4
Invariante para Ações de $\mathbb{R}^k$ e Teorema Ergódico em M^n

No capítulo 2 vimos que para cada k-campo em M podemos associar naturalmente uma k-forma e uma $(n-k)$-forma. Em particular, para uma ação Φ de $\mathbb{R}^k$ em M podemos associar naturalmente um k-campo X. Assim, podemos associar a Φ naturalmente formas diferenciais, as quais como veremos neste capítulo darão origem a invariantes integrais associados a Φ.

4.1
Ações de $\mathbb{R}^k$ em M^n

Seja M variedade riemanniana de dimensão n, compacta, sem bordo, orientada , conexa e vol sua forma de volume. Seja $X \in E_1(M)$ um campo vetorial e Φ, $(t,p) \mapsto \Phi_t(p)$, seu fluxo. Como M é compacta sem bordo, o dominio de Φ é $\mathbb{R} \times M$. Suponha que o fluxo Φ preserva a forma de volume vol, isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos que $\Phi_t^*(vol) = vol$. Neste caso, por definição da derivada de Lie com respeito a X se cumpre que $L_X vol = 0$. Sabendo que $L_X vol = di_X vol$ temos por (3-2), definição de div e (2-13) que

$$L_X vol = di_X vol = d(j(*X)) = *div(X) = div(X)vol.$$

Portanto $div(X) = 0$. Da igualdade anterior podemos afirmar que o recíproco também é certo, isto é, se $div(X) = 0$ então o fluxo Φ preserva volume.

Sejam $\mathfrak{g} := \{X \in E_1(M);\ div(X) = 0\}$, a álgebra de Lie dos 1-campos cujos fluxos preservam volume e

$$\mathfrak{g}_k = \{(X^1, X^2, .., X^k) \in \mathfrak{g} \times .. \times \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^k; \quad [X^i, X^j] = 0\ \forall i, j\},$$

onde $[X^i, X^j]$ é o colchete de Lie dos campos X^i e X^j. Para cada $X = (X^1, X^2, .., X^k) \in \mathfrak{g}_k$ podemos associar uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M da seguinte forma. Para cada $i \in \{1, .., k\}$ denotemos por $\Phi^i_{t_i}$ o fluxo associado a X^i. Para cada par i e j temos que $\Phi^i_{t_i} \circ \Phi^j_{t_j} = \Phi^j_{t_j} \circ \Phi^i_{t_i}$, já que $[X^i, X^j] = 0$. Definamos

$$\begin{array}{rcccl} \Theta & : & \mathbb{R}^k \times M & \to & M \\ & & (t_1, .., t_k, p) & \mapsto & \Theta_{(t_1, t_2, .., t_k)}(p) = \Phi^k_{t_k} \circ \Phi^{k-1}_{t_{k-1}} \circ .. \circ \Phi^1_{t_1}(p) \end{array}$$

Como para cada $t_i \in \mathbb{R}$ a aplicação $\Phi^i_{t_i} : M \to M$ é um difeomorfismo que preserva volume então para cada $(t_1, t_2, .., t_k) \in \mathbb{R}^k$ temos que a aplicação composta

$$\Theta_{(t_1,t_2,..,t_k)} = \Phi^k_{t_k} \circ \Phi^{k-1}_{t_{k-1}} \circ .. \circ \Phi^1_{t_1}$$

é um difeomorfismo de M que preserva volume. Observemos também que

$$\begin{aligned}
\Theta_{(s_1,..,s_k)}(\Theta_{(t_1,..,t_k)}(p)) &= (\Theta_{(s_1,..,s_k)} \circ \Theta_{(t_1,..,t_k)})(p) \\
&= (\Phi^k_{s_k} \circ .. \circ \Phi^1_{s_1} \circ \Phi^k_{t_k} \circ .. \circ \Phi^1_{t_1})(p) \\
&= (\Phi^k_{s_k} \circ \Phi^k_{t_k} .. \circ \Phi^1_{s_1} \circ \Phi^1_{t_1})(p) \\
&= (\Phi^k_{s_k+t_k} \circ .. \circ \Phi^1_{s_1+t_1})(p) \\
&= \Theta_{(s_1+t_1,..,s_k+t_k)}(p).
\end{aligned}$$

Portanto Θ é uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M de difeomorfismos que preservam volume.

Definição 4.1 *A ação Θ é chamada de ação de $\mathbb{R}^k$ em M associada a $X \in \mathfrak{g}_k$ e será denotada por $A(X)$.*

Proposição 4.2 *Seja $\Theta : \mathbb{R}^k \times M \to M$ uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M cujos fluxos preservam volume. Então existe $X \in \mathfrak{g}_k$ tal que $A(X) = \Theta$.*

Prova : Sejam os campos vetoriais $X^i \in E_1(M)$ definidos por

$$X^i(p) := (d\Theta)_{(0,p)}\ (e_i, 0),\ \forall p \in M,$$

onde $\{e_1, .., e_k\}$ é a base canônica em $\mathbb{R}^k$. Notemos que $\Phi^i(t, p) := \Theta(te_i, p)$ é o fluxo associado a X^i. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^i}{\partial t}(t,p) &= \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t\ e_i, p) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Theta(t\ e_i\ +\ h\ e_i, p)\ +\ \Theta(t\ e_i, p)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Theta(h\ e_i, \Theta(t\ e_i, p)\ )\ +\ \Theta(0, \Theta(t\ e_i, p)\ )}{h} \\
&= (d\ \Theta)_{\Theta(t\ e_i, p)}(e_i, 0) \\
&= X^i\ (\Theta(t\ e_i, p)\ ) \\
&= X^i\ (\Phi^i\ (t, p)).
\end{aligned}$$

Por outro lado, por definição os Φ^i comutam e preservam volume, logo para todo i e j temos que $[X^i, X^j] = 0$ e $div(X^i) = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\Phi^k_{t_k} \circ ... \circ \Phi^1_{t_1}\ (p) &= \Phi^k_{t_k}(...(\Phi^1_{t_1}\ (p))...) \\
&= \Theta(t_k\ e_k, \Theta(t_{k-1}\ e_{k-1}, ..., \Theta(t_1\ e_1, p)...)\ ) \\
&= \Theta(t_k\ e_k + t_{k-1}\ e_{k-1} + t_1\ e_1, p) \\
&= \Theta(t_1, t_2, .., t_k, p). \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposição 4.3 *Seja* $\widetilde{X} = X^1 \wedge .. \wedge X^k$ *o k-campo associado a* $X = (X^1, .., X^k) \in \mathfrak{g}_k$ *. Então a* $(n-k)$*-forma* $j(*\widetilde{X}) = i_{\widetilde{X}}vol$ *associada a* $\widetilde{X}$ *é fechada.*

Prova:
Como $X \in \mathfrak{g}_k$, temos, para todo i e j, que $div(X^i) = 0$ e $[X^i, X^j] = 0$. Por (3-19) temos que $div(\widetilde{X}) = div(X^1 \wedge .. \wedge X^k) = 0$; logo, por (3-10) temos

$$dj(*\widetilde{X}) = i_{div(\widetilde{X})}\ vol = 0. \qquad \square$$

No que segue, trabalharemos somente com os X de $\mathfrak{g}_k$ tal que $i_{\widetilde{X}}vol$ é exata, ou seja, $X \in \widetilde{g}_k$, onde

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_k := \{X = (X^1, .., X^k) \in \mathfrak{g}_k;\ \exists\ \alpha \in E^{n-k-1}(M) \text{ tal que } d\alpha = i_{\widetilde{X}}vol\}.$$

Observação 4.4 *Se* $H^k(M) = \{0\}$ (*equivalentemente por dualidade de Poincaré* $H^{n-k}(M) = \{0\}$) *então* $\widetilde{\mathfrak{g}}_k = \mathfrak{g}_k$.

Definição 4.5 *Sejam* $X = (X^1, .., X^n) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k$, $Y = (Y^1, .., Y^s) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_s$ *e* N^s *subvariedade fechada sem bordo e de homologia nula em* M*, k+s=n-1. Sejam* $\alpha \in E^s(M)$ *e* $\beta \in E^k(M)$ *tais que* $d\alpha = i_{\widetilde{X}}vol$ *e* $d\beta = i_{\widetilde{Y}}vol$ *respectivamente. Os índices*

$$I(X, Y) = \int_M \alpha \wedge d\beta. \tag{4-1}$$

$$I(X, N) = \int_N \alpha. \tag{4-2}$$

são chamados de invariante de Hopf associados a (X, Y) *e a* (X, N)*, respectivamente.*

A definição de invariante é justificada pela seguinte proposição:

Proposição 4.6 $I(X, Y)$ *e* $I(X, N)$ *independem da escolha de* α *e* β*.*

Prova: Mostremos o caso $I(X,Y)$. Sejam $\theta \in E^{n-k-1}(M)$ e $\gamma \in E^{n-s-1}(M)$ tais que $d\theta = i_X vol$ e $d\gamma = i_Y vol$. Então, existem $\theta_1 \in E^{n-k-1}(M)$ e $\gamma_1 \in E^{n-s-1}(M)$ tais que $\alpha = \theta + \theta_1$, $\beta = \gamma + \gamma_1$, $d\ \theta_1 = 0$ e $d\gamma_1 = 0$. Logo

$$I(X,Y) = \int_M \alpha \wedge d\ \beta = \int_M (\theta + \theta_1) \wedge d\ (\gamma + \gamma_1) = \int_M \theta \wedge d\ \gamma + \int_M \theta_1 \wedge d\ \gamma.$$

Como $d(\theta_1 \wedge \gamma) = \theta_1 \wedge d\gamma$, temos

$$I(X,Y) = \int_M \theta \wedge d\ \gamma + \int_M d(\theta_1 \wedge \gamma).$$

Finalmente, pelo teorema de Stokes e sendo $\partial M = \emptyset$ temos

$$I(X,Y) = \int_M \theta \wedge d\gamma + \int_{\partial M} \theta_1 \wedge \gamma = \int_M \theta \wedge d\gamma.$$

Analogamente, podemos mostrar que $I(X,N)$ independe da escolha de α. $\square$

Proposição 4.7 *Seja α uma s-forma em M e β uma k-forma em M tal que $d\beta = i_{\widetilde{Y}} vol$. Então*

$$\alpha \wedge d\beta = \alpha(\widetilde{Y})vol. \tag{4-3}$$

Em particular, se α satisfaz $d\alpha = i_{\widetilde{X}} vol$ então

$$I(X,Y) = \int_M \alpha(\widetilde{Y})vol. \tag{4-4}$$

Prova: Por definição de $i_{Y^1 \wedge .. \wedge Y^s}\alpha$, por (2-6) e pela propriedade de antiderivação de i_{Y^i} temos

$$\begin{aligned} \alpha(\widetilde{Y})vol = \alpha(Y^1 \wedge .. \wedge Y^s)vol &= (i_{Y^1 \wedge .. \wedge Y^s}\alpha)vol \\ &= (i_{Y^s} i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha)vol \\ &= i_{Y^s}(i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha \wedge vol) + (-1)^{s-1}(i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha) \wedge i_{Y^s} vol. \end{aligned}$$

Notemos que $(i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha) \wedge vol$ é uma $(n+1)$-forma em M^n, logo é nula. Então

$$\alpha(\widetilde{Y})vol = (-1)^{s-1} i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha \wedge i_{Y^s} vol.$$

Procedendo analogamente como acima temos

$$\alpha(\widetilde{Y})vol = (-1)^{s-1}(-1)^{s-2} .. (-1)^2(-1)^1 \alpha \wedge i_{Y^1} .. i_{Y^{s-1}} i_{Y^s} vol.$$

Disso, por (2-6) e pela anticomutatividade do produto exterior $\wedge$ temos

$$\begin{aligned} \alpha(\widetilde{Y})vol &= (-1)^{s-1}(-1)^{s-2}..(-1)^2(-1)^1\alpha\wedge i_{Y^s\wedge..\wedge Y^2\wedge Y^1}vol \\ &= \alpha\wedge i_{\widetilde{Y}}vol, \end{aligned}$$

mostrando assim (4-3). A igualdade (4-4) resulta da definição (4-1) e de (4-3). □

Para cada $\alpha \in E^s(M)$ definamos o s-campo $U = j^{-1}(\alpha)$, $U(p) = j^{-1}(\alpha_p)$, $\forall p \in M$. Por definição de j temos

$$g(U,\widetilde{Y}) = g(j^{-1}(\alpha),\widetilde{Y}) = j(j^{-1}\alpha)(\widetilde{Y}) = \alpha(\widetilde{Y}) \ , \quad \forall \widetilde{Y} \in E_s(M).$$

Proposição 4.8 *Sejam* $X = (X^1,..,X^n) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k$, $Y = (Y^1,..,Y^s) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_s$ *e* $\alpha \in E^s(M)$ *tal que* $d\alpha = i_{\widetilde{X}}vol$, *onde* $\widetilde{X} = X^1\wedge..\wedge X^k$. *Se* $U := j^{-1}(\alpha)$ *então* $rot(U) = \widetilde{X}$ *e*

$$I(X,Y) = \int_M g(U,\widetilde{Y})vol = \int_M U\cdot\widetilde{Y}vol. \tag{4-5}$$

Prova: A igualdade (3-11) afirma que $dj(U) = i_{rot(U)}vol$. Notemos que $j(U) = j(j^{-1}(\alpha)) = \alpha$, logo

$$i_{rot(U)}vol = dj(U) = d\alpha = i_{\widetilde{X}}vol.$$

Portanto $\widetilde{X} = rot(U)$. Por outro lado, da igualdade (2-19) temos $g(U,Y) = U\cdot Y$. O resultado (4-5) segue de (4-3).

Proposição 4.9 *Se* $H^s(M) = \{0\}$, *então* $I(X,Y)$ *independe da escolha de* U *tal que* $rot(U) = \widetilde{w}$.

Prova :

Seja $V \in E_s(M)$ tal que $rot(V) = \widetilde{X}$. Então existe $W \in E_s(M)$ tal que $U = V + W$ e $rot(W) = 0$. Note que $dj(W) = i_{rotW}vol = 0$, isto é, $j(W) \in E^s(M)$ é fechada. Como $H^s(M) = \{0\}$, existe $\theta \in E^{s-1}(M)$ tal que $d\theta = j(W)$. Logo, por definição de j, temos

$$W\cdot\widetilde{Y} = g(W,\widetilde{Y}) = j(W)(\widetilde{Y}) = d\theta(\widetilde{Y}).$$

Então

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= \int_M U \cdot \widetilde{Y} vol \\ &= \int_M (V+W) \cdot \widetilde{Y} vol \\ &= \int_M V \cdot \widetilde{Y} vol + \int_M W \cdot \widetilde{Y} vol \\ &= \int_M V \cdot Y vol + \int_M d\theta(\widetilde{Y}) vol. \end{aligned}$$

Agora, por (4-3) temos

$$I(X,Y) = \int_M V \cdot \widetilde{Y} vol + \int_M d\theta \wedge i_{\widetilde{Y}} vol.$$

Finalmente, sendo $i_{\widetilde{Y}} vol$ fechado e aplicando Stokes temos

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= \int_M V \cdot \widetilde{Y} vol + \int_M d(\theta \wedge i_{\widetilde{Y}} vol) \\ &= \int_M V \cdot \widetilde{Y} vol + \underbrace{\int_{\partial M = \emptyset} \theta \wedge i_{\widetilde{Y}} vol}_{0}. \end{aligned}$$

Portanto $I(X,Y) = \int_M V \cdot \widetilde{Y} vol.$ □

Observação 4.10

Seja M^n uma variedade riemanniana compacta com bordo suave. Se $X = (X^1, .., X^k) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k$ e $Y = (Y^1, .., Y^s) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_s$ então o invariante $I(X,Y) = \int_M \alpha \wedge d\beta$, onde $d\alpha = i_{\widetilde{X}} vol$ e $d\beta = i_{\widetilde{Y}}$, pode ainda ser definido sempre que para todo i e j os campos X^i e Y^j sejam tangentes a ∂M e $H^s(M) = \{0\}$. De fato, notemos primeiro que $i_{\widetilde{Y}} vol$ restrita a ∂M é nula

$$\begin{aligned} i_{\widetilde{Y}} vol \mid_{\partial M} &= i_{Y^1 \wedge .. \wedge Y^s} vol \mid_{\partial M} \\ &= i_{Y^s} i_{Y^{Y-1}} ... i_{Y^1} vol \mid_{\partial M} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora mostraremos, como no caso de variedade sem bordo, que $I(X,Y)$ independe da escolha de α e β. Sejam $\gamma \in E^s(M)$ e $\theta \in E^k(M)$ tal que $d\gamma = i_X vol$ e $d\theta = i_Y vol$. Definamos $\gamma_2 := \alpha - \gamma \in E^s(M)$ e $\theta_2 := \beta - \theta \in E^k(M)$. Então $d\theta_2 = 0$ e $d\gamma_2 = 0$ e sendo $H^s(M) = \{0\}$ temos que existe γ_3 tal que $d\gamma_3 = \gamma_2$. Logo, temos que

$$I(X,Y) = \int_M \alpha \wedge d\beta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_M (\gamma + \gamma_2) \wedge d(\theta + \theta_2) \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_M \gamma_2 \wedge d\theta \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_M d\gamma_3 \wedge d\theta \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_M d(\gamma_3 \wedge d\theta) \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_{\partial M} \gamma_3 \wedge d\theta \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_{\partial M} \gamma_3 \wedge i_Y vol \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Definição 4.11 *Seja M^n variedade riemanniana compacta sem bordo e orientada. Sejam Φ e Ψ ações de $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^s$ em M respectivamente, $k+s=n-1$, e N uma s-variedade fechada, sem bordo e de homologia nula em M. Suponha que $X \in \widetilde{g}_k$ e $Y \in \widetilde{g}_s$, onde $A(X)=\Phi$ e $A(Y)=\Psi$. Definimos*

$$I(\Phi,\Psi) := I(X,Y), \quad I(\Phi,N) := I(X,N), \tag{4-6}$$

Os quais serão chamados de índice de Hopf com respeito ao par de ações e índice de Hopf com respeito a Φ e N, respectivamente.

A observação 3.10 garante que o índice de Hopf para ações esteja bem definido tanto para variedades com bordo como para variedades sem bordo.

4.2 Teorema Ergódico para Ações de $\mathbb{R}^k$ numa Variedade Riemanniana Compacta

Seja M uma variedade riemanniana compacta com forma de volume vol. Seja Φ uma ação de $\mathbb{R}^k$ de difeomorfismos que preservam volume em M. Denotemos por $L^1(M)$ o espaço das funções $f : M \to \mathbb{R}$ tais que $\int_M |f| vol < \infty$. Lembremos que se $A \subset M$ então chamamos de função caracteristica de A a função χ_A tal que $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ caso contrário. Agora, uma função f é dita simples se existem $A_1, A_2, .., A_k$ subconjuntos mensuráveis em M e escalares $a_1, a_2, .., a_k$ tal que

$$f = \sum_{i+1}^{k} a_i \chi_{A_i}.$$

Seja $\widetilde{W}$ o subespaço de $L^1(M)$ definido por

$$\widetilde{W} = \{h - h \circ \Phi_{(t_1,..,t_k)};\ h \text{ função simples e } (t_1,..,t_k) \in \mathbb{R}^k\}.$$

Denotemos também por W o fecho em $L^1(M)$ do subespaço linear gerado por $\widetilde{W}$. Notemos que $\widetilde{W}$ é denso em W.

Seja I o subespaço de $L^1(M)$ das funções Φ invariantes, isto é, uma função f pertence a I se existe $U \subset M$ tal que seu complemento tem medida nula em M e f satisfaz

$$f(x) = f \circ \Phi_{(t_1,..,t_k)}(x)) \qquad \forall x \in U,\ \forall (t_1,..,t_k) \in \mathbb{R}^k.$$

A demonstração do teorema seguinte pode ser lida em [Tem] no teorema 5.1,

Teorema 4.12 *Cada função $f \in L^1(M)$ tem uma única represenração da forma*

$$f_1 + f_2, \qquad f_1 \in I \text{ e } f_2 \in W.$$

Isto é, $L^1(M) = I \oplus W$.

Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Consideremos uma seqüência de k-retângulos

$$\{T_n = [0, T_n^1] \times .. \times [0, T_n^k]\}_{n \in \mathbb{N}}$$

tal que para todo $i \in \{1,..,k\}$ temos $\lim_{n\to\infty} T_n^i = 0$. Seja $f \in L^1(M)$ e definamos a seqüência de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(M)$ tal que para cada $p \in M$ temos

$$\begin{aligned} f_n(p) &= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}). \\ &= \frac{1}{T_n^1 T_n^2 .. T_n^k} \int_0^{T_n^k} \int_0^{T_n^{k-1}} .. \int_0^{T_n^1} f(\Phi_{(t_1,..,t_k)}(p)) dt_1 dt_2 .. dt_k, \end{aligned}$$

onde $\vec{t} = (t_1,..,t_k)$.

Teorema 4.13 *A seqüência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma função $\tilde{f}$ em $L^1(M)$, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M |f_n - \tilde{f}| vol = 0. \tag{4-7}$$

Alem disso, esta função $\tilde{f}$ independe da escolha da seqüência $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ escolhida e satisfaz

$$\int_M \tilde{f} vol = \int_M f vol. \tag{4-8}$$

Prova: Seja $f \in \widetilde{W}$. Neste caso devemos mostrar que para todo $p \in M$ se satisfaz $\lim_{n\to\infty} |f_n(p)| = 0$. Fixemos $\vec{t'} = (t'_1,..,t'_k) \in \mathbb{R}^k$. Será suficiente mostrar para o caso $f(p) = \chi_A(p) - \chi_A(\Phi_{(t'_1,..,t'_k)}(p))$, onde A é um subconjunto mensurável em M e χ_A é a função característica de A. Seja

$$D_p = \{(t_1, .., t_k) \in \mathbb{R}^k;\ \Phi_{(t_1,..,t_k)}(p) \in A\}.$$

Por ser Φ continua (suave) temos que D_p é um conjunto mensurável em $\mathbb{R}^k$ para todo p em M. Notemos que $\chi_A(\Phi_{(t_1,..,t_k)}(p)) = \chi_{D_p}(t_1, ..t_k)$. Logo

$$\begin{aligned}
|f_n(p)| &= |\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t})| \\
&= |\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} (\chi_{D_p}(\vec{t}) - \chi_{D_p}(\vec{t'} + \vec{t})) d\mu(\vec{t})| \\
&= \left| \frac{\mu(D_p \cap T_n) - \mu((D_p - \vec{t'}) \cap T_n)}{\mu(T_n)} \right| \\
&= \left| \frac{\mu(D_p \cap T_n) - \mu(D_p \cap (\vec{t'} + T_n))}{\mu(T_n)} \right| \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{(T_n^1 + t'_1)..(T_n^{i-1} + t'_{i-1}) t'_i (T_n^{i+1} + t'_{i+1})..(T_n^k + t'_k)}{T_n^1 T_n^2 .. T_n^k}.
\end{aligned}$$

Portanto $|f_n(p)| \to 0$. Agora, suponha que $f \in W$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $f_\epsilon \in \widetilde{W}$ tal que $\int_M |f(p) - f_\epsilon(p)| vol = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_{p\in M} |f_n(p)| vol(p) &\leq \int_M \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} |f(\Phi_{\vec{t}}(p))|\, d\mu(\vec{t}) \right) vol(p) \\
&\leq \int_M \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} |f(\Phi_{\vec{t}}(p)) - f_\epsilon(\Phi_{\vec{t}}(p))|\, d\mu(\vec{t}) \right) vol(p) + \\
&\quad + \int_M \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} |f_\epsilon(\Phi_{\vec{t}}(p))|\, d\mu(\vec{t}) \right) vol(p) \\
&= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} \left(\int_M |f(\Phi_{\vec{t}}(p)) - f_\epsilon(\Phi_{\vec{t}}(p))|\, vol(p) \right) d\mu(\vec{t}) + \\
&\quad + \int_M \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} |f_\epsilon(\Phi_{\vec{t}}(p))|\, d\mu(\vec{t}) \right) vol(p).
\end{aligned}$$

Logo, para n suficientemente grande temos $\int_{p\in M} |f_n(p)| vol(p) \leq 2\epsilon$. Como ϵ é arbitrário, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_M |f_n| vol = 0.$$

Agora, seja $f \in L^1(M)$. O teorema 4.12 garante que existem $\tilde{f} \in I$ e $h \in W$

tal que $f = \tilde{f} + h$. Observemos que

$$\begin{aligned}
f_n(p) &= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{T_n} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}) \\
&= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{T_n} \tilde{f}(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}) + \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{T_n} h(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}) \\
&= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{T_n} \tilde{f}(p) d\mu(\vec{t}) + h_n(p) \\
&= \tilde{f}(p) + h_n(p)
\end{aligned}$$

para todo $p \in U$, onde U é o conjunto em M no qual a função $\tilde{f} \in I$ é invariante pela ação. Lembremos que U tem complemento em M com medida nula, logo

$$\begin{aligned}
\int_{p\in M} |f_n(p) - \tilde{f}(p)| vol(p) &= \int_{p\in U} |f_n(p) - \tilde{f}(p)| vol(p) \\
&= \int_{p\in U} |\tilde{f}(p) + h_n(p) - \tilde{f}(p)| vol(p) \\
&= \int_{p\in U} |h_n(p)| vol(p) \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Portanto f_n converge a $\tilde{f}$ no espaço $L^1(M)$ e observamos que $\tilde{f}$ independe da sequencia $\{T_n\}$ escolhida, mostrando assim (4-7). Agora, mostraremos (4-8) lembrando que Φ é uma ação que preserva vol. Assim

$$\begin{aligned}
\int_{p\in M} f_n(p) vol(p) &= \int_{p\in M} \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}) \right) vol(p) \\
&= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} \left(\int_{p\in M} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) vol(p) \right) d\mu(\vec{t}) \\
&= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} \left(\int_{p\in M} f(p) vol(p) \right) d\mu(\vec{t}) \\
&= \left(\int_{p\in M} f(p) vol(p) \right) \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} d\mu(\vec{t}) \\
&= \int_{p\in M} f(p) vol(p). \qquad \square
\end{aligned} \tag{4-9}$$