20 - 9) \approx 73cm$$

É possível que para um determinado problema deseja-se estimar o número de iterações suficientes para se atingir um certo valor de precisão ε . Neste caso tem-se para o número de iterações K :

$$K = \frac{\log(\varepsilon)}{\log(0,618034)}$$

Supondo o mesmo exemplo e desejando uma precisão de 50cm para ambas as coordenadas, ter-se-ia:

$$K_x = \frac{\log(\varepsilon_x) \cdot \log(18 - 10)}{\log(0,618034)} = \frac{\log(0,0005) \cdot \log(8)}{\log(0,618034)} \approx 32 \quad e$$

$$K_y = \frac{\log(\varepsilon_y) \cdot \log(20 - 9)}{\log(0,618034)} = \frac{\log(0,0005) \cdot \log(11)}{\log(0,618034)} \approx 38$$

Considerar-se-ia o maior valor entre K_x e K_y , ou seja, 38 iterações.

Como o método apresentado por **NOVAES [1989]** é uma simplificação do processo de Fibonacci, o autor recomenda usar K igual a 20. Este valor é, portanto, usado para resolver o exemplo apresentado na tabela a seguir pelo item

SISLOG/Métricas Espaciais/ Métrica Retangular/Método Fibonacci.

Cidade	Xi	Yi	Pi (população)
1	82	125	85000
2	173	61	120000
3	298	87	180000
4	255	131	250000
5	270	202	57000
6	278	230	88000
7	221	259	110000
8	182	203	330000
9	118	240	42000
10	120	320	63000

Tabela 4 – Entrada de dados para **SISLOG/Métricas Espaciais/Métrica Retangular/Método Fibonacci**



Figura 6 - Entrada de dados do **SISLOG/Métricas Espaciais/ Métrica Retangular/Método Fibonacci**

O resultado, após 20 iterações é:



Figura 7- Resultado do **SISLOG/Métricas Espaciais/ Métrica Retangular/Método Fibonacci**

O programa **SISLOG /Métricas Espaciais/Métrica Retangular/ Método Fibonacci** permite entrar ou com o número de iterações (K) ou com a precisão (ε) e fornece, além do ponto central, as precisões ao longo dos eixos das abscissas (ε_x) e ao longo dos eixos das ordenadas (ε_y).

Observa-se pelos gráficos de $f_1(x)$ e $f_2(y)$ das figs.4 e 5 , já apresentados do exemplo anterior, que o ponto mínimo de ambas as funções encontra-se em uma abscissa ou ordenada de um ponto i dado. Para determinar qual a abscissa ou ordenada que representa o mínimo de cada função, utiliza-se um processo chamado Método da Derivada.

Antes do Método da Derivada ser apresentado, cabem aqui algumas observações de **FRANCIS et al [1992]**. Voltando para os pontos fornecidos e representados graficamente, tem-se :

$$f_1(x) = |x - 10| + |x - 15| + |x - 18| , \text{ onde para}$$

$$0 \leq x \leq 10 \Rightarrow f_1(x) = (10 - x) + (15 - x) + (18 - x) = 43 - 3x;$$

$$10 < x \leq 15 \Rightarrow f_1(x) = (x-10) + (15-x) + (18-x) = 23-x;$$

$$15 < x \leq 18 \Rightarrow f_1(x) = (x-10) + (x-15) + (18-x) = x-7;$$

$$x > 18 \Rightarrow f_1(x) = (x-10) + (x-15) + (x-18) = 3x-43.$$

FRANCIS et al [1992], primeiramente, ordenam os valores das ordenadas ou das abscissas de forma crescente e observam que o coeficiente de x ou y em algum intervalo definido por pontos adjacentes é a soma dos pesos dos pontos à esquerda menos a soma dos pesos dos pontos à direita do intervalo. Para $f_1(x)$, os valores de x ordenados são 10,15 e 18. O coeficiente de x no intervalo (10,15) é igual a $(1-(1+1))$, ou seja, -1 e que o coeficiente de x neste intervalo expressa o valor da derivada neste intervalo. Os autores também relatam que o último coeficiente de x é igual à soma de todos os pesos e que este coeficiente é simétrico com relação ao primeiro. Outra afirmação verdadeira é que o coeficiente de x em algum intervalo, com exceção do primeiro, é igual à soma do coeficiente do intervalo anterior com o dobro do peso do ponto limite entre ambos os intervalos. Por exemplo, o coeficiente +1 de $x-7$ é igual a $(-1+(2*1))$ e o coeficiente +3 de $3x-43$, é o resultado da soma de +1 de $x-7$ pelo dobro de 1 de $|x-18|$. Esta última observação facilita a determinação dos coeficientes que compõem $f_1(x)$. O primeiro coeficiente é $-\sum p_i$, a partir do primeiro determina-se o segundo, o terceiro e assim por diante. Sabendo-se que o ponto mínimo de $f_1(x)$ se dá quando a derivada de $f_1(x)$ passa de não-positiva para não-negativa e que as derivadas de $f_1(x)$ estão representadas pelos coeficientes de x em cada intervalo, conclui-se que este ponto é um ponto determinado pelas abscissas fornecidas pelos pontos dados. Portanto, para se determinar o mínimo, se estabelece o seguinte pseudocódigo para $f_1(x)$, conforme LEAL[2003]:

Início

Ordene os pesos por ordem crescente das abscissas;

$$Min := -\sum_{i=1}^n p_i ;$$

i := 0;

Enquanto $Min < 0$ faça

$i := i + 1;$

$Min := Min + 2p_i;$

fim enquanto

$X_{min} := x_i$

Fim

O mesmo se faz para determinar Y_{min} .

FRANCIS et al [1992] utilizam um outro procedimento para determinar X_{min} e Y_{min} . Agora se somam os pesos, um a um, e o resultado da soma com cada parcela acrescida é comparado com a metade do somatório dos pesos. Se o resultado da soma for maior que a metade do somatório, X_{min} ou Y_{min} será o ponto da última parcela de peso acrescida. Por exemplo, no exemplo anterior, para se determinar X_{min} , a metade do somatório é $3/2$ ou $1,5$. a primeira parcela é 1 , que é menor que $1,5$. A segunda parcela é 2 , que ultrapassa $1,5$. Então, o ponto da segunda parcela define o valor de X_{min} , sendo igual a $1,5$. Na verdade este método conhecido como **método da mediana** é deduzido do **método da derivada**. Neste método também as abscissas ou ordenadas são colocadas em ordem crescente para o cálculo de X_{min} ou Y_{min} , respectivamente. Assim descreve-se o pseudocódigo para X_{min} .

Início

Ordene os pesos por ordem crescente das abscissas;

$Compara := \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{2};$ /* termo de comparação para o somatório dos

pesos*/

$soma := 0;$

$i := 0;$

enquanto (soma < compara) faça

$i := i + 1;$

$soma := soma + p_i;$

fim enquanto

$X_{min} := x_i$

Fim

Este pseudocódigo serve para determinar Y_{min} .

A resolução do ponto central pelo Método da Derivada está apresentada no item **SISLOG/Métricas Espaciais/Métrica Retangular/Método da Derivada**, para os pontos apresentados na tabela a seguir. Para este item foi utilizado o segundo pseudocódigo, tanto para X_{min} como para Y_{min} .

i	1	2	3
P_i	1	1	1
$X(x,y)$	(10,10)	(15,20)	(18,9)

Tabela 5 - Entrada de dados para **SISLOG/Métricas / Métrica Retangular/Método da Derivada**

O resultado para o ponto central é formado pela abscissa do ponto 2 e a ordenada do ponto 1.



Figura 8 – Resultado do **SISLOG/Métricas Espaciais/ Métrica Retangular/Método da Derivada**