3
Os Operadores div e rot

Em $\mathbb{R}^3$, para todo campo vetorial X a divergência e o rotacional deste campo podem ser calculados fazendo uso do vetor gradiente $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ e do produto interno $\cdot$ e do produto vetorial $\times$, respectivamente. No capítulo 1 as definições do produto interno $\cdot$ e produto vetorial $\times$ em $\mathbb{R}^3$ foram estendidas para qualquer espaço vetorial pelo que neste capítulo estenderemos as definições de divergência e rotacional para k-campos numa variedade M.

3.1
Operadores Associados a K-Campos em M

Seja M^n uma variedade riemanniana . Para cada $p \in M$ temos que $T_p(M)$, o espaço tangente a M no ponto p, é um espaço vetorial. Definamos $T_k(M) := \bigcup_{p\in M} \Lambda_k(T_pM)$. A variedade M induz naturalmente sobre $T_k(M)$ uma estrutura diferenciável de dimensão $n + \binom{n}{k}$. A saber, sejam U uma vizinhança coordenada em M e $(x_1, .., x_n)$ seu sistema de coordenadas. Para cada $p \in U$ consideremos em $T_p(M)$ a base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), .., \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ de vetores tangentes coordenados e seja $\pi : T_k(M) \rightarrow M$ a projeção canônica de $T_k(M)$, isto é, $\pi(v) = p, sev \in \Lambda_k(T_pM)$. Então $\bigcup_{p\in U} \Lambda_k(T_pM)$ será uma vizinhança coordenada em $T_k(M)$ com sistema de coordenadas $(x_1 \circ \pi, .., x_n \circ \pi, a_{12...k}, ..., a_{(n-k+1)...n})$ definidas por

$$\sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} a_{i_1 i_2..i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p)\wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(p) \mapsto (x_1(p), ..., x_n(p), a_{12...k}, .., a_{(n-k+1)...n}).$$

A variedade $T_k(M)$ é chamado de k-fibrado tangente de M. Cada aplicação suave $X : M \rightarrow T_k(M)$ que satisfaz $\pi \circ X = id$ é chamado de k-campo vetorial suave em M. Localmente, no sistema de coordenadas $(x_1, ..x_n)$, escreveremos um k-campo X como

$$X(p) = \sum_{1\leq i_1<..<i_k\leq n} f_{i_1..i_k}(p)(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}})(p).$$

Denotaremos por $E_k(M)$ o espaço dos k-campos vetoriais em M. A variedade M é dita orientável se existe um n-campo suave V tal que $V(p) \neq 0$, $\forall p$. Seja $N = \dfrac{V}{\|V\|}$ o n-campo unitário em $E_n(M)$. Observemos que para cada $p \in M$ a componente de $\Lambda_n(T_pM)$ que contém $N(p)$, define uma orientação $\mathcal{O}_p$ para T_pM. Neste sentido, diremos que N define uma orientação para M ou que M é uma variedade orientada com orientação $\mathcal{O}$. Se M é conexa então somente existem duas orientações possíveis. Como N define a orientação, então para todo $p \in M$ temos que $*N(p) = \|N(p)\| = 1$. Localmente, o sistema de coordenadas $(x_1, .., x_n)$ será dita coerente com a orientação sempre que os vetores tangentes coordenados $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}(p), .., \dfrac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ forem uma base positiva de T_pM.

Analogamente, para $E^k(M) := \bigcup\limits_{p\in\ M} \Lambda_k((T_pM)^*)$ podemos induzir naturalmente uma estrutura diferenciável que será chamado de k-fibrado cotangente de M. Chamaremos de k-forma diferenciável a toda aplicação suave da forma $\omega : M \to T^k(M)$ tal que $\omega(p) \in \Lambda_k((T_pM)^*)$. Localmente, no sistema de coordenadas $(x_1, .., x_n)$, sendo $\Lambda_k((T_pM)^*)$ dual a $\Lambda_k(T_pM)$ e considerando $\{dx_1(p), .., dx_n(p)\}$ a base dual de $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}(p), .., \dfrac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ escreveremos uma k-forma diferenciável ω como

$$\omega_p = \sum_{1\leq i_1<..<i_k\leq n} f_{i_1..i_k}(p)(dx_{i_1}dx_{i_2}..dx_{i_k})_p,$$

onde o produto $\wedge$ está implícito na igualdade acima, isto é, $(dx_{i_1}dx_{i_2}..dx_{i_k})_p := (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge .. \wedge dx_{i_k})_p$. O espaço das k-formas diferenciáveis em M será denotado por $E^k(M)$.

Seja $(x_1, .., x_n)$ qualquer sistema de coordenandas em M. Para cada $f : M \to \mathbb{R}$ suave definimos o diferencial de f como a 1-forma df que tem representação local

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Em geral, para cada k-forma α, localmente $\alpha = \sum\limits_{1\leq i_1<..<i_k\leq n} f_{i_1..i_k} dx_{i_1}..dx_{i_k}$, definimos o diferencial de α como a $(k+1)$-forma $d\alpha$ que tem representação local

$$d\alpha = \sum_{1\leq i_1<..<i_k\leq n} (df_{i_1..i_k}) dx_{i_1}..dx_{i_k}.$$

Definição 3.1 *A aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rcl} \wedge \ : \ E_i(M) \times E_j(M) & \to & E_{i+j}(M) \\ (X,Y) & \mapsto & X \wedge Y, \quad (X \wedge Y)(p) = X(p) \wedge Y(p) \end{array}$$

é chamado de produto exterior de k-campos. A álgebra dos k-campos vetoriais para todo k será denotada por $E(M)$. Analogamente, podemos definir o produto exterior de k-formas diferenciáveis

Seja g a métrica riemanniana em M. A métrica restrita a T_pM será identificada por g_p. A extensão de g_p a $\Lambda(T_pM)$ também será denotada por g_p. Sejam X e Y k-campos vetoriais em M. Definiremos a função $g(X,Y)$

$$g(X,Y)(p) = g_p(X(p), Y(p)), \quad \forall p \in M \tag{3-1}$$

Definição 3.2 *Seja $X \in E_k(M)$. A k-forma $j(X)$ definida por $j(X)(p) = j(X(p))$ será chamada de k-forma associada a X. A $(n-k)$-forma $j(*X)$ será chamada a $(n-k)$-forma associada a X. Em particular se $f \in \Lambda_0(M) = C^\infty(M)$ então $j(f) = f$.*

Seja N o n-campo unitário que define a orientação. Chamaremos a $j(N)$ a forma de volume em M a qual será denotada por vol. Definamos para cada $X \in E_k(M)$ a $(n-k)$-forma $i_X vol$ tal que para todo $p \in M$ temos $(i_X vol)_p = i_{X(p)} vol_p$ e notemos por (2-22) que

$$i_X vol = j(*X), \quad \forall X \in E_k(M). \tag{3-2}$$

Exemplo 3.3 *Seja M domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^5$. Considere $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \in \vartheta$. Seja $X = f_{12} e_1 \wedge e_2 + f_{24} e_2 \wedge e_4 \in E_2(\Omega)$. Então*

$$\begin{array}{rcl} j(X) & = & f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{24} dx_2 \wedge dx_4 \in E^2(\Omega) \\ *X & = & f_{12} e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 - f_{24} e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \in E^3(\Omega) \\ j(*X) & = & f_{12} dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + f_{24} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 \in E^3(\Omega) \end{array}$$

Proposição 3.4 *Sejam M uma variedade orientada, $(x_1, .., x_n)$ um sistema de coordenadas em M coerentes com a orientação, $\{\frac{\partial}{\partial x_i}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ os vetores tangentes coordenados e $\{dx_1, .., dx_n\}$ sua base dual. Definamos o valor $\bar{g} := \|\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n})\|^2 = det[g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})]$. Então*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} = \sqrt{\bar{g}} N \tag{3-3}$$

$$vol = \sqrt{\bar{g}} dx_1 dx_2 .. dx_n \tag{3-4}$$

Prova : Sendo $N(p)$ base de $\Lambda_n(T_pM)$ então $(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n})(p) = f(p)N(p)$. Como $*N = 1$ então $*((\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n})(p)) = f(p)$. Sendo $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ base positiva então $*(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}) > 0$. Logo, por (2-14) temos que $*(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}) = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\| = \sqrt{g}$. Por tanto $f = \sqrt{g}$, mostrando assim (3-3).

Por outro lado, sendo vol_p base de $\Lambda_n((T_pM)^*)$ temos que

$$(dx_1..dx_n)_p = h(p)vol_p.$$

Como vol_p é base dual de $N(p)$ e $(dx_1..dx_n)_p$ é base dual de $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ então

$$\begin{aligned} h(p) &= (dx_1..dx_n)_p(N) \\ &= (dx_1..dx_n)_p(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Por tanto, $vol = \sqrt{g}\ dx_1\ ..\ dx_n$. $\square$.

Para cada função suave $f : M \to \mathbb{R}$ podemos definir o 1-campo $grad(f) \in E_1(M)$ pela igualdade

$$df(X) = g(X, grad(f)) \quad \forall X \in E_1(M),$$

onde df é a diferencial de f. Este 1-campo $grad(f)$ é chamado de gradiente de f. Obsevemos que $g(X, grad(f)) = j(grad(f))(X)$. Logo $df = j(grad(f))$ Estenderemos esta definição de gradiente para $E(M)$.

Definição 3.5 *O operador gradiente é a aplicação* $\nabla : E_k(M) \to E_{k+1}(M)$ *tal que cada k-campo* X *é aplicado no (k+1)-campo*

$$\nabla X = j^{-1}dj(X). \tag{3-5}$$

Proposição 3.6 *Sejam* $f \in \Lambda_0(M) = C^\infty(M)$, $X \in E_k(M)$ *e* $Y \in E(M)$

então

$$\nabla(f) = grad(f) \tag{3-6}$$
$$dj(X) = j(\nabla X). \tag{3-7}$$
$$\nabla(X \wedge Y) = (\nabla X) \wedge Y + (-1)^k X \wedge (\nabla Y) \tag{3-8}$$

Prova: Sendo f uma função temos $f \in E_0(M)$, logo $j(f) = f$. Assim $\nabla f = j^{-1}(d(f))$. Disso e pela definição de j temos para $Y \in E_1(M)$

$$g(\nabla(f), Y) = g(j^{-1}d(f), Y) = jj^{-1}d(f)(Y) = d(f)(Y),$$

mostrando assim (3-6). Agora, (3-7) segue da definição

$$j(\nabla X) = j(j^{-1}dj(X)) = dj(X).$$

Por outro lado, sendo j e j^{-1} homomorfismos de álgebras e o diferencial d uma antiderivação temos

$$\begin{aligned}
\nabla(X \wedge Y) &= j^{-1}(dj(X \wedge Y)) \qquad (\text{ definição de } \nabla\ ) \\
&= j^{-1}(\ d(j(X) \wedge j(Y))\ ) \\
&= j^{-1}(\ dj(X) \wedge j(Y) + (-1)^k\ j(X) \wedge dj(Y)\ ) \\
&= j^{-1}(dj(X)) \wedge j^{-1}(j(Y)) + (-1)^k\ j^{-1}(j(X)) \wedge j^{-1}(dj(Y))
\end{aligned}$$

Diante disto e por definição de ∇ temos que

$$\nabla(X \wedge Y) = (\nabla X) \wedge Y + (-1)^k X \wedge (\nabla Y). \quad \square$$

3.2
Os operadores rot e div sobre $E(M)$

Sejam M^n variedade riemanniana orientada, com métrica g.

Definição 3.7 *Sejam s e k inteiros positivos tal que $s+k+1 = n$. Definamos os operadores*

$$\begin{aligned}
rot \ :\ E_k(\Omega) &\to E_{n-k-1}(\Omega) \\
X &\mapsto rot(X) = (-1)^{s(k+1)} * (\nabla X). \\
div \ :\ E_k(\Omega) &\to E_{k-1}(\Omega) \\
X &\mapsto div(X) = (-1)^{s(k+1)} * \nabla(*X).
\end{aligned}$$

Os operadores rot e div serão chamados de operador rotacional e operador divergência, respectivamente. Observemos que as definições destes operadores implicam

$$rot(U \times V) = div(U \wedge V), \quad \forall U \in E_k(M),\ \forall V \in E_s(M) \tag{3-9}$$

Agora, mostraremos um resultado que relaciona as formas associadas a k-campos com os operadores definidos acima.

Proposição 3.8 *Seja $X \in E_k(M)$. Então*

$$dj(*X) = i_{div(X)}vol. \tag{3-10}$$
$$dj(X) = i_{rot(X)}vol. \tag{3-11}$$

Prova: Por (3-7) e (2-13) temos

$$\begin{aligned} d(j(*X)) &= j(\nabla * X) \\ &= i_{(-1)^{(k+1)(n-k-1)}*\nabla(*X)}vol. \end{aligned}$$

Agora, por (2-22) e definiçào de div temos

$$\begin{aligned} d(j(*X)) &= (-1)^{(n-k+1)(k-1)}j(**\nabla(*X))vol \\ &= i_{div(X)}vol, \end{aligned}$$

mostrando assim (3-10). Por outro lado, por (3-7) e (2-13) temos

$$\begin{aligned} d(j(X)) &= j(\nabla X) \\ &= j((-1)^{(k+1)(n-k-1)} * (*(\nabla X))). \end{aligned}$$

Agora, por (2-22) e definiçào de rot temos

$$\begin{aligned} d(j(X)) &= i_{(-1)^{(k+1)(n-k-1)}*(\nabla X)}vol \\ &= i_{rot(X)}vol. \qquad \square \end{aligned}$$

Proposição 3.9 *Sejam X um k-campo sobre M e $f \in C^\infty$. Então*

$$div(fX) = fdiv(X) + (-1)^{s(k+1)}\nabla(f) \cdot X. \tag{3-12}$$

Em particular, se $k = 1$ então

$$div(fX) = fdiv(X) + g(\nabla(f), X). \tag{3-13}$$

Prova: Por definição de div, linearidade de $*$, (3-8) e definição do produto $\cdot$ temos que

$$\begin{aligned} div(fX) &= (-1)^{s(k+1)} * \nabla * (fX) \\ &= (-1)^{s(k+1)} * \nabla(f * X) \\ &= (-1)^{s(k+1)} * [\nabla(f) \wedge (*X) + (-1)^{s(k+1)}(*f\nabla * X)] \\ &= (-1)^{s(k+1)} * (\nabla(f) \wedge (*X)) + f[(-1)^{s(k+1)} * \nabla * X)] \\ &= (-1)^{s(k+1)}\nabla(f) \cdot X + f div(X). \qquad \square \end{aligned}$$

Proposição 3.10 *Seja* $(x_1, x_2, .., x_n)$ *sistema de coordenadas coerentes com a orientação de* M. *Definamos* $\bar{g} := \|\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}\|^2 = det[g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})]$. *Então*

$$div(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_i} \tag{3-14}$$

$$div(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}) = (-1)^k \sum_j (-1)^j div(\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge .. \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}} .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \tag{3-15}$$

Prova: Lembremos que $\{dx_1, .., dx_n\}$ é a base dual a $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ e que $dx_1 \wedge .. \wedge dx_n = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} vol$. Seja N o n-campo unitario que define a orientação de M. Então, por (2-20) e (2-21) temos que

$$\begin{aligned} div(\frac{\partial}{\partial x_1}) &= *\nabla * \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &= *j^{-1} d(j * \frac{\partial}{\partial x_1}) \\ &= *j^{-1} d(\sqrt{\bar{g}} dx_2..dx_n) \\ &= *j^{-1}(\frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_1} dx_1 dx_2..dx_n) \\ &= *j^{-1}(\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_1} vol) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_1} * N = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} div(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_k}) &= (-1)^{(k+1)(n-k-1)} * \nabla * (\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_k}) \\ &= (-1)^{(k+1)(n-k-1)} * j^{-1} d(j * (\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_k})) \\ &= (-1)^{(k+1)(n-k-1)} * j^{-1} d(\sqrt{g} dx_{k+1} .. dx_n) \\ &= (-1)^{(k+1)(n-k-1)} * j^{-1} (\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i} dx_1 dx_{k+1} .. dx_n) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \widehat{\frac{\partial}{\partial x_1}} .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= (-1)^k \sum_{i=1}^{k} (-1)^i div(\frac{\partial}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \widehat{\frac{\partial}{\partial x_1}} .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

No caso geral, podemos considerar $\{j_1, j_2, j_3, .., j_n\}$ permutação positiva de $\{1, 2, .., n\}$ tal que $i = j_1$ no primeiro caso e $i_r = j_r$, $\forall r \in \{1, .., k\}$, no segundo caso. $\square$

Exemplo 3.11

Sejam Ω a n-variedade $\mathbb{R}^n$, a base canônica $\{e_1, .., e_n\}$ e $\{dx_1, .., dx_n\}$ a base dual. Suponha que $N = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_n$ define a orientação de Ω . Notemos que

$$\nabla e_i = j^{-1} dj(e_i) = j^{-1} ddx_i = j^{-1} d^2 x_i = 0, \ \forall i.$$

Seja $X = \sum_{i=1}^{n} f_i \ e_i$ então

$$\begin{aligned} a) \quad \nabla \ X &= \sum_{i=1}^{n} \nabla(f_i \ e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \nabla(f_i) \wedge e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} e_j] \wedge e_i \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} [\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}] e_i \wedge e_j \\ b) \quad rot \ X &= (-1)^{(n-2).2} * (\nabla X) \\ &= *(\sum_{1 \le i < j \le n} \{\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\} e_i \wedge e_j) \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j-1} \{\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\} e_1 \wedge .. \widehat{e_i} .. \widehat{e_j} .. \wedge e_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad div\ (X) &= \sum_{i=1}^{n} div(f_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\nabla(f_i)\cdot e_i + f_i div(e_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} e_j]\cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad \square \end{aligned}$$

Observação 3.12 *Se X é um campo vetorial em M então $div(X)$ é a divergência usual em M. Se $M \subset \mathbb{R}^3$ então $div(X)$ e $rot(X)$ são a divergência e o rotacional usual em $\mathbb{R}^3$.*

Sejam U e V campos vetoriais em M . Seja $(x_1, .., x_n)$ um sistema de coordenadas locais de M, onde localmente $U = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então localmente podemos escrever o colchete de Lie de U e V como

$$[U, V] = \sum_{i=1}^{n} \{g(\nabla v_i, U) - g(\nabla u_i, V)\} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3-16}$$

Em particular, se $U = f\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = h\frac{\partial}{\partial x_j},\ i < j$, então

$$[U, V] = g(\nabla h, U)\frac{\partial}{\partial x_j} - g(\nabla f, V)\frac{\partial}{\partial x_i} = (\nabla h \cdot U)\frac{\partial}{\partial x_j} - (\nabla f \cdot V)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Teorema 3.13 *Sejam U e V campos vetoriais em M. Então*

$$div(U \wedge V) = -(divU)V + (divV)U - [U, V] \tag{3-17}$$

Prova:

Primeiro, provaremos para $U = f\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = h\frac{\partial}{\partial x_j},\ i < j$. Então por (3-12), (3-15), (2-25),(3-8), (3-13) e (3-16) temos que

$$\begin{aligned}
div(U \wedge V) &= div(fh\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= fhdiv(\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}) + (-1)^{(n-3)3}\nabla(fh)\cdot(\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= -fhdiv(\frac{\partial}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial x_j} + fhdiv(\frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i}) - \\
&\quad (\nabla(fh).\frac{\partial}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial x_j} + (\nabla(fh).\frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= -fdiv(\frac{\partial}{\partial x_i})V + hdiv(\frac{\partial}{\partial x_j})U - (\nabla f\cdot\frac{\partial}{\partial x_i})V - (\nabla h\cdot U)\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&\quad +(\nabla f\cdot V)\frac{\partial}{\partial x_i} + (\nabla h\cdot\frac{\partial}{\partial x_j})U \\
&= -fdiv(\frac{\partial}{\partial x_i})V + hdiv(\frac{\partial}{\partial x_j})U - (\nabla f\cdot\frac{\partial}{\partial x_i})V - (\nabla h).U\frac{\partial}{\partial x_j} + \\
&\quad +(\nabla f.V)\frac{\partial}{\partial x_i} + (\nabla h.\frac{\partial}{\partial x_j})U \\
&= -(fdiv\frac{\partial}{\partial x_i} + \nabla f\cdot\frac{\partial}{\partial x_i})V + (hdiv\frac{\partial}{\partial x_j} + \nabla h.\frac{\partial}{\partial x_j})U - \\
&\quad -(\nabla h).U\frac{\partial}{\partial x_j} + (\nabla f.V)\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= -div(U)V + div(V)U - [U,V].
\end{aligned}$$

Agora, provaremos para $U = \sum_i f_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i U_i$ e $V = \sum_j h_j\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j V_j$

$$\begin{aligned}
div(U \wedge V) &= \sum_{i,j} div(U_i \wedge V_j) \\
&= \sum_{i,j}\{-div(U_i)V_j + div(V_j)U_i - [U_i,V_j]\} \\
&= -div(\sum_i U_i)(\sum_j V_j) + div(\sum_j V_j)(\sum_i U_i) - [\sum_i U_i, \sum_j V_j] \\
&= -div(U)V + div(V)U - [U,V]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolário 3.14 *Seja* $V = V^1 \wedge V^2 \wedge .. \wedge V^k$ *tal que* $V^i \in E_1(M)$, $\forall i$. *Então*

$$\begin{aligned}
div(V) &= (-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i div(V^i)\ V^1 \wedge ..\widehat{V^i}.. \wedge V^k\ + \\
&\quad (-1)^k\sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j}[V^i,V^j] \wedge V^1 \wedge ..\widehat{V^i}..\widehat{V^j}.. \wedge V^k. \qquad (3\text{-}18)
\end{aligned}$$

Prova:
Procedendo como na demonstração do teorema anterior. □

Observação 3.15 *Sejam* $V^i, i = 1,..,k$ *campos vetoriais em* M *tal que* $div(V^i) = 0$ *e* $[V^i, V^j] = 0$ *para todo* i, j. *Então, pelo corolário anterior*

$$div(V^1 \wedge .. \wedge V^k) = 0 \quad (3\text{-}19)$$

No caso de M for um domínio $\Omega^n \subset \mathbb{R}^n$, com métrica igual ao produto interno usual $\langle \ , \ \rangle$, a base canônica $\{e_1, .., e_n\}$ podem ser consideradas campos vetoriais em M ortonormais entre si. Procedendo como no exemplo 3.11 podemos mostrar que

$$div(e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) = 0, \ \forall \{i_1, .., i_k\} \in \{1, .., n\} \quad (3\text{-}20)$$

Logo a propriedade (3-12) garante que a divergência de um k-campo possa ser calculado derivando os coeficientes dos k-campos que estão representados como combinação linear dos $e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}$. A saber, seja $U = \sum_{i=1}^{n} f_i e_1$ então pelo exemplo 3.11 temos $div(U) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, logo $div(fU) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f f_i)}{\partial x_i}$, onde f é uma função suave de M. Em geral, sejam os campos $U^i = \sum_{j=1}^{n} f^i_j e_j, \ i = 1, .., k$, em $E_1(M)$ então por (3-12) e (3-20)

$$\begin{aligned} div(U^1 \wedge .. \wedge U^k) &= div(\sum i_1, ..i_k = 1^n f^1_{i_1} .. f^k_{i_k} e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1,..i_k=1}^{n} (\nabla (f^1_{i_1} .. f^k i_k)) \cdot (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}). \end{aligned}$$

Logo, por (3-8), (2-25) e pelo valor da divergência para 1-campos temos

$$\begin{aligned} div(U^1 \wedge .. \wedge U^k) &= \sum_{i_1,..i_k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f^1_{i_1} .. f^k i_k}{\partial x_i} e_i \right) \cdot (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1,..i_k=1}^{n} (-1)^{nk} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\left(\frac{\partial f^1_{i_1} .. f^k i_k}{\partial x_i} e_i \right) \cdot e_{i_j} \right) e_{i_1} \wedge .. \widehat{e_{i_j}} .. \wedge e_{i_k} \\ &= (-1)^{nk} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_1,..i_k=1}^{n} \left(\frac{\partial f^1_{i_1} .. f^k i_k}{\partial x_{i_j}} \right) e_{i_1} \wedge .. \widehat{e_{i_j}} .. \wedge e_{i_k} \\ &= (-1)^{nk} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_1,..\widehat{i_j}..i_k=1}^{n} div(f^1_{i_1} .. \widehat{f^j_{i_j}} .. f^k_{i_k} V^j) e_{i_1} \wedge .. \widehat{e_{i_j}} .. \wedge e_{i_k}. \square \end{aligned}$$

(3-21)

Portanto, $V(x,y) = \sum_{1\leq<i_1<..<i_k\geq n} f_{i_1..i_k}(x,y)e_1 \wedge .. \wedge e_k$ pode ser vista tanto como um k-campo na variável x ou um k-campo na variável y logo podemos calcular sua divergência tanto na variavel x como na variável y.

Corolário 3.16 *Seja domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seja $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\triangle f = div(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}$ o laplaciano de f. Sejam $V = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ e $\{U^i = \sum_{j=1}^{n} u_j^i e_j\}_{i=1}^k$ 1-campos vetoriais em Ω. Definamos o k-campo vetorial $U = U^1 \wedge .. \wedge U^k$. Então*

$$div_x((\nabla_x f(x-y)) \wedge V(y)) \;=\; -(\triangle_y f)U - \sum_i div_y(f_{y_i}V)e_i + (div_y(V))\nabla_y f(x-y) \tag{3-22}$$

$$\begin{aligned} div_x((\nabla_x f(x-y)) \wedge U(y))) \;=\; & (-1)^k(\triangle_y f)\; U - (-1)^{k+n(k-1)}\nabla_y f \wedge div_y(U) + (-1)^{n+k} \\ & \sum_{r,j,j_1,..\widehat{j_r}..,j_k}^{k,n,n,..,n} (-1)^r div_y\left(\frac{\partial f}{\partial y_j} u_{j_1}^1 .. \widehat{u_{j_r}^r} .. u_{j_k}^k V^r\right) e_j \wedge e_{j_1} \wedge .. \widehat{e_{j_r}} .. \wedge e_{j_k}. \end{aligned} \tag{3-23}$$

Prova: Notemos que $\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial y_i \partial y_j}$, $\forall i,j$. Disso, por (3-17), notando que V independe dos x_i, por definiçao de laplaciano e por definição do colchete de lie temos que

$$\begin{aligned} div_x((\nabla_x f(x-y)) \wedge V(y)) &= -(\triangle_x(f))V - [\nabla_x f, V]_x \\ &= -(\triangle_x(f))V - \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_x(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \cdot V\right) e_i \\ &= -(\triangle_y(f))V - \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla(\frac{\partial f}{\partial y_i}) \cdot V\right) e_i \end{aligned}$$

Agora por (3-12) temos que

$$\begin{aligned} div_x((\nabla_x f(x-y)) \wedge V(y)) &= -(\triangle_y(f))V - \sum_{i=1}^{n}\{div\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)V) - \frac{\partial f}{\partial y_i} div(V)\}e_i \\ &= -(\triangle_y(f))V - \sum_{i=1}^{n} div\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}V\right) e_i + (div(V))\nabla_y f. \end{aligned}$$

Mostrando assim (3-22). Agora mostraremos (3-23): Seja $U = U^1 \wedge .. \wedge U^k \in E_k(M)$ e os $(k-1)$-campos $A^i = U^1 \wedge ..\widehat{U^i}.. \wedge U^k$. Por (3-17), definiçao de laplaciano e notando que U independe dos x_i e que $\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial y_i \partial y_j}$

temos que

$$\begin{aligned} div_x(\nabla_x(f)\wedge U) &= (-1)^k(\triangle_x(f))U-(-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\nabla_x f,U^i]_x\wedge A_i \\ &= (-1)^k(\triangle_x(f))U-(-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\{\sum_{j=1}^{n}\left(\nabla_x(\frac{\partial f}{\partial x_j})\cdot U^i\right)e_j\}\wedge A_i \\ &= (-1)^k(\triangle_y(f))U+(-1)^k\sum_{j=1}^{n}e_j\wedge\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left(\nabla_y(\frac{\partial f}{\partial y_j})\cdot U^i\right)A_i\right). \end{aligned}$$

Agora, por (2-25) e definição de A_i temos que

$$div_x(\nabla_x(f)\wedge U)=(-1)^k(\triangle_y(f))U+(-1)^k(-1)^{n(k-1)}\sum_{j=1}^{n}e_j\wedge\nabla_y(\frac{\partial f}{\partial y_j})\cdot U.$$

Por (3-12) e por (3-21) temos para $A:=\sum_{j=1}^{n}e_j\wedge\nabla_y(\frac{\partial f}{\partial y_j})\cdot U$ que

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{n}e_j\wedge\left(div(\frac{\partial f}{\partial y_j}U)-\frac{\partial f}{\partial y_j}div(U)\right) \\ &= (-1)^{nk}\sum_{j,r=1}^{n,k}(-1)^r\sum_{j_1,..\widehat{j_r}..,j_k}^{n}div\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}u^1_{j_1}..\widehat{u^r_{j_r}}..u^k_{j_k}V^r\right)e_j\wedge e_{j_1}\wedge..\widehat{e_{j_r}}..\wedge e_{j_k} \\ &\quad -(\nabla_y f)\wedge div(U). \end{aligned}$$

Isto mostra (3-23). □