

2

Dimensionamento Estrutural pelo Método dos Elementos Finitos Através da Utilização de Elementos de Placa

A Mecânica dos Meios Contínuos, e mais especificamente a Teoria da Elasticidade, tem como objetivo formular e estabelecer as equações referentes às condições de equilíbrio, constitutivas e de compatibilidade geométrica associadas a modelos matemáticos que representem adequadamente a situação física de componentes industriais sujeitos a esforços mecânicos. Em uma análise estrutural, deseja-se determinar o campo de deslocamentos, as deformações e/ou as tensões atuantes causadas pela aplicação de esforços externos. A teoria matemática da Elasticidade tem auxiliado na formulação e solução dos problemas e na determinação das variáveis envolvidas na deformação de componentes. Porém, a aplicação de tais soluções a problemas práticos apresenta dificuldades importantes cuja solução analítica é muito laboriosa ou, às vezes, impossível. Isso ocorre porque na análise estrutural, a adequada representação matemática de carregamentos, geometria, condições de contorno, comportamento dos materiais etc., em muitas situações, apresenta-se de forma complexa. Esta dificuldade leva à necessidade de introduzirem-se hipóteses simplificadoras que permitem modelos matemáticos com soluções mais simples.

Por outro lado, é de interesse crescente que modelos numéricos representem com maior eficiência o comportamento de estruturas sob carregamentos gerais. Este interesse está associado à necessidade cada vez maior de entender-se o comportamento de elementos estruturais complexos, o que conduz a tratamentos analíticos mais elaborados, baseados em teorias generalizadas, normalmente representando soluções de difícil acesso ou interpretação.

Desta forma, procura-se desenvolver métodos aproximados que permitam, através da aplicação dos princípios daquelas teorias, a obtenção de soluções numéricas de forma acessível e precisa. Dentre estes métodos, os mais utilizados são

baseados na partição do meio contínuo em subdivisões (a estrutura, o fluido, o gás, etc.).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é seguramente o mais utilizado na prática da engenharia para representar o comportamento e a discretização de meios contínuos. A sua larga utilização se deve também ao fato de poder ser aplicado, além dos problemas clássicos da mecânica estrutural elástico-linear - para os quais foi o método inicialmente desenvolvido -, também na representação dos mais variados problemas de engenharia, entre eles problemas:

- não-lineares, estáticos ou dinâmicos;
- em mecânica dos sólidos;
- em mecânica dos fluidos;
- em eletromagnetismo;
- em transmissão de calor;
- em percolação;
- em campo elétrico;
- em acústica; etc.

Este amplo espectro de aplicações deve-se, essencialmente, à direta analogia física que se estabelece com o seu emprego, entre o sistema físico real considerado (a estrutura em análise) e o modelo utilizado (malha de elementos finitos).

Neste capítulo, apresenta-se a teoria básica do Método dos Elementos Finitos e sua aplicação no desenvolvimento da formulação e na implementação dos elementos de placa, geralmente utilizados na modelagem de estruturas compostas por chapas.

2.1. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos baseia-se na aplicação do Princípio dos deslocamentos virtuais, em que o equilíbrio de um corpo é verificado quando os incrementos dos trabalhos realizados pelas forças internas e externas são iguais. Esta condição, representativa da Primeira Lei da Termodinâmica, quando aplicada a sistemas adiabáticos, é equivalente à imposição da estacionaridade ou à minimização

da Energia Potencial Total de um corpo elástico linear contínuo, resultando na verificação da condição de equilíbrio do corpo.

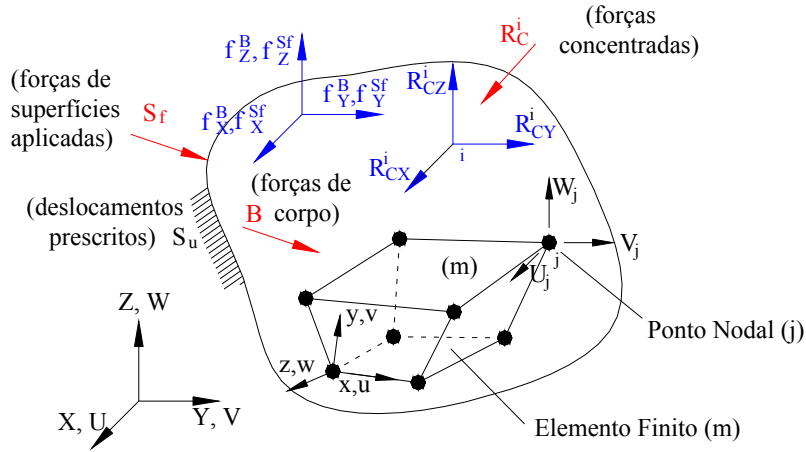


Figura 2.1 – Corpo tridimensional e elemento tridimensional de 8 nós

Considerando-se o corpo deformável de volume V mostrado na Figura 2.1, o Potencial Total é representado pelo funcional π :

$$\pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\tau} dV}_{\text{Termo 1}} - \underbrace{\int_V \mathbf{U}^T \mathbf{f}^B dV - \int_V \mathbf{U}^{SfT} \mathbf{f}^{Sf} dA - \sum \mathbf{U}^{CT} \mathbf{R}^C}_{\text{Termo 2}} \quad (2.1)$$

onde:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}] \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}] \quad (2.3)$$

$$\mathbf{f}^{BT} = [f_X^B \quad f_Y^B \quad f_Z^B] \quad (2.4)$$

$$\mathbf{f}^{SfT} = [f_X^{Sf} \quad f_Y^{Sf} \quad f_Z^{Sf}] \quad (2.5)$$

$$\mathbf{R}_C^i = [F_{CX}^i \quad F_{CY}^i \quad F_{CZ}^i] \quad (2.6)$$

$$\mathbf{U}^T = [U \quad V \quad W] \quad (2.7)$$

são, respectivamente, os vetores deformação (2.2) e tensão (2.3) considerados em um ponto qualquer do corpo; as componentes dos carregamentos externos aplicados ao corpo e classificados em forças de corpo (2.4), forças de superfície (2.5) concentradas (2.6); e o vetor deslocamento de um ponto material do corpo (2.7).

Para um material homogêneo e isotrópico os vetores deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e tensão $\boldsymbol{\tau}$ descritos acima relacionam-se elasticamente pela matriz (simétrica) constitutiva \mathbf{C} :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.8)$$

Os termos 1 e 2 na eq. (2.1) representam, respectivamente, a energia total de deformação do sistema e o potencial total do carregamento externo. Da condição de estacionaridade do funcional π , ou $\delta\pi = 0$, em (2.1) obtém-se a equação de equilíbrio do sistema (2.9).

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \delta\mathbf{U}^T \mathbf{f}^B dV + \int_V \delta\mathbf{U}^{SfT} \mathbf{F}^{Sf} dS + \sum_i \delta\mathbf{U}^{iT} \mathbf{R}_C^i \quad (2.9)$$

Os vetores $\delta\mathbf{U}^T$, $\delta\mathbf{U}^{SfT}$ e $\delta\mathbf{U}^{iT}$ representam as variações dos deslocamentos associados às forças de corpo, de superfície e concentradas, respectivamente, que satisfazem as condições de contorno essenciais (geométricas) e $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T$ é a correspondente variação de deformação do corpo.

Na análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos, o domínio do corpo, mostrado na Figura 2.1, é discretizado em subdomínios (elementos) interconectados por pontos nodais. Os deslocamentos dos nós do elemento são referidos ao sistema global de coordenadas X, Y, Z, convenientemente escolhido para cada geometria. Uma aproximação do campo de deslocamentos de um elemento (m) é então utilizada na forma seguinte:

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z)\mathbf{U}^{(m)} \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{H}^{(m)}(x, y, z)$ é a matriz de interpolação dos deslocamentos no interior do elemento, $\mathbf{U}^{(m)}$ é o vetor cujas componentes representam os deslocamentos associados aos pontos nodais, na forma:

$$\mathbf{U}^{(m)T} = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad \dots \quad U_k \quad V_k \quad W_k] \quad (2.11)$$

Na equação (2.11) k é o número de nós do elemento (m).

Utilizando-se o campo de deslocamentos proposto em (2.10), as deformações associadas à formulação do elemento podem ser obtidas na forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z)\mathbf{U}^{(m)} \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{B}^{(m)}$ é a matriz de transformação deformação-deslocamento em que os coeficientes são expressos em função das grandezas geométricas do elemento (m) e das derivadas dos polinômios de interpolação.

Substituindo-se na eq. (2.9) os campos de deslocamentos e deformações definidos nas eqs. (2.10) e (2.12), para todos os elementos do corpo, e efetuando-se as integrações sobre todo o seu domínio, [13], obtém-se o sistema linear de equações de equilíbrio que governa o comportamento linear elástico da estrutura, expresso por:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (2.13)$$

onde \mathbf{U} é o vetor que lista todos os graus de liberdade dos pontos nodais dos elementos, \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, cuja integração sobre todo o domínio resulta em:

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{K}^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \quad (2.14)$$

e \mathbf{R} é o vetor dos carregamentos nodais equivalentes e concentrados,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_C \quad (2.15)$$

onde os vetores de forças de corpo, de superfície e concentração são obtidos respectivamente como se segue:

$$\mathbf{R}_B = \sum_m \mathbf{R}^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{R}_S = \sum_m \mathbf{R}_S^{(m)} = \sum_m \int_{S^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{f}^C \quad (2.18)$$

A solução da eq. (2.13) é realizada utilizando-se a decomposição de triangulação de Gauss com retro-substituição e os vetores \mathbf{U} solução são substituídos em (2.12) para obter-se os campos das medidas de deformações em cada elemento (m) do domínio. As tensões correspondentes são então avaliadas através da eq. (2.8).

2.2. Formulação dos Elementos de Placa

Na seção anterior, o método dos elementos finitos foi apresentado de forma geral, considerando-se um corpo tridimensional em geral. Embora, teoricamente, qualquer corpo deformável possa ser considerado em uma representação tridimensional, a sua esbeltez (com uma ou duas dimensões muito menor(es) que a(s) demais) permite na grande maioria das situações (e operacionalmente torna-se atrativa) a redução da dimensão do problema resultando em modelos com menor números de variáveis de estado. Esta redução no esforço computacional envolvido está associada à modelagem matemática utilizada, geralmente empregando-se formulações da Teoria da Elasticidade, em que a rotação é introduzida como grau-de-liberdade adicional, característica que representa adequadamente a cinemática de deformação de elementos estruturais esbeltos ou ainda, a redução do estado de tensão ou de deformação representativo. As formulações destes problemas podem ser organizadas segundo a seguinte classificação:

- Treliça;
- Viga;
- Estado plano de tensões, deformações ou axissimétricos;
- Placas;
- Cascas finas ou grossas;
- Tridimensional geral;
- Especiais.

No caso específico do presente estudo em que são consideradas estruturas compostas por chapas, apresentando uniões soldadas, a utilização de elementos de placas é geralmente adequada.

Uma placa pode ser definida como um corpo sólido plano cuja espessura é várias vezes menor que as outras dimensões. Considere-se, pois, uma placa esbelta de espessura t descrita em termos de um sistema de eixos cartesianos ortogonais x , y , z , segundo um triedro direto, tendo como origem um ponto da superfície média. Os esforços resultantes e as componentes de tensão resultantes em um elemento de placa segundo estas teorias também são apresentados na Figura 2.2.

A Figura 2.2(b) ilustra as tensões normais σ_x e σ_y e as tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} . Deve-se ressaltar que a tensão normal σ_z é considerada desprezível em comparação com as outras componentes de tensão, não sendo portanto levada em consideração nas formulações. A Figura 2.2(c) apresenta as componentes de esforços por unidade de espessura: normal T_x , T_y e T_{xy} , cortantes Q_x e Q_y , momentos fletores M_x e M_y e o momento de torção M_{xy} .

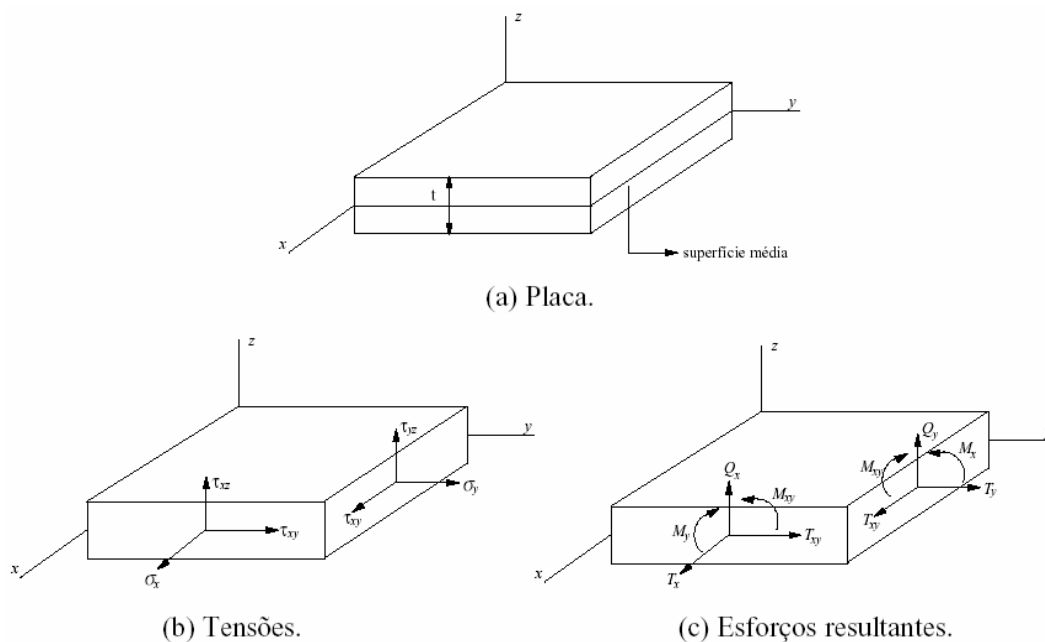


Figura 2.2 – Elemento de placa juntamente com tensões e esforços resultantes

Para o caso de placas esbeltas, em que a espessura é muito menor do que as demais dimensões no plano da superfície de referência, o modelo clássico de Kirchhoff-Love é adequado. A hipótese fundamental considera que segmentos retos, inicialmente normais à superfície de referência da casca, são inextensíveis e mantêm-se normais e retos após a deformação. Assim impõe-se que as deformações angulares na direção transversal à superfície média (γ_{xz} e γ_{yz}) resultam nulas. Esta teoria fornece bons resultados para placas delgadas, mas não é conveniente para a análise de placas espessas, em que as deformações angulares na direção transversal passam a ser importantes [14], [15].

A teoria de Mindlin incorpora o efeito destas deformações no estudo de flexão de placas ao postular que uma linha reta e normal à superfície média da placa antes do carregamento permanece reta, mas não necessariamente normal a esta superfície

após as deformações como mostrado na Figura 2.3. Assim, as deformações angulares devido às tensões cisalhantes são incluídas na formulação. Esta teoria pode ser usada tanto para placas esbeltas como para placas moderadamente espessas.

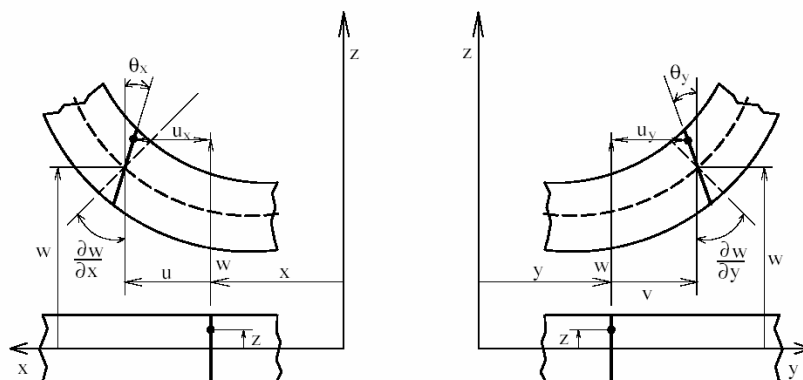


Figura 2.3 – Deformação de uma placa de Mindlin

A partir da Figura 2.3 e, considerando que pontos situados na superfície média ($z = 0$) da placa movem-se apenas na direção z – hipótese válida para a condição de pequenos deslocamentos -, verifica-se que para um ponto qualquer da placa os deslocamentos u, v, w são dados por:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ v &= v(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde w é o deslocamento transversal θ_y e θ_x são rotações das normais à superfície mediana nos planos xy e yz , respectivamente, conforme está mostrado na Figura 2.4.

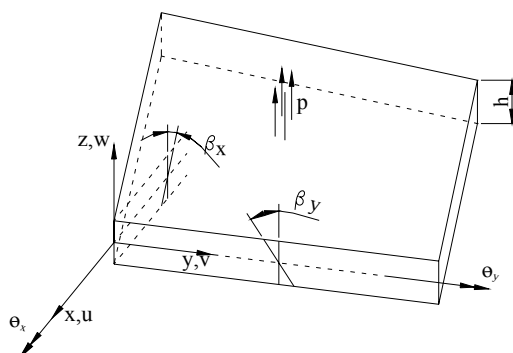


Figura 2.4 – Deslocamentos em uma placa

Desta forma, as seguintes componentes de deformação em um ponto qualquer da placa são obtidas empregando-se a eq. (2.19) correspondentes às componentes de lineares do tensor de deformações:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Os termos definidores destas componentes de deformação podem ser separados em dois grupos distintos: (a) os que descrevem as deformações devido à flexão - variam linearmente ao longo da espessura da chapa -, e (b) aqueles de membrana - constantes, que descrevem as deformações transversais à superfície média da casca. As definições das componentes de deformação devidas aos efeitos de membrana e de flexão são mostradas abaixo, nas equações (2.21).

$$\begin{aligned}
 \underline{\varepsilon}_M^T &= \left[\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right]_M = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
 \underline{\varepsilon}_F^T &= \left[\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right]_F = z \left[\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Também, o tensor de tensões para um ponto qualquer ao longo da espessura é obtido, com as tensões de membrana constantes, e as tensões de flexão linearmente variáveis ao longo da espessura. Esta formulação é implementada em diversos códigos de elementos finitos, sendo uma ferramenta largamente utilizada na análise de estruturas compostas por chapas.

No capítulo que se segue é apresentado o método tradicional de dimensionamento de cordões de solda em juntas compostas por chapas. Em seguida, é apresentado o desenvolvimento de uma metodologia baseada na investigação do

estado de tensões em juntas adjacentes obtidas através da solução de elementos de placas por elementos finitos.