

7

Índice de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas

Sejam M uma variedade riemanniana compacta, orientada e $L_{(x,y)}$ a forma dupla de enlaçamento nesta variedade como foi definida na seção anterior. Neste capítulo usaremos $L_{(x,y)}$ para definir índices de enlaçamento associadas a ações de $\mathbb{R}^k$ de difeomorfismos que preservam volume em M . Os objetos geométricos que enlaçaremos serão geradas pelas órbitas da ação. Consideraremos estes objetos sendo k -cadeias singulares em M , já que uma órbita de uma ação não está necessariamente imersa em M .

7.1

Índice de Enlaçamento Assintótico de uma Ação de $\mathbb{R}^k$ e uma sub-variedade

Seja M uma n -variedade riemanniana compacta, orientada, completa com $H_k(M) = \{0\}$. Sejam Φ uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M de difeomorfismos que preservam volume e S uma sub-variedade de M de dimensão s , fechada, sem bordo e de homologia nula, $k + s = n - 1$. Para cada ponto $q \in N$ existe uma única órbita que passa por q e como cada órbita de Φ é uma variedade imersa em M de dimensão menor ou igual a k , temos que o conjunto de pontos cujas órbitas interceptam S é de medida nula em M . Logo, cada p no complemento deste conjunto de medida nula tem sua órbita enlaçando-se em torno de S . Assim, é natural pensar em definir, se é possível, um índice que meça o enlaçamento das órbitas de Φ com a sub-variedade S . No que segue, cada k -uplo $(T^1, \dots, T^k) \in (\mathbb{R}_+)^k$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ será relacionado o k -retângulo canônico $\Gamma = [0, T^1] \times \dots \times [0, T^k]$. A órbita de Φ de período Γ que passa por $p \in M$, isto é $\{\Phi_{(t_1, \dots, t_k)}(p); (t_1, \dots, t_k) \in \Gamma\}$, será denotada por $\vartheta_{(p, \Gamma)}$ e considerada um k -retângulo singular em M .

Seja Σ_k um conjunto de k -cadeias singulares em M satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para cada $\vartheta_{(p, \Gamma)}$ existe uma única $\sigma_{(p, \Gamma)}$ em Σ_k tal que $\partial \vartheta_{(p, \Gamma)} = \partial \sigma_{(p, \Gamma)}$.

2. Existe subconjunto $\Theta \subset (\mathbb{R}^*)^n$ mensurável, cujo complemento tem medida nula, tal que para cada $(T^1, T^2, \dots, T^k) \in \Theta$ o conjunto

$$O_\Gamma := \{p \in M; \sigma_{(p, \Gamma)} \cap S \neq \emptyset\}$$

tem medida nula em M .

3. As $\sigma_{(p, \Gamma)}$ em Σ_k variam continuamente em medida no sentido de que para cada $(T^1, T^2, \dots, T^k) \in \Theta$ a função $h_\Gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h_\Gamma(p) = \frac{1}{T^1 \dots T^k} \int_{x \in \sigma_{(p, \Gamma)}} \int_{y \in S} L(x, y),$$

é uma função em $L_1(M)$, isto é, $\int_{p \in M} |h_\Gamma(p)| \text{vol} < \infty$.

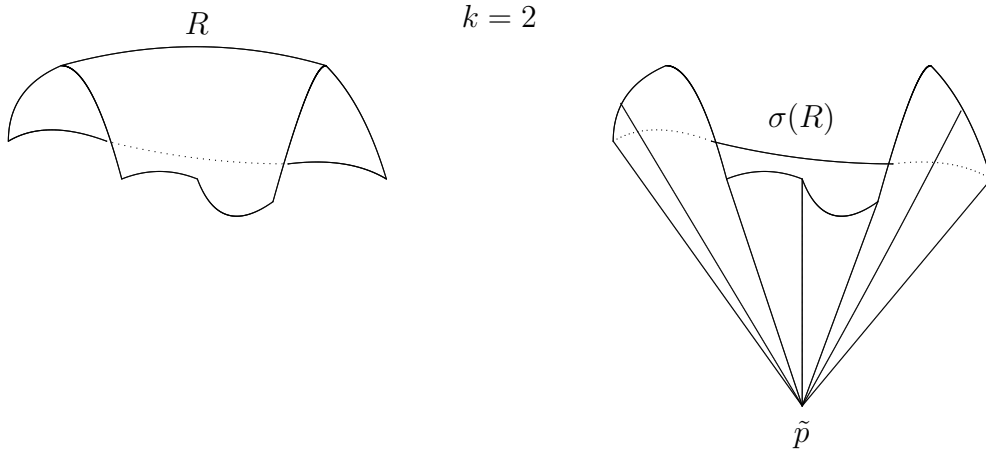
4. A família de funções $\{h_\Gamma\}$ converge em $L_1(M)$ para a função identicamente nula, isto é,

$$\lim_{T^1, \dots, T^k \rightarrow \infty} \int_{p \in M} |h_\Gamma(p)| \text{vol} = 0. \quad \square$$

Definição 7.1 *Todo conjunto Σ de k -cadeias singulares em M que satisfaz as condições 1, 2, 3 e 4 anteriores será chamado de sistema de k -volumes singulares pequenos de enlaçamento associados a Φ e S .*

Enlacamentos na bola unitária Ω^n

Seja Ω^n a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ e fixemos o ponto $\tilde{p} \in \Omega^n$. Para cada k -retângulo singular R em Ω^n definiremos a k -cadeia singular $\sigma(R) := (-1)^k \mathcal{C}(\partial R)$ sendo a pirâmide gerada por ∂R de vértice $\tilde{p}$, como foi definida na última seção.



Definamos $\Sigma(\tilde{p}) := \{\sigma(R) ; R \text{ é um } k\text{-retângulo singular em } \Omega^n\}$. Chamaremos este conjunto de k -cadeias estreladas com vértice em $\tilde{p}$.

Teorema 7.2 *Seja $\tilde{p}$ um ponto no complemento de S em Ω^n . Então $\Sigma(\tilde{p})$ é um sistema de k -volumes singulares pequenos de enlaçamento associados a Φ e S . $\Sigma(\tilde{p})$ independe de Φ .*

Prova: Sejam $p \in \Omega^n$ e Γ um k -retângulo canônico quaisquer.

1. Como $\vartheta_{(p,\Gamma)}$ é um k -retângulo singular em Ω^n , temos que $\sigma(\vartheta_{(p,\Gamma)}) \in \Sigma(\tilde{p})$. Por construção $\partial\mathcal{C}(\partial\vartheta_{(p,\Gamma)}) = (-1)^k \partial(\vartheta_{(p,\Gamma)})$. Logo, se $\sigma_{(p,\Gamma)} := \sigma(\vartheta_{(p,\Gamma)})$, então por definição de $\sigma(\vartheta_{(p,\Gamma)})$ temos que

$$\partial\sigma_{(p,\Gamma)} = (-1)^k \partial\mathcal{C}(\partial\vartheta_{(p,\Gamma)}) = \partial\vartheta_{(p,\Gamma)}.$$

Assim $\Sigma(\tilde{p})$ satisfaz a propriedade 1.

Para provar que $\Sigma(p)$ satisfaz as condições 2,3 e 4, sendo

$$\sigma_{(p,\Gamma)} = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+k} (\mathcal{C}(\partial_i^0 \vartheta_{(p,\Gamma)}) - \mathcal{C}(\partial_i^1 \vartheta_{(p,\Gamma)}))$$

mostraremos que estas condições são satisfeitas para cada família $\mathcal{C}(\partial_i^j \vartheta_{(p,\Gamma)})$. Neste caso, será suficiente mostrar para uma única família, já que o resto se mostra de maneira análoga. Em particular, seja $\sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} := \mathcal{C}(\partial_k^0 \vartheta_{(p,\Gamma)})$ a pirâmide gerada por $\partial_k^0 \vartheta_{(p,\Gamma)}$ de vértice $\tilde{p}$, isto é, a k -cadeia definida pela aplicação $F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} : \widehat{\Gamma}^k \times [0, 1] \rightarrow \Omega^n$,

$$F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}(t_1, \dots, t_{k-1}, u) = (1-u)\Phi_{(t_1, \dots, t_{k-1}, 0)}(p) + u\tilde{p}.$$

2. Fixemos $\vec{t} = (t_1, \dots, t_{k-1}) \in \widehat{\Gamma}^k$ e definamos a homotopia

$$H_{\vec{t}}^u := (1-u)H_{\vec{t}}^0 - uH_{\vec{t}}^1, \quad t \in [0, 1],$$

onde $H_{\vec{t}}^0 := \Phi_{(t_1, \dots, t_{k-1}, 0)}$ e $H_{\vec{t}}^1(p) = \tilde{p}$, $\forall p \in \Omega^n$. Seja $O_{\Gamma}^{(k,0)} := \{p \in \Omega^n ; \sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} \cap S \neq \emptyset\}$. Notemos que

$$O_{\Gamma}^{(k,0)} = \{(H_{\vec{t}}^u)^{-1}(S) ; (t_1, \dots, t_{k-1}, t) \in \widehat{\Gamma}^k \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^k\}.$$

Sendo $(H_{\vec{t}}^u)^*(vol) = (1-u)vol$, já que $\Phi_{(t_1, \dots, t_{k-1}, 0)}$ preserva volume, então $(H_{\vec{t}}^u)^{-1}(S)$ é uma s -subvariedade em Ω . Assim, $O_{\Gamma}^{(k,0)}$ tem no máximo dimensão $k + s = n - 1$. Logo, $O_{\Gamma}^{(k,0)}$ tem medida nula em Ω^n , mostrando assim a propriedade 2 e neste caso $\Theta = (\mathbb{R}_+)^k$.

3. Seja $(t_1, \dots, t_{k-1}, u) \in \widehat{\Gamma}^k \times [0, 1]$. Notemos que

$$\|F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}(t_1, \dots, t_{k-1}, u) - F_{(q,\Gamma)}^{(k,0)}(t_1, \dots, t_{k-1}, u)\| \leq \|\Phi_{(t_1, \dots, t_{k-1}, 0)}(p) - \Phi_{(t_1, \dots, t_{k-1}, 0)}(q)\|.$$

Logo, sendo Φ uma aplicação suave e considerando em $C^\infty(\widehat{\Gamma}^k \times [0, 1], \Omega^n)$ a topologia induzida pela norma do supremo temos que $p \mapsto F_{(p,\Gamma)}$ é uma aplicação contínua de Ω^n em $C^\infty(\widehat{\Gamma}^k \times [0, 1], \Omega^n)$. Disto e sendo $L_{(x,y)}$ suave no complemento da diagonal $\{(q, q); q \in \Omega^n\}$ em $\Omega^n \times \Omega^n$ temos

$$h_\Gamma^{(k,0)}(p) := \frac{1}{T^1 \dots T^k} \int_{x \in \sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}} \int_{y \in S} L_{(x,y)}$$

é continua no complemento de $O_\Gamma^{(k,0)}$ que tem medida nula. Assim, $h_\Gamma^{(k,0)}$ pode ser considerada uma função mensurável de domínio Ω^n .

Agora, mostraremos que $\int_{p \in \Omega^n} |h_\Gamma^{(k,0)}(p)| vol < \infty$. Seja $X = (X^1, X^2, \dots, X^k) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k$, como definido no capítulo 3, tal que $A(X) = \Phi$.

Notemos que $\frac{\partial F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_{k-1}, u) = (1-u)X^i(\Phi_{(t_1, \dots, t_{k-1}, 0)}(p))$, $i = 1, \dots, k-1$. Sendo X^i campo vetorial definido no domínio compacto Ω^n existe A tal que $\|X^i\| \leq A$, $\forall i$. Logo $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$, $\forall p \in \Omega^n$ e para todo Γ temos que $\|\frac{\partial F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}}{\partial t_i}\| \leq A$ e também $\|\frac{\partial F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}}{\partial u}\| \leq 2$. Como S é compacta, podemos supor que está definida por um atlas finito da forma $\{\theta_i : [0, 1]^r \rightarrow S_i \subset S, (r_1^i, \dots, r_s^i) \mapsto \theta_i(r_1^i, \dots, r_s^i)\}_{i \in \{1, 2, \dots, m\}}$ tal que existe $B > 0$ tal que $\|\frac{\partial \theta_i}{\partial r_j^i}\| \leq B$, $\forall i, j$. Seja $\{f_i : S \rightarrow [0, 1]\}_{i \in \{1, 2, \dots, m\}}$ uma partição de unidade com respeito a este atlas, note que $\|f_i\| \leq 1$, $\forall i$. Definamos

$$h_{(\Gamma,i)}^{(k,0)}(p) = \frac{1}{T^1 \dots T^k} \int_{x \in \sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}} \int_{y \in S_i} f_i(y) L_{(x,y)}.$$

Então $h_\Gamma^{(k,0)} = \sum_{i=1}^m h_{(\Gamma,i)}^{(k,0)}$. Logo, por (6-11), (6-6) e como $\sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}$ está definida por $F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}$, podemos escrever

$$h_{(\Gamma,i)}^{(k,0)}(p) = \frac{1}{T^1 \dots T^k} \int_{\widehat{\Gamma}^i} \int_0^1 \int_{(0,1)^r} \frac{f_i \left[F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} - \theta_i, \frac{\partial F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}}{\partial u}, \dots, \frac{\partial \theta_i}{\partial r_s^i} \right]}{\|F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} - \theta_i\|^n} dv_{k-1} du dv_r,$$

onde dv_{k-1} e dv_s são as formas de volume em $\mathbb{R}^{k-1}$ e $\mathbb{R}^s$, respectivamente, $F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}$ definida em $\widehat{\Gamma}^i \times [0, 1]$ e f_i, θ_i definidas em $(0, 1)^r$. Como o valor absoluto de um determinante é menor ou igual ao produto das normas de seus vetores linhas

e $\|f\| \leq 1$, temos que

$$\int_{p \in \Omega^n} |h_{(\Gamma, i)}^{(k, 0)}(p)| \text{ vol} \leq \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_{p \in \Omega^n} \left(\int_{\widehat{\Gamma}^i} \int_0^1 \int_{(0, 1)^r} \frac{2A^{k-1}B^r}{\|F_{(p, \Gamma)}^{(k, 0)} - \theta_i\|^{n-1}} dv_{k-1} dudv_r \right) \text{ vol}.$$

Agora, para $\vec{t} = (t_1, \dots, t_{k-1})$ fixo a homotopia $H_{\vec{t}}^t = F_{(p, \Gamma)}^{(k, 0)}(t_1, \dots, t_{k-1}, u)$ geometricamente deforma Ω^n no ponto $\tilde{p}$. Como $\tilde{p}$ não pertence a S , existem $\delta_i \in (0, 1]$ e uma constante $D_i > 0$ tal que $\forall p \in \Omega^n, \forall q \in S$ temos que

$$\|F_{(p, \Gamma)}^{(k, 0)}(t_1, \dots, t_{k-1}, u) - q\| \geq D_i, \quad \forall (t_1, \dots, t_{k-1}) \in \widehat{\Gamma}^k, \forall u \in [\delta, 1].$$

Daqui, segue que

$$\begin{aligned} I_1 &:= \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_{p \in \Omega^n} \left(\int_{\widehat{\Gamma}^k} \int_{\delta_i}^1 \int_{[0, 1]^r} \frac{2A^{k-1}B^r}{\|F_{(p, \Gamma)}^{(k, 0)} - \theta_i\|^{n-1}} dv_{k-1} dudv_r \right) \text{ vol} \\ &\leq \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_{p \in \Omega^n} \left(\int_{\widehat{\Gamma}^k} \int_{\delta_i}^1 \int_{[0, 1]^r} \frac{2A^{k-1}B^r}{D_i^{n-1}} dv_{k-1} dudv_r \right) \text{ vol} \\ &= \frac{2A^{k-1}B^r \text{ vol}(\Omega^n)}{D_i^{n-1} T_k} \end{aligned}$$

Agora, notemos que para cada $q \in \Omega^n$ a função $p \mapsto \frac{1}{\|p - q\|^{n-1}}$ é integrável.

Portanto, a função definida em Ω^n por $q \mapsto \int_{p \in \Omega^n} \frac{1}{\|p - q\|^{n-1}} \text{ vol}$ é continua.

Logo, existe constante $E > 0$ tal que

$$\int_{p \in \Omega^n} \frac{1}{\|p - q\|^{n-1}} \text{ vol} \leq E \quad \forall q \in \Omega^n. \quad (7-1)$$

Daqui, aplicando Fubini, sendo $(H_{\vec{t}}^u)^*(\text{vol}) = (1 - u)\text{vol}$ e notando que $\frac{1}{1 - u} \leq \frac{1}{1 - \delta}$ se $0 < u \leq \delta < 1$ temos que

$$\begin{aligned} I_2 &:= \frac{1}{T^1 \dots T^k} \int_{p \in \Omega^n} \left(\int_{\widehat{\Gamma}^k} \int_0^{\delta_i} \int_{(0, 1)^r} \frac{2A^{k-1}B^r}{\|F_{(p, \Gamma)}^{(k, 0)} - \theta_i\|^{n-1}} dv_{k-1} dudv_r \right) \text{ vol} \\ &= \frac{1}{T^1 \dots T^k} \int_{\widehat{\Gamma}^k} \int_{(0, 1)^r} \int_0^{\delta_i} \left(\int_{p \in \Omega^n} \frac{2A^{k-1}B^r}{\|H_{\vec{t}}^t(p) - \theta_i\|^{n-1}} \text{ vol} \right) dudv_{k-1} dv_r \\ &= \frac{1}{T^1 \dots T^k} \int_{\widehat{\Gamma}^k} \int_{(0, 1)^r} \int_0^{\delta_i} \frac{1}{(1 - u)^n} \left(\int_{p \in \Omega^n} \frac{2A^{k-1}B^r}{\|H_{\vec{t}}^t(p) - \theta_i\|^{n-1}} (H_{\vec{t}}^u)^*(\text{vol}) \right) dudv_{k-1} dv_r \\ &= \frac{1}{T^1 \dots T^k} \int_{\widehat{\Gamma}^k} \int_{(0, 1)^r} \int_0^{\delta_i} \frac{1}{(1 - u)^n} \left(\int_{p \in (H_{\vec{t}}^u)_* \Omega^n} \frac{2A^{k-1}B^r}{\|p - \theta_i\|^{n-1}} \text{ vol} \right) dudv_{k-1} dv_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{T^1..T^k} \int_{\widehat{\Gamma}^k} \int_{(0,1)^r} \int_0^{\delta_i} \frac{2A^{k-1}B^r E}{(1-\delta_i)^n} dudv_{k-1}dv_r \\ &= \frac{2A^{k-1}B^r E}{(1-\delta_i)^n T^k} \end{aligned}$$

Como

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{T^1..T^k} \int_{p \in \Omega^n} \left(\int_{T^{(k-1,k)}} \int_0^1 \int_{[0,1]^s} \frac{2A^{k-1}B^r}{\|F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} - \theta\|^{n-1}} dv_{k-1} dudv_s \right) vol,$$

temos que

$$\int_{p \in \Omega^n} |h_{(\Gamma,i)}^{(k,0)}(p)| vol \leq I_1 + I_2 \leq \frac{2A^{k-1}B^r}{T^k} \left\{ \frac{vol(\Omega^n)}{D_i^{n-1}} + \frac{E}{(1-\delta_i)^n} \right\} < \infty, \forall i$$

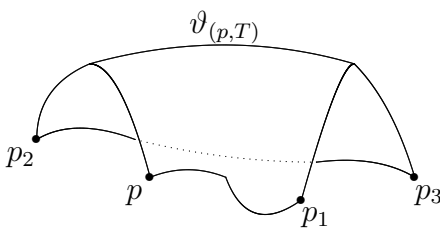
Como $\int_{p \in \Omega^n} |h_{\Gamma}^{(k,0)}(p)| vol \leq \sum_{i=1}^m \int_{p \in \Omega^n} |h_{(\Gamma,i)}^{(k,0)}(p)| vol$, temos que $\Sigma(\tilde{p})$ satisfaz a condição 3.

4. A condição 4 é satisfeita da relação

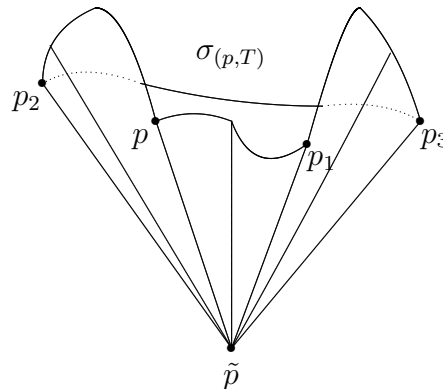
$$\int_{p \in \Omega^n} |h_{\Gamma}^{k_0}(p)| vol \leq \sum_{i=1}^m \int_{p \in \Omega^n} |h_{\Gamma}^{(k_0,i)}(p)| vol \leq \frac{2A^{k-1}B^r}{T^k} \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{vol(\Omega^n)}{D_i^{n-1}} + \frac{E}{(1-\delta_i)^n} \right\}$$

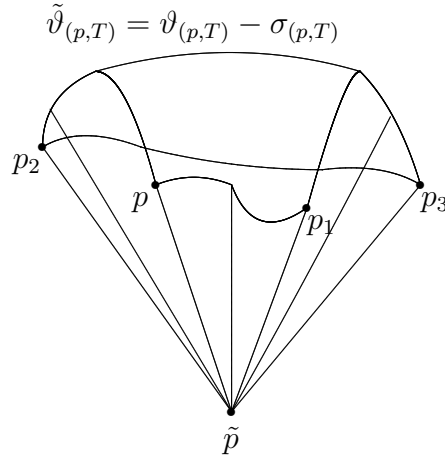
e do fato que $T^k \rightarrow \infty$. $\square$

Pela propriedade 1 de $\Sigma(\tilde{p})$, a cada $\vartheta_{(p,T^{(k)})}$ podemos associar a k-cadeia singular sem bordo $\tilde{\vartheta}_{(p,\Gamma)} := \vartheta_{(p,\Gamma)} - \sigma_{(p,\Gamma)}$. Como $H_k(\Omega) = \{0\}$, temos que $\tilde{\vartheta}_{(p,\Gamma)}$ é de homologia nula.



$k = 2$





Seja $\mathcal{O} \subset \Omega^n$ o conjunto de pontos cujas órbitas interceptam S . No início desta seção vimos que $\mathcal{O}$ tem medida nula. Fixemos Γ . Seja Ω_Γ o complemento de $\mathcal{O} \cup O_\Gamma$. Para cada $p \in \Omega_\Gamma$ temos que $\tilde{\vartheta}_{(p,\Gamma)} \cap N = \emptyset$. Logo, podemos definir em Ω_Γ a função contínua

$$lk_\Gamma(p) = \frac{1}{T^1 \dots T^k} lk(\tilde{\vartheta}_{(p,T)}, S).$$

Sendo o complemento de Ω_Γ de medida nula podemos considerar lk_Γ como uma função mensurável definida em Ω^n .

Proposição 7.3 *O limite*

$$\tilde{lk}(p) = \lim_{T^1, \dots, T^k \rightarrow \infty} lk_\Gamma(p) = \lim_{T^1, \dots, T^k \rightarrow \infty} \frac{1}{T^1 \dots T^k} lk(\tilde{\vartheta}(p, \Gamma), S)$$

existe no sentido L^1 e define uma função integrável que não depende da escolha do sistema Σ de k -volumes singulares pequenos de enlaçamento associados a Φ e S .

Prova: Sejam $X^1, \dots, X^k$ os campos vetoriais em Ω^n de divergência nula associados a Φ e N o s -campo unitário em S que define a sua orientação. Definamos $X := X^1 \wedge \dots \wedge X^k$ k -campo em Ω^n . Para cada p no complemento de S em Ω^n definamos a s -forma suave $\alpha^{(p)}$ em S

$$(\alpha^{(p)})_q := \frac{(-1)^k (q - p) \times X(p) \cdot Y(q)}{a_n \|q - p\|^n} vol_q$$

Logo, a função f definida por $f(p) := \int_S \alpha^{(p)}$ é uma função contínua no complemento de S em Ω^n . Como S tem medida nula em Ω^n a função f pode ser considerada uma função mensurável em Ω^n . Aplicando Fubini, podemos mostrar que f é uma função em $L^1(\Omega^n)$. Por outro lado, na k -cadéia $\vartheta(p, \Gamma)$ temos que o i -ésimo vetor tangente coordenado $\frac{\partial}{\partial t_i}$ é igual a $X^i(\Phi_{(t_1, t_2, \dots, t_k)}(p))$,

logo

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial t_k} = X(\varphi_{(t_1, \dots, t_k)}(p)).$$

Lembremos que podemos definir o k -campo unitário singular $\tilde{N}$ de $\vartheta_{(p, \Gamma)}$ pela igualdade

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial t_k} = \sqrt{\bar{g}} \tilde{N},$$

onde $\bar{g} = \left\| \frac{\partial}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial t_k} \right\|$ e $\|\tilde{N}\| = 1$ se os $\frac{\partial}{\partial t_i}$ são linearmente independentes e é 0 caso contrário. Logo, pela formula (6-5) e sendo $dt_1 \dots dt_k = \sqrt{\bar{g}} vol$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{x \in \vartheta(p, \Gamma)} \int_{q \in S} L(x, y) &= \frac{(-1)^k}{a_n} \int_{x \in \vartheta(p, \Gamma)} \int_{y \in S} \frac{(q - x) \times \tilde{N}(x) \cdot N(q)}{\|q - x\|^n} vol_x vol_q \\ &= \frac{(-1)^k}{a_n} \int_{x \in \vartheta(p, \Gamma)} \left(\int_{y \in S} \frac{(q - x) \times X(x) \cdot N(q)}{\|q - x\|^n} vol_q \right) dt_1 \dots dt_k \\ &= \int_{x \in \vartheta(p, \Gamma)} \int_{y \in S} \alpha^x(y) dt_1 \dots dt_k \\ &= \int_0^{T_k} \dots \int_0^{T_1} \int_{y \in S} \alpha^{(\Phi_{(t_1, \dots, t_k)}(p))} dt_1 \dots dt_k \\ &= \int_0^{T_k} \dots \int_0^{T_1} f(\varphi_{(t_1, \dots, t_k)}(p)) dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} lk_{\Gamma}(p) &= \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_{x \in \tilde{\vartheta}(p, \Gamma)} \int_{y \in N} L(x, y) \\ &= \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_{x \in \vartheta(p, \Gamma) - \sigma(p, \Gamma)} \int_{y \in S} L(x, y) \\ &= \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_{x \in \vartheta(p, \Gamma)} \int_{y \in S} L(x, y) - \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_{x \in \sigma(p, \Gamma)} \int_{y \in S} L(x, y) \\ &= \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_k} f(\varphi_{(t_1, \dots, t_k)}(p)) - \frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_{x \in \sigma(p, \Gamma)} \int_{y \in S} L(x, y). \end{aligned}$$

Assim pelo teorema ergódico para ações, teorema 3.13, e condição 4 do sistema de k -volumes singulares pequenos de enlaçamento temos que lk_{Γ} converge no sentido L^1 para uma função $\tilde{lk}$ que satisfaz

$$\int_{p \in \Omega^n} \tilde{lk} vol = \int_{p \in \Omega^n} f(p) vol. \quad \square$$

Definição 7.4 O índice $lk(\Phi, S) := \int_{\Omega^n} \tilde{lk} vol$ será chamado o índice de enlaçamento assintótico da k -ação Φ e a subvariedade S .

Lembremos que no capítulo 3 definimos o invariante de Hopf $I(\Phi, S) = \int_S \alpha$, onde $d\alpha = I_X vol$ e X é o k -campo associado a Φ .

Teorema 7.5 *Seja Φ uma k -ação de difeomorfismos que preservam volume em Ω^n , e S uma s -variedade compacta, sem bordo e mergulhada em Ω^n , $k + s = n - 1$. Então o índice de enlaçamento assintótico $lk(\Phi, S)$ satisfaz*

$$lk(\Phi, S) = I(\Phi, S)$$

Prova: Sejam $X^1, \dots, X^k$ os campos vetoriais de divergência nula associadas a φ , $X = X^1 \wedge \dots \wedge X^k$ o k -campo associado a Φ e $\eta = i_X vol$. O teorema generalizado de Biot-Savart garante que $rot(BS(X)) = X$. Pelo teorema generalizado de Biot-Savart temos que

$$X^1 \wedge \dots \wedge X^k = rot(BS(X^1 \wedge \dots \wedge X^k)).$$

Logo, pela definição de rotacional temos

$$d(j(BS(X))) = i_{rot(BS(X))} vol = i_X vol = \eta.$$

Logo $\alpha := j(BS(X))$ é uma forma diferenciável que satisfaz $d\alpha = \eta$. Por teorema 4.13 e resultado do teorema anterior temos que

$$lk(\Phi, S) = \int_{p \in \Omega^n} \tilde{lk}(p) vol = \int_{p \in \Omega^n} f(p) vol = \int_{p \in \Omega^n} \left(\int_S \alpha^{(p)} \right) vol.$$

Então, por definição da forma α^p e aplicando Fubini temos que por definição do campo $BS(X^1 \wedge \dots \wedge X^k) = BS(X)$, por definição do operador j e notando que em N temos que $\alpha = \alpha(Y) vol$, temos

$$\begin{aligned} lk(\Phi, S) &= \frac{(-1)^k}{a_n} \int_{p \in \Omega^n} \int_{q \in S} \frac{(q - p) \times X(p) \cdot Y(q)}{\|q - p\|^n} vol_q vol_p \\ &= \int_{q \in S} \frac{(-1)^k}{a_n} \int_{p \in \Omega^n} \left(\frac{(p - q)}{\|p - q\|^n} \times X(p) vol_p \right) \cdot Y(q) vol_q. \end{aligned}$$

Agora, por definição do campo $BS(X)$ e definição do homomorfismo j temos que

$$\begin{aligned} lk(\Phi, S) &= \int_{q \in N} BS(X)(q) \cdot Y(q) vol_q \\ &= \int_{q \in N} j(BS(X))_q(Y(q)) vol_q \end{aligned}$$

Logo, como $\alpha = j(BS(X))$ e notando que $\alpha(Y)vol = \alpha$ já que Y é unitário temos

$$\begin{aligned} lk(\Phi, S) &= \int_N \alpha_q(Y(q))vol_q \\ &= \int_N \alpha \end{aligned}$$

Finalmente por definição de $I(\Phi, S)$ temos que

$$lk(\Phi, S) = I(\Phi, S). \quad \square$$

Exemplo 7.6

Sejam $X(x, y, z, w) = (y, -x, 0, 0)$ e $Y(x, y, z, w) = (0, 0, w, -z)$ campos vetoriais de divergência nula em Ω^4 . Sejam

$$\begin{aligned} \varphi_s^X(x, y, z, w) &= (r \sin(\alpha + s), r \cos(\alpha + s), z, w), \quad r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \alpha = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \\ \varphi_t^Y(x, y, z, w) &= (x, y, l \sin(\alpha + t), l \cos(\beta + t)), \quad l = (z^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \beta = \arctan\left(\frac{z}{w}\right) \end{aligned}$$

os fluxos de X e Y , respectivamente. Notemos que as órbitas de X e Y são fechadas e de período 2π . Como $[X, Y] = 0$, existe 2-ação Φ de $\mathbb{R}^2$ em Ω^4 associado a (X, Y) . Observemos que Φ está definida por

$$\begin{aligned} \varphi_{(s,t)}(x, y, z, w) &= \varphi_t^Y \circ \varphi_s^X(x, y, z, w) \\ &= \varphi_t^Y(\varphi_s^X(x, y, z, w)) \\ &= \varphi_t^Y(r \sin(\alpha + s), r \cos(\alpha + s), z, w) \\ &= (r \sin(\alpha + s), r \cos(\alpha + s), l \sin(\beta + t), l \cos(\beta + t)). \end{aligned}$$

As orbitas de Φ são fechadas de período $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Notemos que

$$i_{X \wedge Y} dvol = i_Y i_X dvol = y w dy dw + x w dx dw + y z dy dz + x z dx dz$$

e que a 1-forma $\alpha = (\frac{x^2 + y^2}{2})(z dz + w dw)$ satisfaz $d\alpha = i_{X \wedge Y} vol$. Agora, Seja S o círculo no primeiro quadrante do yz -plano centrada no ponto $(0, y_0, z_0, 0)$

de raio R . Logo, $\gamma(t) = (0, y_0 + R\cos(t), z_0 + R\sin(t), 0)$ parametriza S .

$$\begin{aligned} I(\Phi, S) &= \int_N \alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y_0 + R\cos(t))^2 (z_0 + R\sin(t)) R\cos(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R\cos(t) (y_0^2 + 2Ry_0\cos(t) + R^2\cos^2(t)) (z_0 + R\sin(t)) dt \end{aligned}$$

Como estamos integrando ao longo de um período, temos que a integração se anula para todos os somandos excepto para $\cos^2(t)$. Assim

$$I(\Phi, S) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2R^2 y_0 z_0 \cos^2(t) dt = R^2 y_0 z_0 \pi.$$

Por outro lado, no caso de enlaçamentos, consideremos o disco D no yz -plano tal que $\partial D = S$. Notemos que uma órbita, ao longo de um período, $(s, t) \mapsto (r\sin(\alpha + s), r\cos(\alpha + s), l\sin(\beta + t), l\cos(\beta + t))$, pode interceptar D se $r\sin(\alpha + s) = l\cos(\beta + t) = 0$, isto é, se $s \in \{-\alpha, \pi - \alpha\}$ e $t \in \{\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{3\pi}{2} - \beta\}$. Como D está contido no primeiro quadrante um retângulo de órbita (um período) se intercepta a D vai interceptá-lo somente num ponto da forma $(0, r, l, 0)$. Como na integral de enlaçamento o somando correspondente as áreas pequenas não é significativo sómente calcularemos os enlaçamentos no retângulos de órbitas que em nosso caso são fechados. Em particular, se $T_1 = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ temos que

$$lk_{\Gamma}(p) = \frac{1}{2\pi 2\pi} lk(\vartheta^{\Phi}(p, \Gamma), N) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi 2\pi} & \text{se } \vartheta^{\Phi}(p, \Gamma) \cap D \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \vartheta^{\Phi}(p, \Gamma) \cap D = \emptyset. \end{cases}$$

Sabendo que o índice de enlaçamento assintótico independe da sequência de períodos escolhida podemos escolher em particular a sequência $\Gamma_n = [0, 2n\pi] \times [0, 2n\pi]$. Notemos que $\vartheta^{\Phi}(p, \Gamma_n)$ é um retângulo de órbita fechado formada por n^2 copias do toro $\vartheta^{\Phi}(p, \Gamma)$ logo

$$lk_{\Gamma_n}(p) = \frac{1}{2n\pi 2n\pi} lk(\vartheta^{\Phi}(p, \Gamma_n), N) = \begin{cases} \frac{n^2}{2n\pi 2n\pi} = \frac{1}{2\pi 2\pi} & \text{se } \vartheta^{\Phi}(p, \Gamma_n) \cap D \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \vartheta^{\Phi}(p, \Gamma_n) \cap D = \emptyset. \end{cases}$$

Note que $\Omega := \bigcup_{q \in D} \vartheta^{\Phi}(q, \Gamma_n) = \{p \in \Omega^4; \vartheta^{\Phi}(p, \Gamma_n) \cap D \neq \emptyset\}$. Agora, como $(r, s) \mapsto (0, y_0 + r\cos(s), z_0 + r\cos(s), 0)$ é uma parametrização de D então $\rho(r, s, t, u)$ definido por

$$((y_0 + r\cos(s))\cos(t), (y_0 + r\cos(s))\sin(t), (z_0 + r\cos(s))\cos(u), (z_0 + r\cos(s))\sin(u))$$

é uma parametrização de Ω . Fazendo as contas necessárias temos que a forma de volume nesta parametrização é $r(y_0 + r \cos(s))(z_0 + r \sin(s)) dr ds dt du$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{p \in \Omega^4} lk_{\Gamma_n}(p) dvol &= \int_{p \in \Omega} lk_{\Gamma_n}(p) dvol \\
 &= \int_{p \in \Omega} \frac{1}{4\pi^2} dvol \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} vol(\Omega) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(y_0 + r \cos(s))(z_0 + r \sin(s)) dr ds dt du \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} 4\pi^2 r(y_0 + r \cos(s))(z_0 + r \sin(s)) dr ds \\
 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r y_0 z_0 dr ds \\
 &= y_0 z_0 R^2 \pi
 \end{aligned}$$

Como $\int_{p \in D^4} lk_{\Gamma_n}(p) dvol$ é constante $\forall n$ então

$$lk(\Phi, S) = y_0 z_0 R^2 \pi = I(\Phi, S).$$

7.2

Índice de Enlaçamento Assintótico entre Ações de $\mathbb{R}^k$

Seja M variedade riemanniana orientada, compacta e conexa. Sejam Φ uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M e Ψ uma ação de $\mathbb{R}^s$ em M de difeomorfismos que preservam volume, onde $k+s = n-1$. Notemos que as Φ -órbitas são variedades imersas em M de dimensão no máximo k . Agora, por cada ponto de uma Ψ -órbita ϑ^Ψ passa uma única Φ -órbita. Logo, o conjunto de pontos das Φ -órbitas que interceptam a ϑ^Ψ tem medida nula em M . Assim, existe subconjunto de M , com volume igual ao de M , tal que cada ponto deste conjunto tem sua Φ -órbita enlaçando-se ao redor de ϑ^Ψ . O recíproco também acontece com uma Φ -órbita ϑ^Φ e a ação Ψ . Logo, é natural pensar em definir um índice que meça o enlaçamento médio das órbitas de Φ com as órbitas de Ψ . No que segue, denotaremos por Γ o k -retângulo canônico $[0, T^1] \times \dots \times [0, T^k]$ e por Υ o s -retângulo canônico $[0, R^1] \times \dots \times [0, R^s]$, usaremos $\vartheta_{(p, \Gamma)}^\Phi$ e $\vartheta_{(q, \Upsilon)}^\Psi$ para denotar o k -retângulo de órbita $\{\Phi_{(t_1, \dots, t_k)}(p) ; (t_1, \dots, t_k) \in \Gamma\}$ e o s -retângulo de órbita $\{\Psi_{(r_1, \dots, r_s)}(q) ; (r_1, \dots, r_s) \in \Upsilon\}$. Sejam Σ_k conjunto de k -cadeias singulares em M e Σ_s conjunto de s -cadeias singulares em M que satisfazem as seguintes propriedades:

1. Para cada p e q em Ω^n , cada k -retângulo canônico Γ e cada s -retângulo

canônico Υ existem único $\sigma_{(p,\Gamma)}^\Phi \in \Sigma_k$ e único $\sigma_{(q,\Upsilon)}^\Psi \in \Sigma_s$ tal que $\partial\vartheta_{(p,\Gamma)}^\Phi = \partial\sigma_{(p,\Gamma)}^\varphi$ e $\partial\vartheta_{(q,\Upsilon)}^\psi = \partial\sigma_{(q,\Upsilon)}^\psi$.

2. As $\sigma_{(p,\Gamma)}^\Phi \in \Sigma_k$ e as $\sigma_{(q,\Upsilon)}^\psi \in \Sigma_s$ variam continuamente com respeito a $(p, T^1, \dots, T_k)$ e com respeito a $(q, R^1, \dots, R^s)$, respectivamente, no complemento de conjuntos de medida nula.

3. Os conjuntos

$$\begin{aligned}\Omega_{(\Phi, \Sigma_s)}^{(\Gamma, \Upsilon)} &= \{(p, q) \in M \times M ; \quad \vartheta_{(p,\Gamma)}^\Phi \cap \sigma_{(q,\Upsilon)}^\Psi \neq \emptyset \} \\ \Omega_{\Sigma_k, \Psi}^{(\Gamma, \Upsilon)} &= \{(p, q) \in M \times M ; \quad \sigma_{(p,\Gamma)}^\Phi \cap \vartheta_{(q,\Upsilon)}^\Psi \neq \emptyset \} \\ \Omega_{(\Sigma_k, \Sigma_s)}^{(\Gamma, \Upsilon)} &= \{(p, q) \in M \times M ; \quad \sigma_{(p,\Gamma)}^\varphi \cap \sigma_{(q,\Upsilon)}^\psi \neq \emptyset \}\end{aligned}$$

tem medida nula em $\Omega^n \times \Omega^n$ para cada Γ e Υ fixos.

4. Seja $L(p, q)$ a forma de enlaçamento em M . Os limites

$$\lim_{T^1, \dots, T^k, R^1, \dots, R^s \rightarrow \infty} \frac{1}{T^1 \dots T^k R^1 \dots R^s} \int_{\vartheta_{(p,\Gamma)}^\Phi} \int_{\sigma_{(q,\Upsilon)}^\Psi} L = 0 \quad (7-2)$$

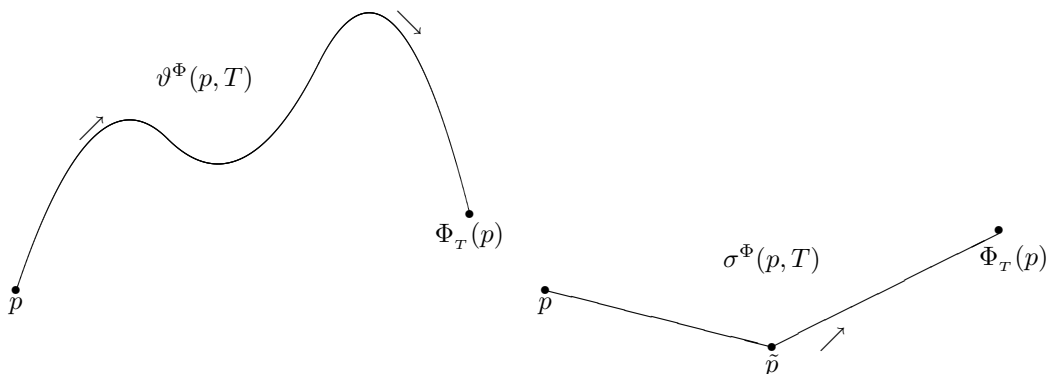
$$\lim_{T^1, \dots, T^k, R^1, \dots, R^s \rightarrow \infty} \frac{1}{T^1 \dots T^k R^1 \dots R^s} \int_{\sigma_{(p,\Gamma)}^\Phi} \int_{\vartheta_{(q,\Upsilon)}^\Psi} L = 0 \quad (7-3)$$

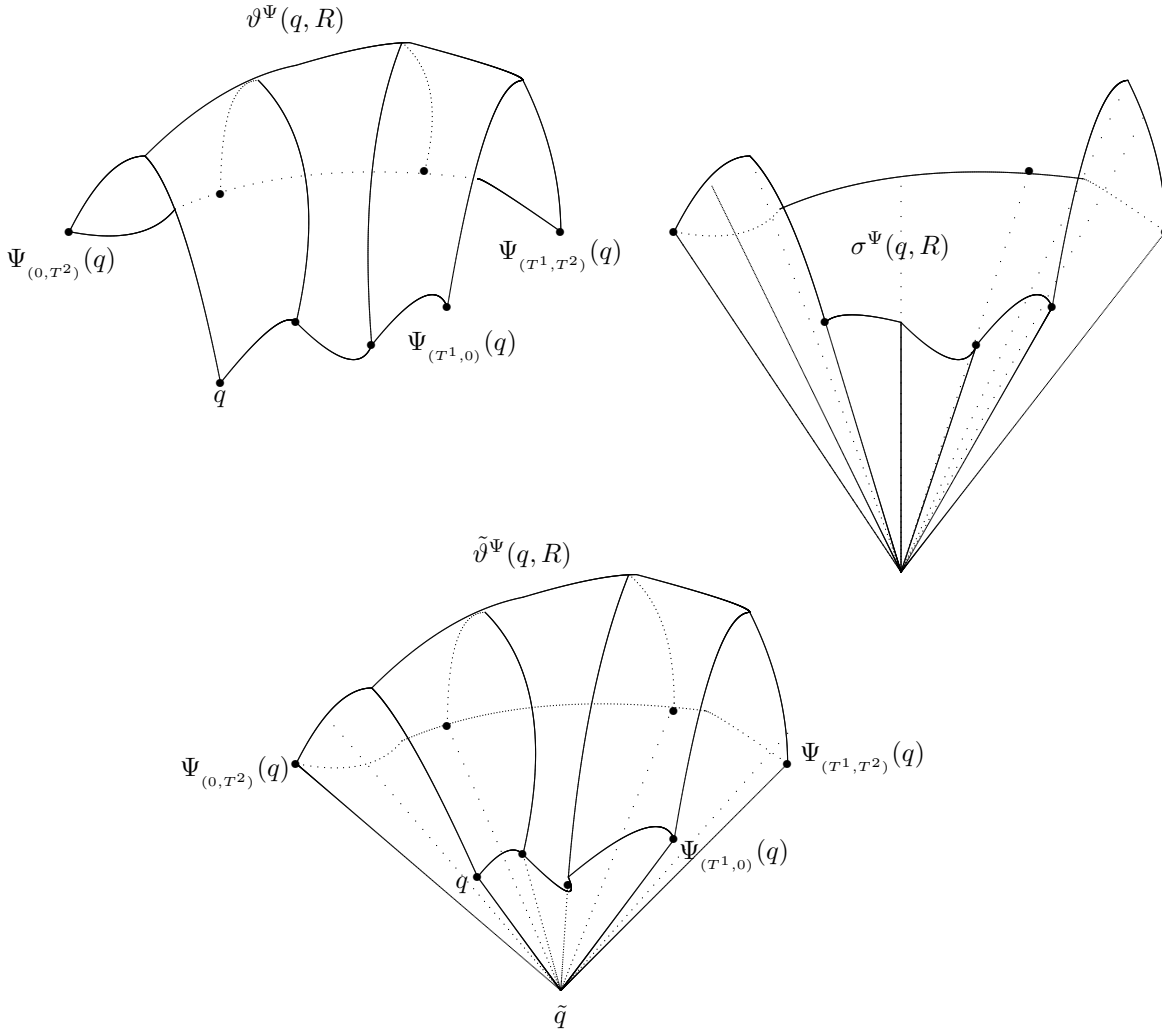
$$\lim_{T^1, \dots, T^k, R^1, \dots, R^s \rightarrow \infty} \frac{1}{T^1 \dots T^k R^1 \dots R^s} \int_{\sigma_{(p,\Gamma)}^\Phi} \int_{\sigma_{(q,\Upsilon)}^\Psi} L = 0 \quad (7-4)$$

existem na topologia de $L^1(M)$

Definição 7.7 *Todo par (Σ_k, Σ_s) satisfazendo as propriedades acima será chamado de sistemas de k -volumes e s -volumes pequenos associados a Φ e Ψ .*

Exemplo 7.8





Teorema 7.9 *Sejam $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ em $\partial\Omega^n$, $\tilde{p} \neq \tilde{q}$. Então o par $(\Sigma_k(\tilde{p}), \Sigma_k(\tilde{q}))$ formado pelo sistema de k -cadéias singulares estreladas com vértice em $\tilde{p}$ e o sistema de s -cadéias singulares com vértice em $\tilde{q}$ será um sistema de k -volumes e s -volumes pequenos associados a Φ e Ψ .*

Prova: Por construção como vimos na seção anterior $(\Sigma_k(\tilde{p}), \Sigma_k(\tilde{q}))$ satisfazem as propriedades 1 e 2 de um sistema de volumes pequenos associados a Φ e Ψ .

Agora, para mostrar as propriedades 3 e 4 lembremos que

$$\begin{aligned}\sigma_{(p,\Gamma)}^\Phi &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+k} (\mathcal{C}(\partial_i^0 \vartheta_{(p,\Gamma)}^\Phi) - \mathcal{C}(\partial_i^1 \vartheta_{(p,\Gamma)}^\Phi)); \\ \sigma_{(q,\Upsilon)}^\Psi &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+k} (\mathcal{C}(\partial_i^0 \vartheta_{(q,\Upsilon)}^\Psi) - \mathcal{C}(\partial_i^1 \vartheta_{(q,\Upsilon)}^\Psi)).\end{aligned}$$

Logo, devemos mostrar que estas propriedades são satisfeitas para cada família $\mathcal{C}(\partial_i^j \vartheta_{(p,\Gamma)})$. Neste caso, será suficiente mostrar para uma única família, já que no resto se mostra de maneira análoga. Em particular, escolheremos as famílias :

$$\begin{aligned}\sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} &:= \mathcal{C}(\partial_k^0 \vartheta_{(p,\Gamma)}^\Phi) ; \\ \sigma_{(q,\Upsilon)}^{(s,0)} &:= \mathcal{C}(\partial_k^0 \vartheta_{(q,\Upsilon)}^\Psi).\end{aligned}$$

Estas cadeias singulares em Ω^n são definidas pelas aplicações:

$$\begin{aligned}F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}(\vec{t}, u) &:= (1-u)\Phi_{(\vec{t},0)}(p) + u\tilde{p} ; \\ F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}(\vec{r}, t) &:= (1-t)\Phi_{(\vec{r},0)}(q) + t\tilde{q},\end{aligned}$$

onde $\vec{t} = (t_1, \dots, t_{k-1}) \in \widehat{\Gamma}^k$, $\vec{r} = (r_1, \dots, r_{s-1}) \in \widehat{\Upsilon}^s$ e $u, t \in [0, 1]$. No que segue, $\vec{t} := (t_1, \dots, t_{k-1}, t_k)$, $\vec{r} := (r_1, \dots, r_{s-1}, r_s)$ e para todo i a medida de Lebesgue e a forma de volume em $\mathbb{R}^i$ serão denotadas por μ_i e por $d\mu_i$, respectivamente. Primeiro mostraremos (7-3). Procedendo analogamente como na demonstração da propriedade 3 de sistema de k -volumes pequenos da seção anterior, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que a integral da fórmula de enlaçamento nas cadeias singulares $\sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}$ e $\vartheta_{(q,\Upsilon)}^\Psi$ satisfaz

$$\begin{aligned}A(p, q) &:= \left| \int_{x \in \sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}} \int_{y \in \vartheta_{(q,\Upsilon)}^\Psi} L_{(x,y)} \right| \\ &= \int_0^{R^s} \dots \int_0^{R^1} \int_0^1 \int_0^{T^{k-1}} \dots \int_0^{T^1} \frac{C}{\|\Psi_{\vec{r}}(q) - F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}(\vec{t}, u)\|^{n-1}}.\end{aligned}$$

Então, sabendo que para cada $\vec{r}$ a aplicação $\Psi_{\vec{r}}$ é um difeomorfismo que preserva volume temos usando também a desigualdade (7-1) que

$$\int_{q \in \Omega_2} \int_{p \in \Omega_1} |A(p, q)| \text{vol}(p) \text{vol}(q) \leq ECT^{k-1} \dots T^1 R^s \dots R^1 \text{vol}(\Omega_1).$$

Portanto

$$\frac{1}{T^1 \dots T^r R^1 \dots R^s} \int_{q \in \Omega_2} \int_{p \in \Omega_1} \left| \int_{x \in \sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}} \int_{y \in \vartheta_{(q,\Upsilon)}^\Psi} L_{(x,y)} \right| \text{vol}(p) \text{vol}(q) \leq \frac{EC \text{vol}(\Omega_1)}{T^k}$$

mostrando assim 7-3, já que $T^k \rightarrow \infty$. Analogamente para (7-2) no caso de $\sigma_{(p,\Upsilon)}^{(s,0)}$ temos que existe constante $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{T^1 \dots T^r R^1 \dots R^s} \int_{q \in \Omega_2} \int_{p \in \Omega_1} \left| \int_{x \in \vartheta_{(p,\Gamma)}^\Phi} \int_{y \in \sigma_{(q,\Upsilon)}^{(s,0)}} L_{(x,y)} \right| vol(p) vol(q) \leq \frac{E Avol(\Omega_2)}{R^s}.$$

, O fato de que $R^s \rightarrow \infty$ mostra (7-2). Agora para mostrar (7-4) considere-mos $\sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}$ e $\sigma_{(p,\Upsilon)}^{(s,0)}$. Procedendo como na demonstração da propriedade 3 da existência de volumes pequenos associados a ações e sub-variedades podemos mostrar que existe constante K tal que

$$\begin{aligned} A(p, q) &:= \left| \int_{x \in \sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}} \int_{y \in \sigma_{(p,\Upsilon)}^{(s,0)}} L_{(x,y)} \right| \\ &\leq \int_0^1 \int_{\vec{r}' \in \tilde{\Upsilon}^s} \int_0^1 \int_{\vec{t}' \in \tilde{\Gamma}^k} \frac{K d\mu_{k-1} du d\mu_{s-1} dt}{\|(1-u)\Phi_{(\vec{t}',0)}(p) + u\tilde{p} - (1-t)\Psi_{(\vec{r}',0)}(q) - t\tilde{q}\|^{n-1}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, Para cada $\vec{r}'$ e cada $\vec{t}'$ as famílias de aplicações $\{h_u^1\}$ e $\{h_t^2\}$ definidas em Ω^n por $h_u^1(p) = (1-u)\Phi_{(\vec{t}',0)}(p) + u\tilde{p}$ e $h_t^2(q) = (1-t)\Psi_{(\vec{r}',0)}(q) - t\tilde{q}$ satisfazem

$$(h_u^1)^*(vol) = (1-u)^n vol; \quad (h_t^2)^*(vol) = (1-t)^n vol$$

Portanto, usando este pullback na integração e por (7-1) temos que

$$\begin{aligned} I_1(t, u) &:= \int_{p \in \Omega^n} \int_{q \in \Omega^n} \frac{1}{\|(1-u)\Phi_{(\vec{t}',0)}(p) + u\tilde{p} - (1-t)\Psi_{(\vec{r}',0)}(q) - t\tilde{q}\|^{n-1}} vol(p) vol(q) \\ &= \frac{1}{(1-t)^n (1-u)^n} \int_{p \in (h_u^1)_*(\Omega^n)} \int_{q \in (h_t^2)_*(\Omega^n)} \frac{1}{\|p - q\|^{n-1}} vol(p) vol(q) \\ &\leq \frac{E}{(1-t)^n (1-u)^n}. \end{aligned}$$

Agora, mostraremos propriedade 3. fixemos Γ e Υ . Seja C uma s -cadéia em Ω^n . Por cada ponto q de C passa uma única Φ -órbita(k -cadéia). Então o conjunto de pontos que interceptam C é no maximo de dimensão $k+r = n-1$, isto é de medida nula em Ω^n . Agora, suponha que o conjunto $\Omega_{(\Phi, \Sigma_s)}^{(\Gamma, \Upsilon)}$ tem medida não nula em $\Omega^n \times \Omega^n$. Neste caso, existe um $C := \sigma_{(q,\Upsilon)}^\Psi$ tal que o conjunto $A = \{p \in \Omega^n; \vartheta_{(p,\Gamma)}^\Phi\}$ tem medida não nula mas isto é um absurdo já que notemos que A é um subconjunto de pontos das órbitas que

interceptam C o qual tem medida nula. Análogo para o conjunto $\Omega_{(\Sigma_k, \Upsilon)}^{(\Gamma, \Upsilon)}$. Para mostrar o caso $\Omega_{(\Sigma_k, \Sigma_s)}^{(\Gamma, \Upsilon)}$ de novo suponha que este tenha medida não nula em $\Omega^n \times \Omega^n$. Então, existe um $\sigma_{(q, \Upsilon)}^\Psi$ que não contém $\tilde{p}$, o vértice de $\Sigma_k(\tilde{p})$ com a propriedade que o conjunto B de pontos p tal que $\sigma_{(p, \Gamma)}^\Phi$ interceptam $\sigma_{(q, \Upsilon)}^\Psi$ tem medida não nula em Ω^n , mas isto é um absurdo, já que poderíamos proceder, usando homotopias, como no caso de seção anterior, de enlaçamento de uma k -ação com uma sub-variedade para mostrar que este conjunto é de medida nula. $\square$

Sejam Γ e Υ fixos. No teorema anterior mostramos a existência de um sistema de k -volumes e s -volumes associados a Φ e Ψ . Seja U o conjunto de medida nula que é a união dos conjuntos definidos na propriedade 3 de um sistema de volumes pequenos associados a Φ e Ψ . Seja $D_{(\Gamma, \Upsilon)}$ o complemento de U em $\Omega^n \times \Omega^n$. Logo podemos definir a função $lk_{(\Gamma, \Upsilon)} : D_{(\Gamma, \Upsilon)} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$lk_{(\Gamma, \Upsilon)}(p, q) = \frac{1}{T^1 \dots T^k R^1 \dots R^s} lk(\tilde{\vartheta}^\Phi(p, \Gamma), \tilde{\vartheta}^\Psi(p, \Upsilon)). \quad (7-5)$$

Observemos que os $\vartheta^\Phi(p, \Gamma)$ variam continuamente com respeito a p e que os $\sigma^\Phi(p, \Gamma)$, pela condição 2 de Σ , variam continuamente com respeito a p no complemento de um conjunto de medida nula. Assim, os $\tilde{\vartheta}_{(p, \Gamma)}^\Phi$ variam continuamente com respeito a p no complemento de um conjunto de medida nula e podemos afirmar o mesmo para os $\tilde{\vartheta}^\Psi(q, \Upsilon)$. Assim, as funções $lk_{(\Gamma, \Upsilon)}$ são funções mensuráveis definidas em $\Omega_n \times \Omega_n$.

Proposição 7.10 *A função limite $\tilde{lk} : \Omega_n \times \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\begin{aligned} \tilde{lk}(p, q) &:= \lim_{T^1, T^k, R^1, \dots, R^k \rightarrow \infty} lk_{(\Gamma, \Upsilon)}(p, q) \\ &= \lim_{T^1, T^k, R^1, \dots, R^k \rightarrow \infty} \frac{1}{T^1 \dots T^k R^1 \dots R^s} lk(\tilde{\vartheta}^\Phi(p, \Gamma), \tilde{\vartheta}^\Psi(q, \Upsilon)). \end{aligned} \quad (7-6)$$

existe na topologia de $L^1(\Omega_n \times \Omega_n)$. Além disso, $\tilde{lk}$ é uma função integrável que independe do sistema de volumes pequenos associados a Φ e Ψ escolhido.

Prova: Sejam $X = X^1 \wedge \dots \wedge X^k$ e $Y = Y^1 \wedge \dots \wedge Y^s$ o k -campos e o s -campo de divergência nula associados a Φ e Ψ , respectivamente. Definamos a função $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(p, q) := \frac{(-1)^k (p - q) \times X(q) \cdot Y(p)}{a_n \|p - q\|^n}. \quad (7-7)$$

Observemos que as singularidades de f são de ordem $n - 1$ na diagonal de $\Omega_n \times \Omega_n$ (Pontos de intercepção de Ω_n e Ω_n). Como esta diagonal tem dimensão n temos que f é uma função de valor absoluto integrável, isto é, $f \in L^1(\Omega_n \times \Omega_n)$. usando a fórmula (2-18) para a forma de enlaçamento temos

que

$$\begin{aligned} A(p, q) &:= \int_{y \in \vartheta_{(p, \Gamma)}^\Psi} \int_{x \in \vartheta_{(p, \Gamma)}^\Phi} L(x, y) \\ &= \frac{(-1)^k}{a_n} \int_{y \in \vartheta_{(p, \Gamma)}^\Psi} \int_{x \in \vartheta_{(p, \Gamma)}^\Phi} \frac{y - x \times N^\Phi(x) \cdot N^\Psi(y)}{\|y - x\|^n} \text{vol}(x) \text{vol}(y), \end{aligned}$$

onde N^Φ e N^Ψ são os campos unitários singulares de Φ e Ψ , respectivamente.

Agora, por (2-18) e por (6-6)

$$A(p, q) = \frac{(-1)^k}{a_n} \int_0^{R^s} \cdots \int_0^{R^1} \int_0^{T^k} \cdots \int_0^{T^1} \frac{(\Psi_{\vec{r}}(q) - \Phi_{\vec{t}}(p)) \times X(\Phi_{\vec{t}}(p)) \cdot Y(\Psi_{\vec{r}}(q))}{\|Psi_{\vec{r}}(q) - \Phi_{\vec{t}}(p)\|^n} d\mu_k d\mu_s,$$

onde $\vec{r} = (r_1, \dots, r_s)$, $\vec{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $d\mu_k = dt_1 \cdots dt_k$ e $d\mu_r = dr_1 \cdots dr_s$. Definamos a ação Θ de $\mathbb{R}^{k+s}$ em $\Omega_n \times \Omega_n$

$$\Theta_{(\vec{t}, \vec{r})}(p, q) = (\Phi_{\vec{t}}(p), \Psi_{\vec{r}}(q)).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} f(\Theta_{(\vec{t}, \vec{r})}(p, q)) &= f(\Phi_{\vec{t}}(p), \Psi_{\vec{r}}(q)) \\ &= \frac{(-1)^k}{a_n} \frac{(\Psi_{\vec{r}}(q) - \Phi_{\vec{t}}(p)) \times X(\Phi_{\vec{t}}(p)) \cdot Y(\Psi_{\vec{r}}(q))}{\|Psi_{\vec{r}}(q) - \Phi_{\vec{t}}(p)\|^n} \end{aligned}$$

Disso, da propriedade 4 de sistema de volumes pequenos e a definição de $\tilde{l}k$ temos que

$$\tilde{l}k(p, q) = \lim_{T^1, \dots, T^k, R^1, \dots, R^s \rightarrow \infty} \frac{1}{T^1 \cdots T^k R^1 \cdots R^s} \int_0^{R^s} \cdots \int_0^{R^1} \int_0^{T^k} \cdots \int_0^{T^1} f(\Theta_{(\vec{t}, \vec{r})}(p, q)) d\mu_k d\mu_s.$$

Portanto, do teorema ergódico para ações, resultado (4-7) temos que $\tilde{l}k(p, q)$ converge na topologia $L^1(\Omega_n \times \Omega_n)$. Além disso, o resultado (4-8) do mesmo teorema garante que

$$\int_{q \in \Omega_n} \int_{p \in \Omega_n} \tilde{l}k(p, q) \text{vol}(p) \text{vol}(q) = \int_{q \in \Omega_n} \int_{p \in \Omega_n} f(p, q) \text{vol}(p) \text{vol}(q) \quad (7-8)$$

Esta última equação garante a independência da integral com respeito ao sistema de volumes pequenos escolhido. $\square$

Definição 7.11 *O índice*

$$lk(\Phi, \Psi) := \int_{q \in \Omega^n} \int_{p \in \Omega^n} \tilde{l}k(p, q) \text{vol}(p) \text{vol}(q).$$

será chamado o índice de enlaçamento assintótico médio das ações Φ e Ψ .

Agora, mostraremos um teorema muito importante que afirma a igualdade da invariante de Hopf e da invariante de enlaçamento assintótico das ações Φ e Ψ .

Teorema 7.12

$$lk(\Phi, \Psi) = I(\Phi, \Psi),$$

onde $I(\Phi, \Psi)$ é o invariante de Hopf para Φ e Ψ .

Prova: Por (7-8) e (7-7) temos que

$$\begin{aligned} \int_{q \in \Omega^n} \int_{p \in \Omega^n} \tilde{lk}(p, q) vol(p) vol(q) &= \int_{q \in \Omega^n} \int_{p \in \Omega^n} f(p, q) vol(p) vol(q) \\ &= \int_{q \in \Omega^n} \int_{p \in \Omega^n} \frac{(-1)^k}{a_n} \frac{(p - q) \times X(q) \cdot Y(p)}{\|p - q\|^n} \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Biot-Savart para o k -campo X temos que

$$\int_{q \in \Omega^n} \int_{p \in \Omega_1} \tilde{lk}(p, q) vol(p) vol(q) = \int_{q \in \Omega^n} BS(X)(q) \cdot Y(q) vol(q)$$

Finalmente pela fórmula (4-3) temos que

$$\begin{aligned} \int_{q \in \Omega^n} \int_{p \in \Omega^n} \tilde{lk}(p, q) vol(p) vol(q) &= \int_{q \in \Omega^n} \alpha \wedge i_Y vol \\ &= I(\Phi, \Psi). \end{aligned}$$

Exemplo 7.13 Seja Φ a ação de $\mathbb{R}^2$ em Ω^4 definida no exemplo 6.1.9. cujos campos associados são $X_1(x, y, z, w) = (y, -x, 0, 0)$ e $X_2(x, y, z, w) = (0, 0, w, -z)$. Se $X = X_1 \wedge X_2$ então

$$i_X dvol = ywdydw + xwdxdw + yzdydz + xzdx dz.$$

A 1-forma $\alpha = (\frac{x^2+y^2}{2})(zdz + wdw)$ satisfaz $d\alpha = i_X dvol$. Agora, Fixemos o ponto $(0, y_0, z_0, 0) \in \Omega^4$ no primeiro quadrante do plano yz . Sejam $B^4 \subset \Omega^4$ uma bola centrada em $(0, y_0, z_0, 0)$ de raio R suficientemente pequeno tal que suas coordenadas y e z são positivas e ψ uma ação de $\mathbb{R}$ em B^4 definida pelo campo $Y(x, y, w, z) = (0, -(z - z_0), (y - y_0), 0)$. Logo,

$$i_Y dvol = (y - y_0) dx dy dw + (z - z_0) dx dz dw.$$

A 2-forma $\beta = \frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{2} dx dw$ satisfaz $d\beta = i_Y d\text{vol}$. Logo, se $\tilde{R} = \sqrt{R^2 - x^2 - w^2}$ temos que:

$$\begin{aligned}
 I(\varphi, \psi) &= \int_{B^4} \beta \wedge d\alpha \\
 &= \int_{B^4} \left(\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{2} \right) (yz) \, dx dy dz dw \\
 &= \int_{(x,w) \in D_R(0,0)} \int_{(y,z) \in D_{\tilde{R}}(y_0,z_0)} \left(\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{2} \right) (yz) \, dy dz dx dw \\
 &= \frac{1}{2} \int_{(x,w) \in D_R(0,0)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\tilde{R}} r^2 (y_0 + r \cos \theta) (z_0 + r \sin \theta) r dr d\theta dx dw \\
 &= \frac{1}{2} \int_{(x,w) \in D_R(0,0)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\tilde{R}} r^3 y_0 z_0 dr d\theta dx dw \\
 &= \frac{y_0 z_0 \pi}{4} \int_{(x,w) \in D_R(0,0)} r^4 \Big|_0^{\tilde{R}} dx dw \\
 &= \frac{y_0 z_0 \pi}{4} \int_{(x,w) \in D_R(0,0)} (R^2 - x^2 - w^2)^2 dx dw \\
 &= \frac{y_0 z_0 \pi}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2)^2 r dr d\theta \\
 &= \frac{y_0 z_0 \pi^2 R^6}{12}
 \end{aligned}$$

Para calcular $lk(\varphi, \psi)$ o índice de enlaçamento assintótico das ações podemos escolher sequencias quaisquer dos T_n e S_n , em particular $T_n = [0, 2n\pi] \times [0, 2n\pi]$ e $S_n = [0, 2n\pi]$. Notemos que $\vartheta^\varphi(p, T_n)$ é um pedaço de órbita fechado composta por n^2 copias do toro $\vartheta^\varphi(p, [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ e $\vartheta^\psi(q, S_n)$ é composta de n copias do círculo $\vartheta^\psi(q, [0, 2\pi])$ logo, se D_p é o disco num plano paralelo ao plano yz cujo bordo é $\vartheta^\psi(q, [0, 2\pi])$ então, analogamente como no exemplo 6.1.9,

$$\begin{aligned}
 lk_{(T_n, S_n)}(p, q) &= \frac{1}{T_n^1 T_n^2 S_n^1} lk(\vartheta^\varphi(p, T_n), \vartheta^\psi(q, S_n)) \\
 &= \begin{cases} \frac{n^2 n}{(2n\pi)^3} = \frac{1}{8\pi^3} & \text{se } \vartheta^\varphi(p, T_n) \cap D_q \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \vartheta^\varphi(p, T_n) \cap D_q = \emptyset. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pelo que as funções $lk_{(T_n, S_n)}$ são constantes. Assim usando o resultado do

exemplo 6.1.9 temos

$$\begin{aligned}
 lk(\varphi, \psi) &= \int_{p \in \Omega^4} \int_{q \in B^4} lk_{(T_n, S_n)}(p, q) dvol(p) dvol(q) \\
 &= \int_{p \in \Omega} \left[\int_{(x, w) \in D_R(0, 0)} \left[\int_{(y, z) \in D_{\tilde{R}}(y_0, z_0)} lk_{(T_n, S_n)}(p, (x, y, z, w)) dydz \right] dx dw \right] dvol(p) \\
 &= \int_{(x, w) \in D_R(0, 0)} \left[\int_0^{\tilde{R}} \left[\int_{p \in \Omega} \int_0^{2\pi} lk_{(T_n, S_n)}(p, (x, y_0 + r \cos(\theta), z_0 + r \sin(\theta), w)) d\theta \right] r dr \right] dx dw \\
 &= \int_{(x, w) \in D_R(0, 0)} \left[\int_0^{\tilde{R}} [y_0 z_0 \pi r^2] r dr \right] dx dw \\
 &= \frac{y_0 z_0 \pi}{4} \int_{(x, w) \in D_R(0, 0)} (R^2 - x^2 - y^2)^2 dx dw \\
 &= \frac{y_0 z_0 \pi}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2)^2 r dr d\theta \\
 &= \frac{y_0 z_0 \pi^2 R^6}{12}
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$lk(\varphi, \psi) = \frac{y_0 z_0 \pi^2 R^6}{12} = I(\varphi, \psi).$$