PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

José Luis Lizarbe Chira

Índices de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas Compactas

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Paul Schweitzer

Rio de Janeiro
abril de 2005

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

José Luis Lizarbe Chira

Índices de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas Compactas

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paul Schweitzer
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Dethang Zhou
UFF

Prof. Sebastião Marcos Antunes Firmo
UFF

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez
PUC-Rio

Prof. Derek Douglas Jack Hacon
PUC-Rio

Prof. Paulo Henrique Cabido Gusmão
UFF

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 04 de abril de 2005

José Luis Lizarbe Chira

Graduação: Matemática-Universidad Nacional de Ingenieria-Lima-Perú (1987-1996).
Mestrado: Matemática-Universidade Federal Fluminenense (1997-1999).
Doutorado: Matemática-Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2000-2005).

Ficha Catalográfica

Chira, José Luis Lizarbe

Índices de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas Compactas / José Luis Lizarbe Chira; orientador: Paul Schweitzer. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2005.

v., 88 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Álgebra Exterior. 3. k-Campos Vetoriais. 4. Lei de Biot-Savart. 5. Invariante de Hopf. 6. Ações de $\mathbb{R}^k$. 7. Índice de Enlaçamento assintótico. I. Schweitzer, Paul. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus por ter ficado espiritualmente sempre de meu lado e por ter posto no meu caminho as pessoas certas para que este trabalho fosse realizado.

A minha amada esposa Patricia pela paciência, amor e compreensão nos momentos difiíceis, por seu companherismo no dia a dia e em especial por estar presente na minha vida e por ter me dado o melhor presente da minha vida nosso filho Juan Pablo.

A minha família peruana, pai, irmaõs e sobrinhos pelo carinho, respeito e motivacão que sempre me deram.

A meu orientador Paul pela sua ajuda acadêmica, espiritual e por ter providenciado tudo para que este trabalho desse certo, muito obrigado Paul.

Ao professor Ricardo pela sua ajuda acadêmica nos primeiros períodos do doutorado.

Aos meus amigos Edwin, Rosa, Sumaya e José Barbosa pelo companherismo. A todos os componentes da secretaria do departamento de matemática pela ajuda prestada e em especial para Kreuza e Orlando.

Ao CNPq e à PUC–Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

Chira, José Luis Lizarbe; Schweitzer, Paul. **Índices de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas Compactas**. Rio de Janeiro, 2005. 88p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

V.I. Arnold no seu trabalho "The asymptotic Hopf Invariant and its applications" de 1986, considerou sobre um domínio Ω compacto de $\mathbb{R}^3$ com bordo suave e homología trivial campos X e Y de divergência nula e tangentes ao bordo de Ω e definiu o índice de enlaçamento assintótico $lk(X, Y)$ e o invariante de Hopf associados a X e Y pela integral $I(X, Y) = \int_\Omega \alpha \wedge d\beta$, onde $d\alpha = i_X vol$ e $d\beta = i_y vol$, e mostrou que $I(X, Y) = lk(X, Y)$. Agora, no presente trabalho estenderemos estas definições de índices de enlaçamento assintótico $lk(\Phi, \Psi)$ e de invariante de Hopf $I(\Phi, \Psi)$, onde Φ e Ψ são ações de $\mathbb{R}^k$ e de $\mathbb{R}^s$, $k+s = n-1$, respectivamente de difeomorfismos que preservam volume em Ω^n a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ e mostraremos que $lk(\Phi, \Psi) = I(\Phi, \Psi)$.

Palavras–chave

Álgebra Exterior. k-Campos Vetoriais. Lei de Biot-Savart. Invariante de Hopf. Ações de $\mathbb{R}^k$. Índice de Enlaçamento assintótico.

Abstract

Chira, José Luis Lizarbe; Schweitzer, Paul. **Asymptotic Linking Invariants for $\mathbb{R}^k$-Actions in Compact Riemannian Manifolds**. Rio de Janeiro, 2005. 88p. PhD Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

V.I. Arnold, in his paper "The algebraic Hopf invariant and its applications" published in 1986, considered a compact domain Ω in $\mathbb{R}^3$ with a smooth boundary and trivial homology and two divergence free vector fields X and Y in Ω tangent to the boundary. He defined an asymptotic linking invariant $lk(X,Y)$ and a Hopf invariant associated to X and Y by the integral $I(X,Y) = \int_\Omega \alpha \wedge d\beta$, where $d\alpha = i_X vol$ e $d\beta = i_Y vol$. He showed that $I(X,Y) = lk(X,Y)$. In the present work we extend these definitions of the asymptotic linking invariant $lk(\Phi,\Psi)$ and the Hopf invariant $I(\Phi,\Psi)$, where Φ and Ψ are actions of $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^s$, $k + s = n - 1$, by volume preserving diffeomorphisms, on the closed unit ball Ω^n in $\mathbb{R}^n$, and we show that $lk(\Phi,\psi) = I(\Phi,\Psi)$.

Keywords

Exterior Algebra. k-Vector Field. Law of Biot-Savart. $\mathbb{R}^k$-Actions. Asymptotic Linking Invariant.

Sumário