

4 Instabilidade de Placas Retangulares sob Compressão

Este capítulo apresenta uma revisão da instabilidade de placas retangulares sob compressão, estudando as equações de equilíbrio crítico, sua solução analítica, comportamento pós-crítico e estado de tensões.

4.1. Placa Simplesmente Apoiada nos Quatro Bordos

Considera-se inicialmente uma placa retangular simplesmente apoiada nos quatro bordos, de lados a e b , sob compressão em seu plano médio por forças uniformemente distribuídas N_y , ao longo dos lados $y=0$ e $y=a$ (Figura 4.1).

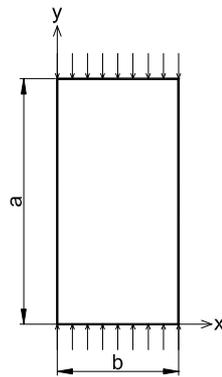


Figura 4.1 – Placa retangular com bordos $x=0,b$ e $y=0,a$ simplesmente apoiados, sob compressão.

Neste caso, a eq. (2.16c) toma a forma:

$$D\nabla^4 w = N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

Esta equação representa a condição de equilíbrio neutro ou crítico (existência de um estado de equilíbrio adjacente). O correspondente valor crítico da carga compressiva pode ser encontrado pela integração da eq. (4.1). O mesmo resultado pode também ser obtido pela minimização da energia do sistema. A deflexão da placa flambada pode ser representada, neste caso, pela dupla série trigonométrica:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \quad (4.2)$$

sendo q_{mn} a amplitude modal. Cada termo desta série satisfaz as condições de contorno cinemáticas $w=0$ nos quatro bordos, e também as condições de contorno estáticas $M_y = 0$ em $x=0,b$ e $M_x = 0$ em $y=0,a$.

Substituindo a eq. (4.2) na eq. (4.1), obtém-se:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \left[\pi^4 \left(\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) + \frac{N_y}{D} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} = 0 \quad (4.3)$$

Para que se tenha uma solução não trivial, isto é, para que esta equação seja satisfeita para todo o x e y diferente de zero, é necessário que, para ao menos um termo da soma, a expressão entre colchetes seja nula (enquanto q_{mn} pode ser zero para todos os outros termos). Tem-se, então, a família de autovalores:

$$-N_y = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (4.4)$$

Neste caso, a energia potencial é dada por:

$$U = \frac{\pi^2 b}{8a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^2 m^2 \left[\frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + N_y \right] \quad (4.5)$$

A carga crítica corresponde ao menor autovalor. Para todos os valores de a e b , o menor autovalor é dado para $n=1$, mas não necessariamente para $m=1$. Assumindo $\alpha = a/b$, a eq. (4.4), torna-se:

$$|N_{cr}| = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \quad (4.6)$$

A carga crítica $|N_{cr}|$ em função de α tem sempre uma curvatura positiva e o valor mínimo de $|N_{cr}|$ ocorre quando $(dN_{cr}/d\alpha)=0$. Esta condição leva a $\alpha = m$. Tem-se então que o valor mínimo da carga crítica é dado por:

$$|N_{cr}| = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (\text{para } \alpha = m) \quad (4.7)$$

Sendo $m = 1,2,3\dots$, tem-se que a placa atinge este valor sempre que a razão a/b for um inteiro.

Para valores diferentes de α , tem-se que:

$$|N_{cr}| = \frac{k\pi^2 D}{b^2} \tag{4.8}$$

onde:

$$k = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \tag{4.9}$$

Na Figura 4.2 é ilustrada a variação de k na eq. (4.9) como uma função de α para valores especificados de m . Tem-se assim as curvas que representam os diversos modos de bifurcação e que permitem determinar, para cada geometria, o modo associado ao autovalor mínimo (modo crítico). Para certas geometrias (pontos de interseção das curvas), tem-se dois modos distintos de bifurcação que estão associados à mesma carga de bifurcação.

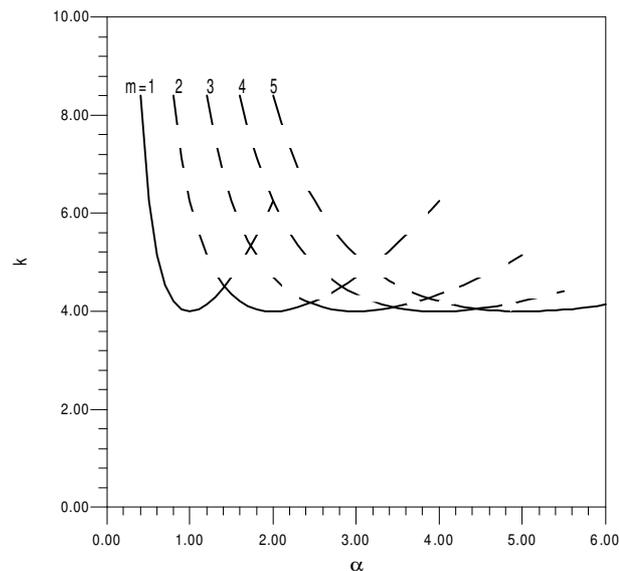


Figura 4.2 – Variação do parâmetro k em relação a α .

A transição do modo crítico de m para $m+1$ meias-ondas ocorre quando as curvas sucessivas têm valores iguais de k . A fórmula geral de k para placas simplesmente apoiadas é dada pela eq. (4.9). Substituindo na eq. (4.9) m por $m+1$, e igualando as expressões, obtém-se:

$$\left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 = \left(\frac{m+1}{\alpha} + \frac{\alpha}{m+1} \right)^2 \tag{4.10}$$

De onde se obtém que,

$$\alpha^2 = m(m+1) \therefore \alpha = \sqrt{m(m+1)} \quad (4.11)$$

Isso mostra que a interseção entre as curvas $m = 1$ e $m = 2$ ocorre quando $\alpha = \sqrt{2} = 1.41$, e entre as curvas $m = 2$ e $m = 3$ quando $\alpha = \sqrt{6} = 2.46$ e assim por diante.

Quando $\alpha < \sqrt{2}$, a carga crítica ocorre para $m = n = 1$, ou seja, a placa perde a estabilidade em um modo com meia-onda senoidal em cada direção. Por outro lado, quando $\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{6}$ a carga crítica ocorre quando $m = 2$ e $n = 1$. Então, os modos críticos são obtidos através das análises dos intervalos entre os pontos de interseção das curvas. Estes pontos de interseção correspondem a máximos locais do valor da carga crítica. Entretanto observa-se que a medida que α cresce, a variação no valor da carga crítica tende a diminuir e tende assintoticamente ao valor mínimo dado pela eq. (4.7) que corresponde a $k=4$ na Figura 4.2.

Para o cálculo da tensão crítica, tem-se que:

$$|N_{cr}| = \sigma_{cr} \cdot h \quad (4.12)$$

Igualando a eq. (4.12) à eq. (4.8), tem-se:

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 D}{hb^2} \quad (4.13)$$

Substituindo a eq. (2.8b) na eq. (4.12), tem-se:

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2} \quad (4.14)$$

que é a expressão da tensão de compressão crítica na direção do carregamento em termos dos parâmetros físicos e geométricos da placa.

4.1.1. Comportamento Crítico e Pós-Crítico

Nas Figuras 4.3 à 4.7 são apresentados os cinco primeiros modos de flambagem de placas retangulares sob compressão e simplesmente apoiadas nos quatro bordos ($x=0,b$ e $y=0,a$) para alguns valores de α , com seus respectivos fatores de carga λ obtidos usando-se o ABAQUS. Aqui λ é a relação entre a carga aplicada e a carga total especificada no arquivo de entrada, que neste trabalho foi de 1000kN em cada bordo carregado, tanto para placas isoladas como para placas dobradas. Todos os resultados encontrados numericamente, tanto para as cargas quanto para os modos de bifurcação, concordam com os valores teóricos apresentados neste capítulo, confirmando a qualidade da modelagem computacional.

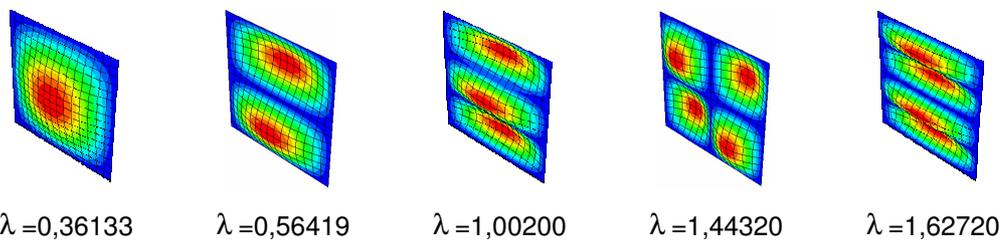


Figura 4.3 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha = 1.0$.

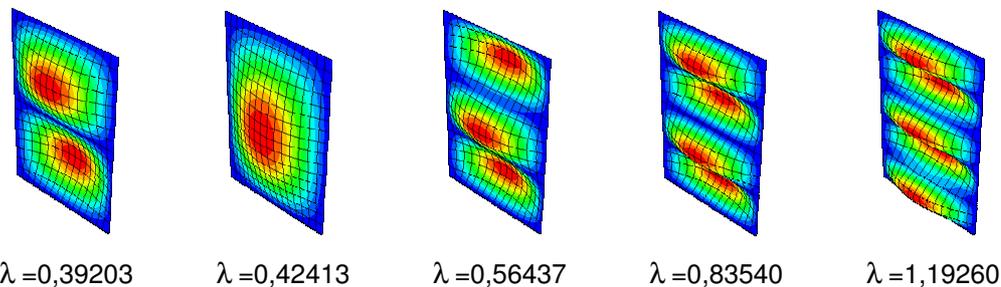


Figura 4.4 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha = 1.5$.

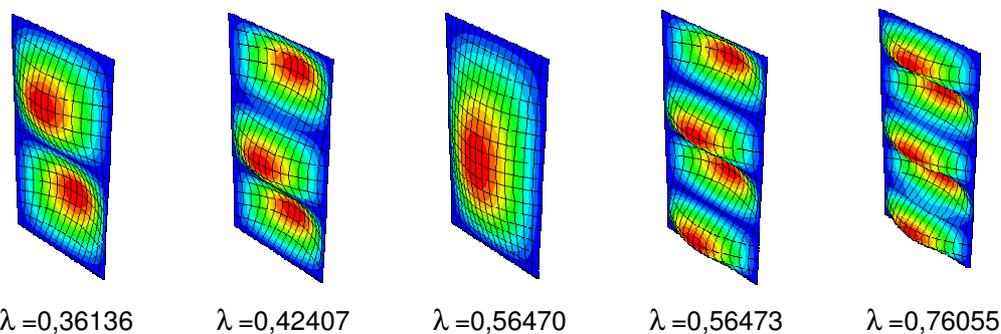
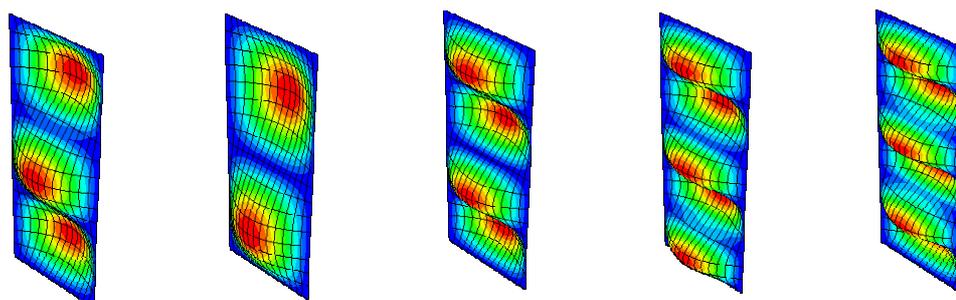
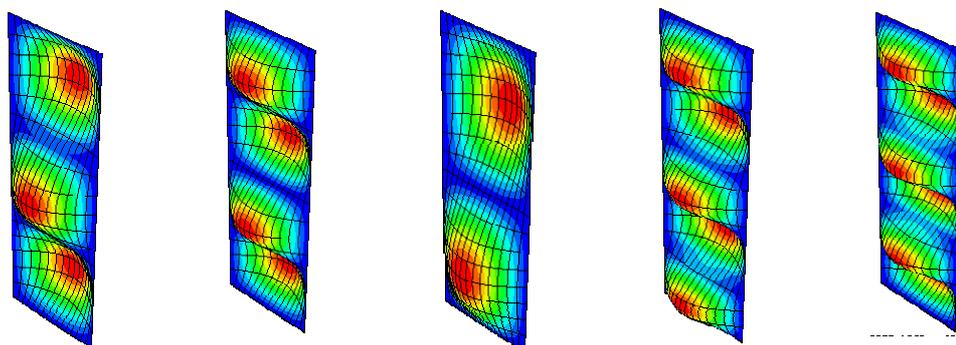


Figura 4.5 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha = 2.0$.



$\lambda = 0,37353$ $\lambda = 0,37968$ $\lambda = 0,44741$ $\lambda = 0,56537$ $\lambda = 0,71905$

Figura 4.6 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha = 2.5$.



$\lambda = 0,36140$ $\lambda = 0,39225$ $\lambda = 0,42414$ $\lambda = 0,46475$ $\lambda = 0,56641$

Figura 4.7 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha = 3.0$.

Para todos os valores de estudados, obteve-se, usando o ABAQUS, o correspondente caminho pós-crítico de equilíbrio, seguindo a metodologia descrita no capítulo anterior. Estes resultados são mostrados na Figura 4.8 onde se apresenta a variação do parâmetro de carga em função da deflexão máxima da placa normalizada com relação à espessura, h . Verifica-se que todos os caminhos de equilíbrio exibem uma bifurcação simétrica estável com elevada rigidez pós-crítica, concordando com os resultados da literatura (Chia, 1980), como apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – λ numérico e teórico para as cinco primeiras cargas de flambagem de uma placa isolada com apenas os bordos carregados apoiados, para cada α estudado.

λ	$\alpha = 1.0$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 2.0$		$\alpha = 2.5$		$\alpha = 3.0$	
	Numérico	Teórico								
1ª	0,361	0,362	0,392	0,392	0,361	0,362	0,374	0,374	0,361	0,362
2ª	0,561	0,565	0,424	0,424	0,424	0,424	0,380	0,380	0,392	0,392
3ª	1,002	1,004	0,564	0,565	0,565	0,565	0,447	0,447	0,424	0,424
4ª	1,443	1,633	0,835	0,836	0,565	0,565	0,565	0,565	0,465	0,464
5ª	1,627	2,444	1,192	1,193	0,761	0,760	0,719	0,760	0,566	1,004

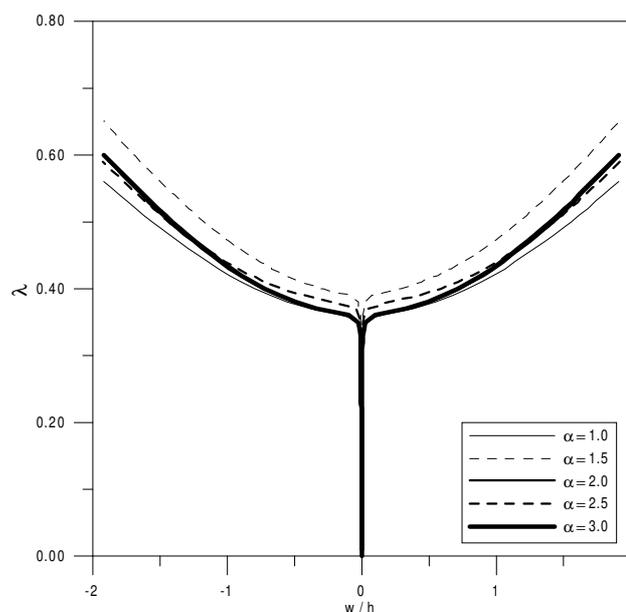


Figura 4.8 – Caminhos pós-críticos de equilíbrio para valores selecionados de α - Placa retangular com todos os bordos simplesmente apoiados sob compressão axial.

4.1.2. Evolução do Estado de Tensões

Para o estudo da evolução do estado de tensões na placa ao longo do caminho pré- e pós-crítico de equilíbrio, adotou-se como exemplo uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 1.0$ e outra com $\alpha = 3.0$, conforme apresentado nas figuras seguintes. Estes resultados foram obtidos por intermédio do programa ABAQUS. Como explicado anteriormente no Capítulo 3, para se obter o caminho não-linear de equilíbrio usando este programa, deve-se adotar uma pequena perturbação. Para esta perturbação tomou-se uma imperfeição na forma do modo crítico com uma pequena amplitude (1% da espessura). Esta imperfeição é responsável pelas pequenas variações observadas nos valores das tensões para valores de λ menores que o valor crítico. Teoricamente até o valor crítico (caminho fundamental de equilíbrio) a tensão deveria ser uniforme em toda a placa.

Nas Figuras 4.9 e 4.10 tem-se a distribuição das tensões nas faces positiva e negativa ($z = \pm h/2$) de uma placa quadrada ($\alpha = 1.0$), respectivamente, para valores crescentes de carregamento. Mostra-se em cada caso o correspondente valor do parâmetro λ / λ_{cr} . Neste caso, $\lambda_{cr} = 0,36133$. Nas Figuras 4.11 e 4.12, tem-se a distribuição das tensões nas faces positiva e negativa da placa ($z = \pm h/2$) a meia-altura da placa ($y = a/2$), para algumas

relações de λ/λ_{cr} , sendo estes valores iguais aos considerados nas Figuras 4.9 e 4.10. Nota-se que, até se atingir a carga crítica, a distribuição de tensões é, como esperado, praticamente uniforme. Ao se ultrapassar a carga crítica, em função dos efeitos da flexo-compressão (efeitos de segunda ordem), as tensões passam a apresentar uma grande variação ao longo da largura da placa, podendo inclusive ocorrer tensões de tração no centro da placa, região onde o momento de segunda ordem tem maior influência. Nesta região também ocorrem as maiores tensões de compressão, como mostra a Figura 4.12. A tensão máxima ocorre no centro da face negativa, onde se inicia o processo de plastificação. Verifica-se também que as duas faixas junto aos bordos verticais são as responsáveis pela maior parte da rigidez pós-crítica da placa. Em função do acréscimo acentuado das tensões no regime pós-crítico, mesmo que a flambagem ocorra no regime elástico, o que geralmente acontece em placas esbeltas comprimidas, a placa passa a apresentar um comportamento elasto-plástico, atingindo finalmente o colapso.

Nas Figuras 4.13 e 4.14, tem-se a distribuição das tensões nas faces positiva e negativa da placa ($z = \pm h/2$) junto ao bordo da placa ($y=0$), para algumas relações de λ/λ_{cr} . Em todas as figuras deste trabalho, as tensões são dadas em kN/mm^2 .

Nas Figuras 4.15 e 4.16 tem-se a distribuição das tensões nas faces positiva e negativa ($z = \pm h/2$) de uma placa retangular com $\alpha = 3.0$, respectivamente, para valores crescentes de carregamento. Mostra-se em cada caso o correspondente valor do parâmetro λ/λ_{cr} . Neste caso, $\lambda_{cr} = 0,36140$.

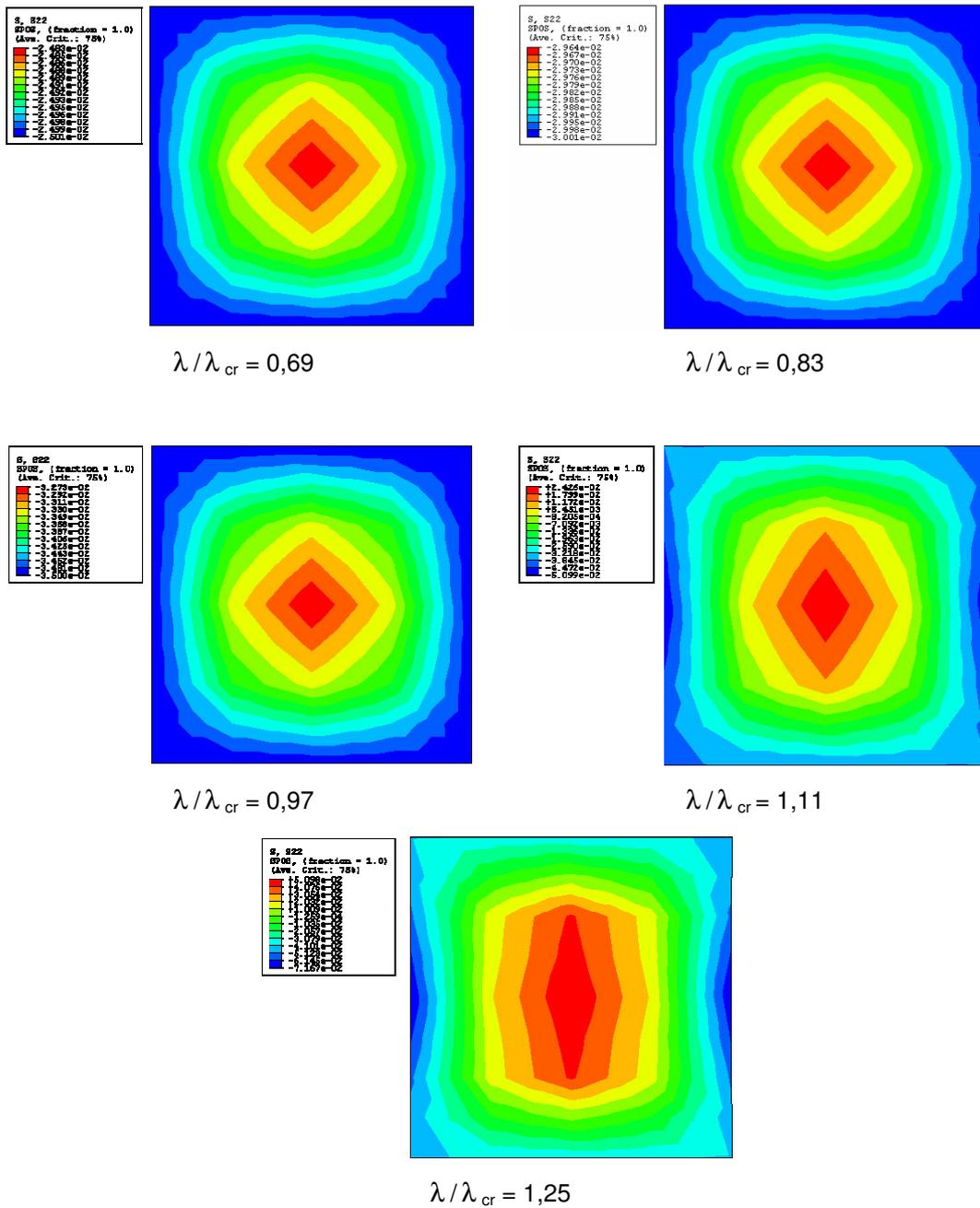


Figura 4.9 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 1$ para valores crescentes de λ .

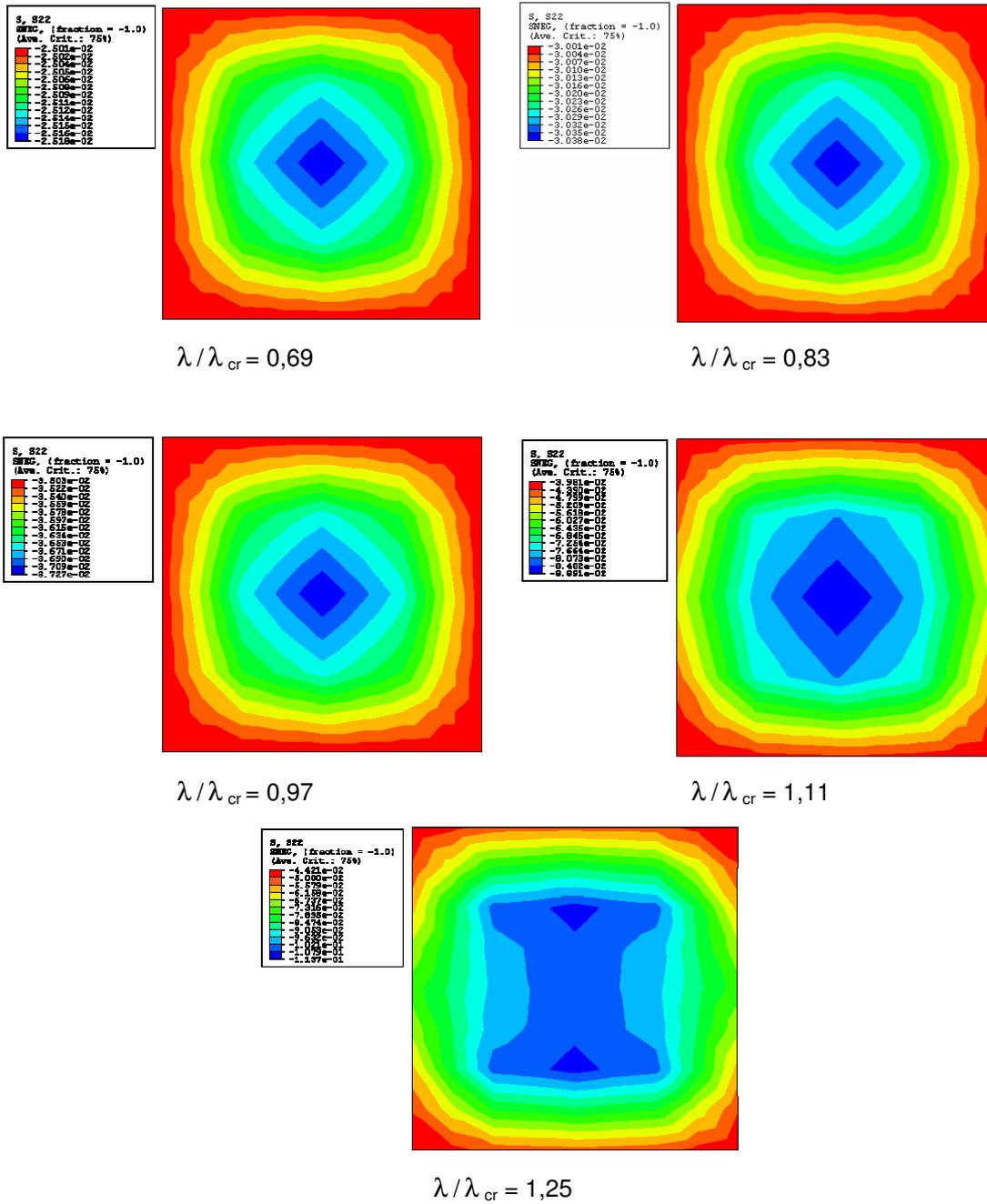


Figura 4.10 – Distribuição das tensões na face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 1$ para valores crescentes de λ .

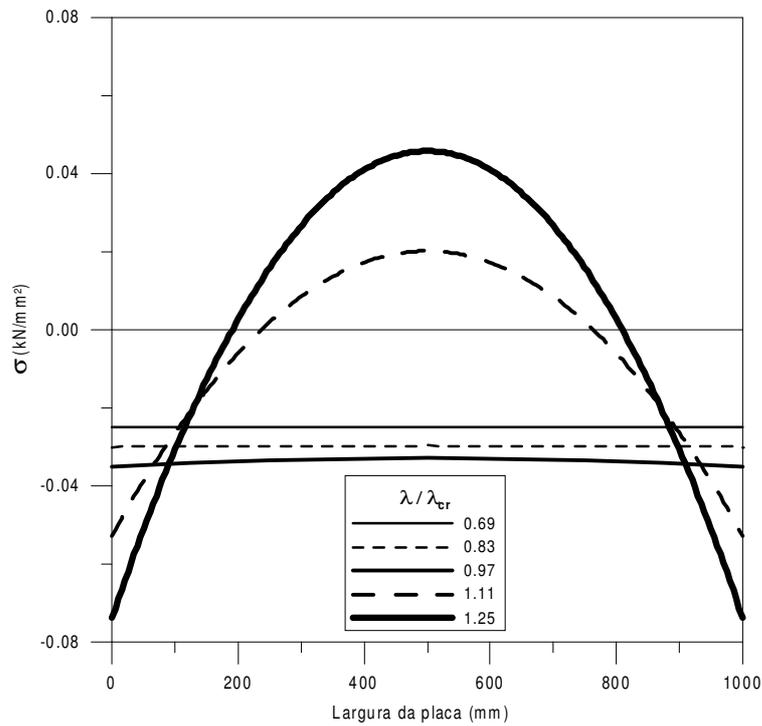


Figura 4.11 – Distribuição das tensões no centro ($y = a/2$) da face positiva ($z = h/2$) de uma placa retangular com $\alpha = 1.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .

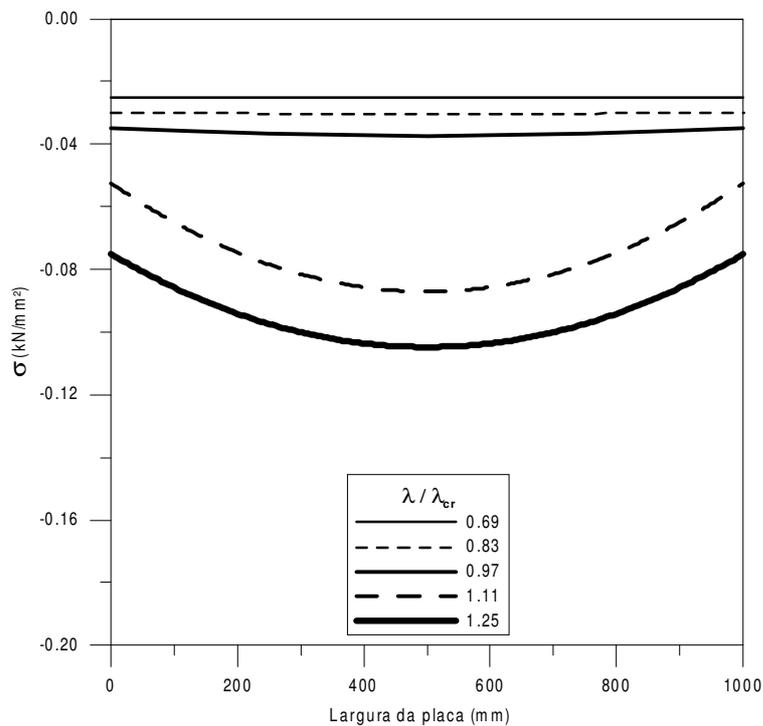


Figura 4.12 – Distribuição das tensões no centro ($y = a/2$) da face negativa ($z = -h/2$) de uma placa retangular com $\alpha = 1.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .

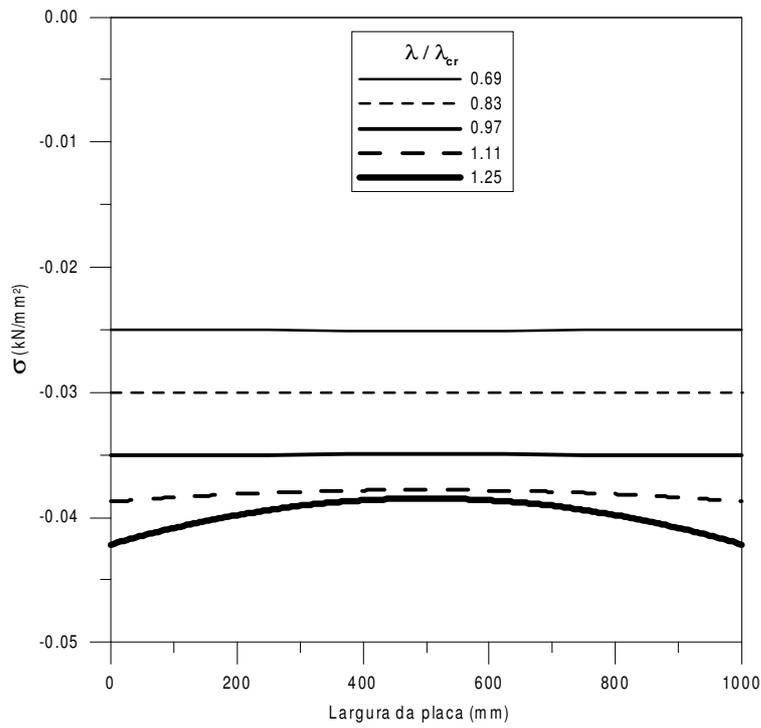


Figura 4.13 – Distribuição das tensões no bordo da placa ($y = 0$). Face positiva.

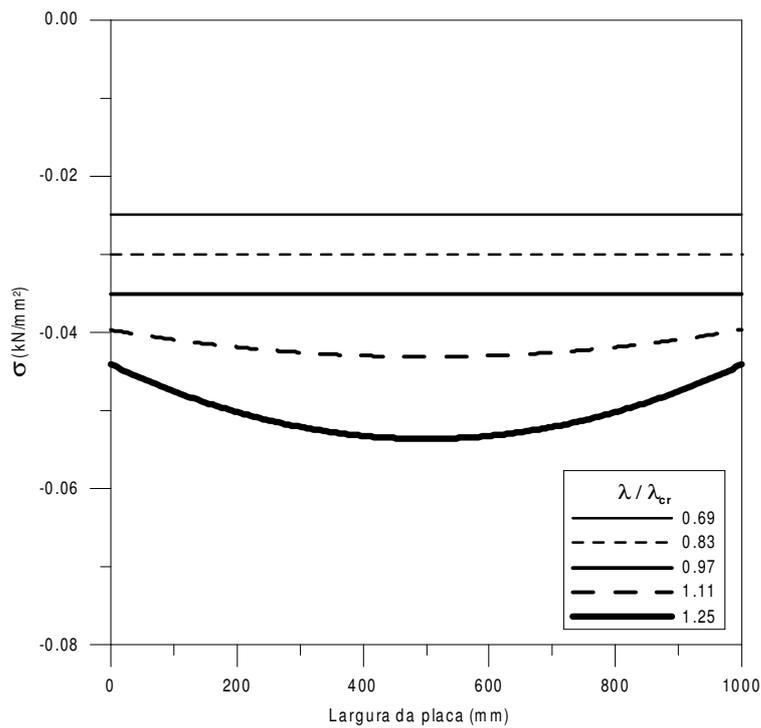


Figura 4.14 – Distribuição das tensões no bordo da placa ($y = 0$). Face negativa.

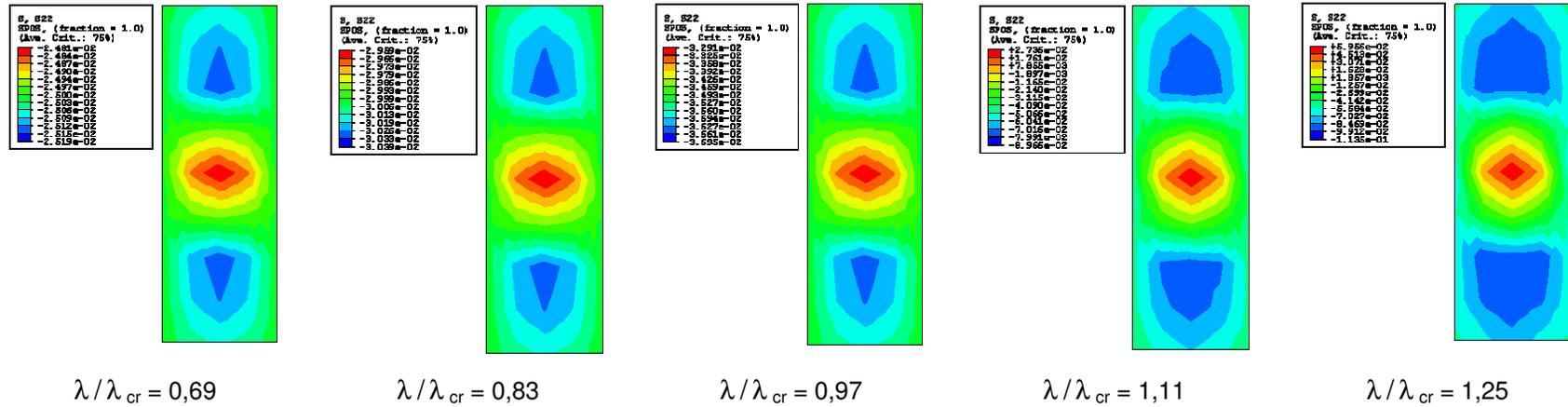


Figura 4.15 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$.

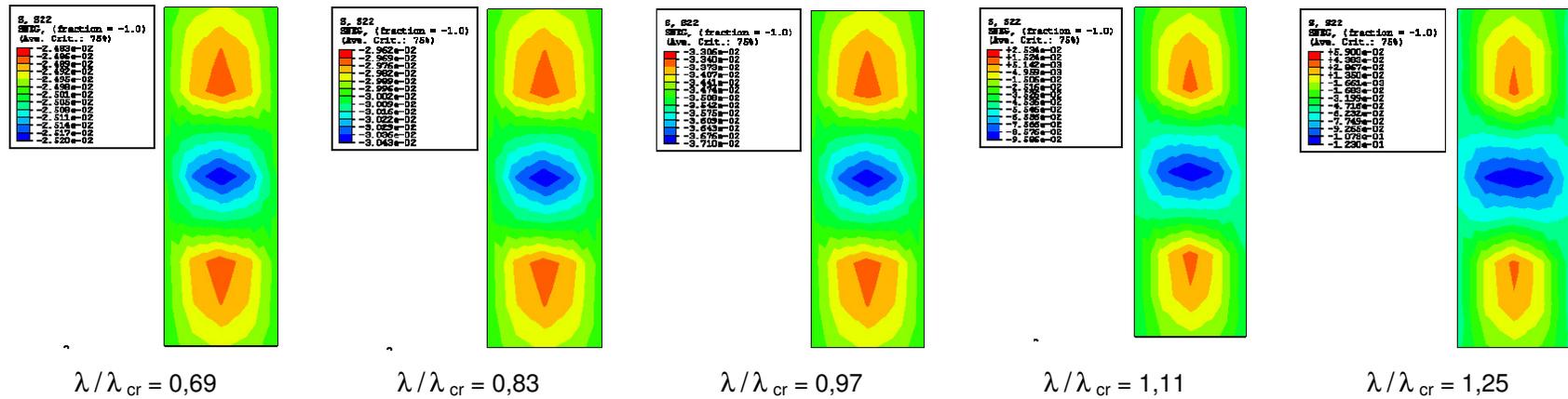


Figura 4.16 – Distribuição das tensões na face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$.

Nas Figuras 4.17 e 4.18, tem-se a distribuição das tensões nas faces positiva e negativa da placa ($z = \pm h/2$) a meia-altura da placa ($y = a/2$), para algumas relações de λ / λ_{cr} , sendo estes valores iguais aos das Figuras 4.15 e 4.16.

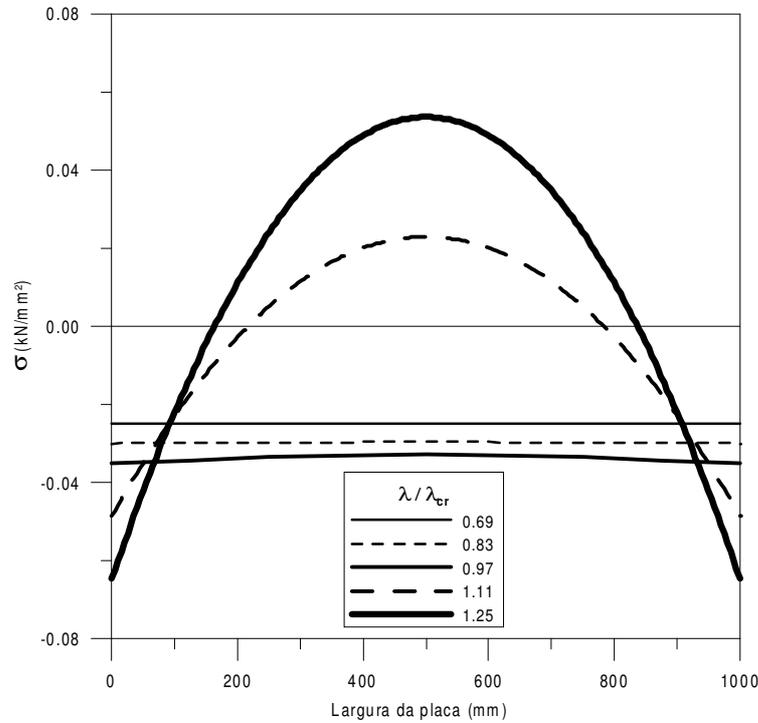


Figura 4.17 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .

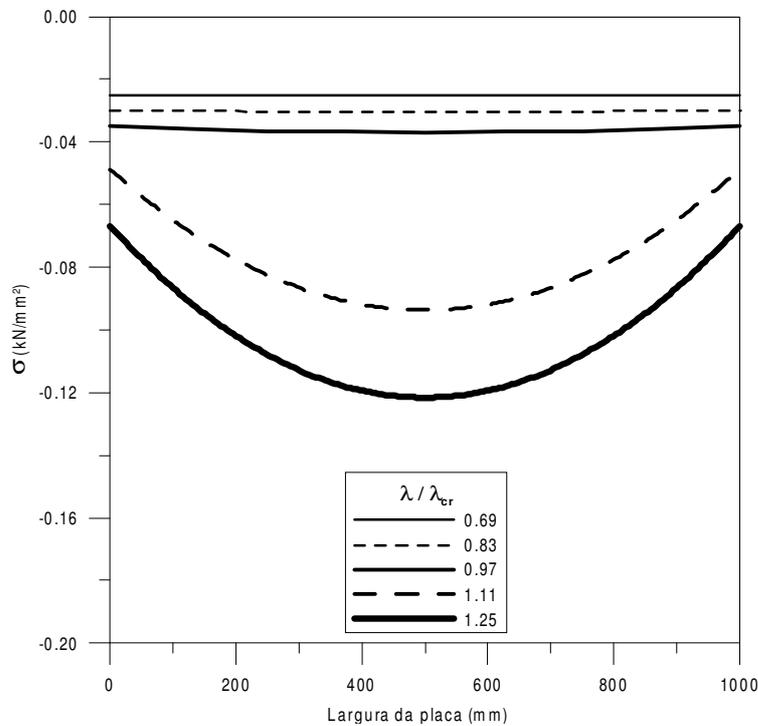


Figura 4.18 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .

Nas Figuras 4.19 e 4.20, tem-se a distribuição das tensões nas faces positiva e negativa da placa ($z = \pm h/2$) no bordo $y=0$, para algumas relações de λ / λ_{cr} , sendo estes valores iguais aos das Figuras 4.15 e 4.16.

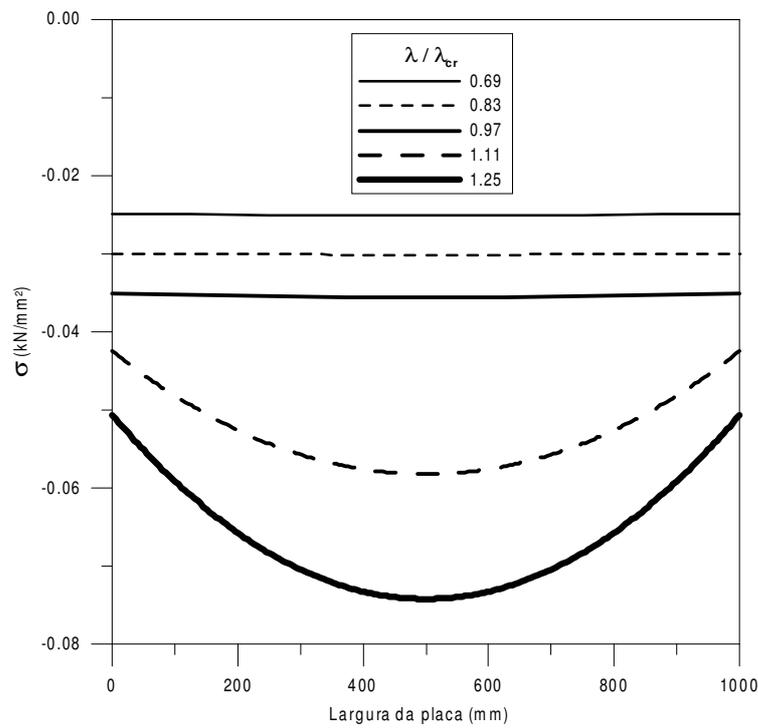


Figura 4.19 – Distribuição das tensões no bordo $y = 0$ da face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .

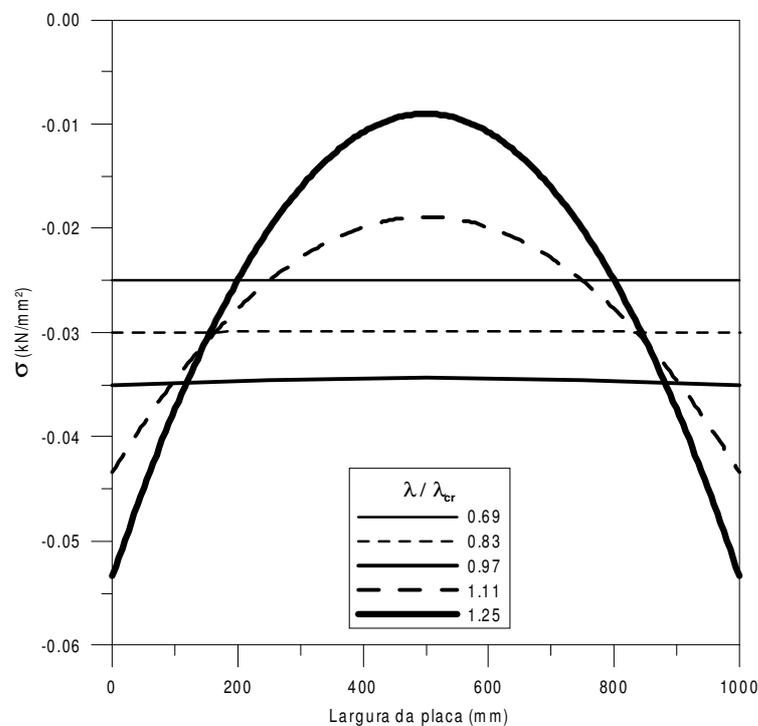


Figura 4.20 – Distribuição das tensões no bordo $y = 0$ da face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .

Como no caso anterior ($\alpha = 1.0$), quando as tensões de compressão são menores que a tensão crítica, a distribuição de tensões é uniforme ao longo da largura da placa. Para tensões de compressão maiores que a tensão crítica, as tensões perto dos bordos $x=0, b$ são menores que no centro, pois sofrem a influência dos apoios. Em tais casos a distribuição de tensões é não-uniforme, como pode ser observado nas Figuras 4.11 à 4.14 e nas Figuras 4.17 e 4.20, apresentando um comportamento similar ao da placa isolada. Com base nas distribuições de tensões, podem-se derivar critérios práticos e recomendações de normas que permitam o dimensionamento seguro da estrutura.

A diferença entre σ_u , tensão de colapso da placa (ordenada do ponto B na Figura 4.21) e σ_y , tensão de escoamento do material (ordenada do ponto A na Figura 4.21) é chamada de “reserva de resistência elasto-plástica da placa”. Em geral sua determinação envolve um esforço computacional considerável. Como essa diferença não é, em geral, importante, é prática corrente desprezá-la, o que significa admitir que o colapso da placa corresponde ao escoamento da primeira fibra da placa (i.e., toma-se $\sigma_u \approx \sigma_y$), o que simplifica bastante o processo de cálculo.

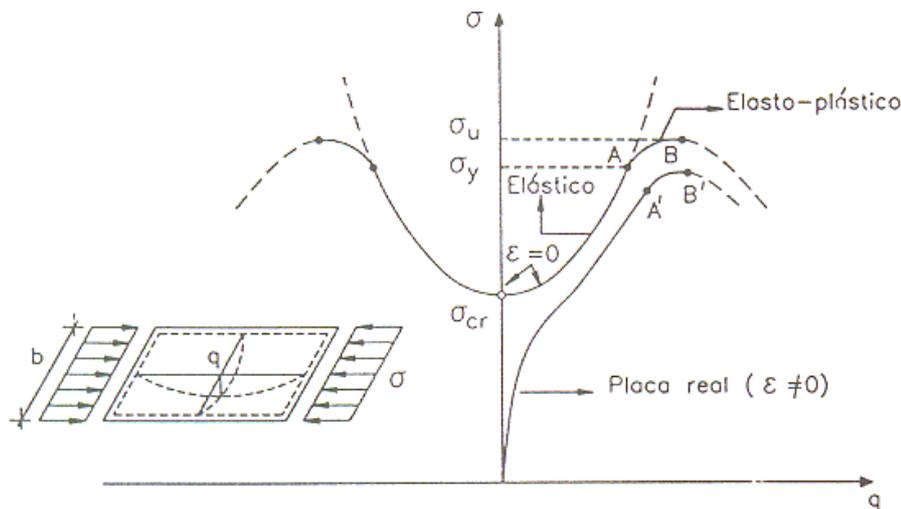


Figura 4.21 – Comportamento pós-crítico de placas retangulares comprimidas axialmente (Reis & Camotim, 2001).

Quanto à influência da presença das imperfeições geométricas ($\epsilon \neq 0$, onde ϵ é o parâmetro de imperfeições) no comportamento da placa, a Figura 4.21 mostra também que a sua presença faz diminuir os valores de σ_y e σ_u (ordenada dos pontos A' e B' na Figura 4.21).

A presença de imperfeições geométricas faz com que a trajetória fundamental da estrutura deixe de ser constituída por configurações de equilíbrio neutro. Por este motivo, as estruturas “reais” não apresentam bifurcação de equilíbrio, sendo o seu comportamento caracterizado por um caminho de equilíbrio cuja não-linearidade se acentua nas proximidades da carga crítica. Caso ocorra plastificação, haverá a ocorrência de um ponto limite, o qual está associado ao valor do fator de carga λ que corresponde à transição entre as configurações de equilíbrio estáveis e instáveis (Reis & Camotim, 2001). A Figura 4.22 apresenta os caminhos pós-críticos de equilíbrio de uma placa com $\alpha = 1.0$ e com diferentes níveis de imperfeição, sob compressão axial. Observa-se que, a medida que a magnitude da imperfeição aumenta, cresce a não-linearidade da resposta com o conseqüente aumento das deflexões laterais para um mesmo nível de carregamento.

Como neste trabalho não se considera o processo de plastificação da placa, não se pode observar os pontos limite ilustrados na Figura 4.21.

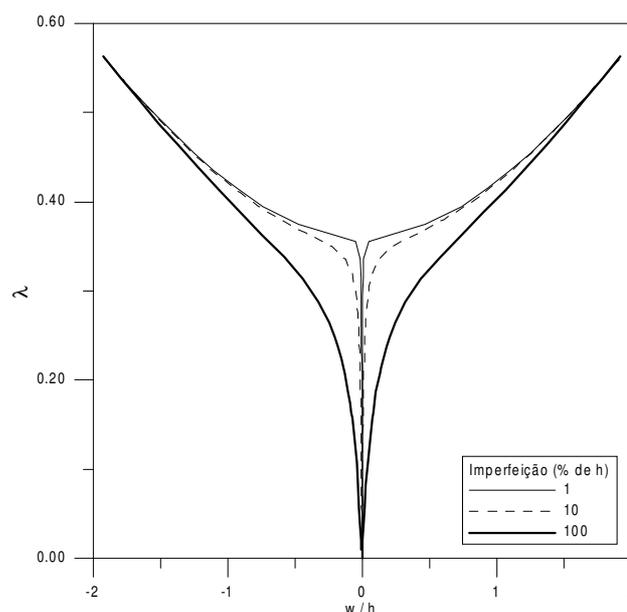


Figura 4.22 – Caminhos não-lineares de equilíbrio de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 1.0$ e com diferentes níveis de imperfeição.

Para o dimensionamento de estruturas metálicas, a verificação da resistência à flambagem é feita através da utilização do conceito de *largura efetiva*, formulado inicialmente por vón Kármán no contexto de placas simplesmente apoiadas e uniformemente comprimidas, com base na observação de ensaios experimentais. Considera-se que a máxima tensão nos bordos age

uniformemente sobre duas faixas da placa, e que a região central não é tensionada. Vón Kármán propôs que as faixas devem ser consideradas juntas como uma placa retangular de largura b_e . Pela Figura 4.23, se a largura de cada faixa de bordo é $b_e/2$, e se o colapso ocorre quando a tensão no bordo atinge σ_y , então:

$$b_e \cdot \sigma_y = b \cdot \sigma_{max} \tag{4.15}$$

onde:

$$\sigma_y = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b_e^2} \tag{4.16}$$

e a tensão crítica da placa completa é dada pela eq. (4.13).

Comparando a eq. (4.13) e a eq. (4.16), têm-se que:

$$\frac{b_e}{b} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}\right)} \tag{4.17}$$

Finalmente, das eqs. (4.15) e (4.17):

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}\right)} \tag{4.18}$$

e, portanto,

$$\sigma_{max} = \sqrt{\sigma_{cr} \cdot \sigma_y} \tag{4.19}$$

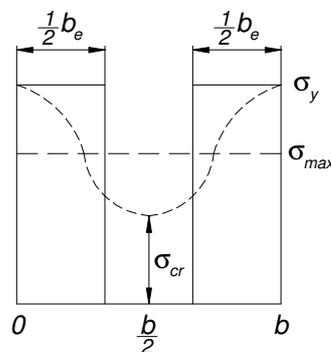


Figura 4.23 – Cálculo da largura efetiva.

Ocasionalmente, a carga de flambagem inicial é usada como uma estimativa conservadora da resistência última da placa.

Se o escoamento do material da placa ocorrer antes da placa flambar, a carga máxima que a placa pode suportar é menor que o valor dado pela análise da estabilidade elástica.

4.2. Placa com Condições de Contorno Arbitrárias

A forma simples da eq. (4.2) não é apropriada para outras condições de contorno. Como um exemplo mais geral e de interesse para o presente estudo, considere uma placa retangular uniformemente comprimida e simplesmente apoiada nos bordos $x=0,b$, mas com outras condições de contorno nos bordos $y=0,a$. A menor carga crítica para tais condições de contorno evidentemente corresponde aos bordos livres em $x=0,b$ (Figura 4.24). Tal placa é simplesmente uma coluna cuja a rigidez à flexão EI é substituído por D e é conhecida por *wide column* (Brush & Almroth,1975).

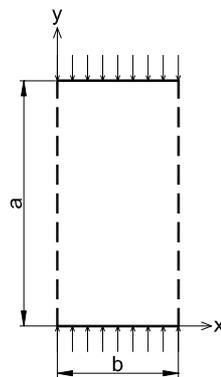


Figura 4.24 – Placa retangular sob compressão axial com $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados.

Neste caso tem-se para as cargas de bifurcação:

$$N_{bif} = m^2 \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (4.20)$$

O menor autovalor corresponde sempre a $m = 1$, independente da geometria da placa. Logo:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (4.21)$$

A tensão de compressão crítica é dada por:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{ha^2} \therefore \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \quad (4.22)$$

Agora, considera-se o caso mais geral de uma placa retangular uniformemente comprimida e simplesmente apoiada ao longo dos bordos $y=0,a$ e com diferentes condições de contorno ao longo dos bordos $x=0,b$.

As condições de contorno em $y=0,a$ são satisfeitas por soluções da forma:

$$w = f(x) \sum_{n=1}^{\infty} q_n \text{sen} \frac{n\pi y}{a} \tag{4.23}$$

Substituindo a eq. (4.23) na eq. (4.1), têm-se para $f(x)$ a seguinte equação diferencial de quarta ordem:

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \left[\frac{m^4\pi^4}{a^4} + \frac{N_y}{D} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \right] f = 0 \tag{4.24}$$

Esta equação pode ser resolvida facilmente quando N_y é constante.

Então, assumimos que $(-N_y / D) > (m^2\pi^2 / a^2)$, a solução geral tem a forma:

$$f(x) = A \text{senh} \varphi x + B \text{sen} \beta x + C \text{cosh} \varphi x + D \text{cos} \beta x \tag{4.25}$$

onde φ e β são as raízes da equação característica associada à (4.25):

$$\varphi = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{-N_y}{D} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} \right)}} \tag{4.26}$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{-N_y}{D} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} \right)}}$$

Para o bordo $x=0$ livre e o bordo $x=b$ simplesmente apoiado, como mostra a Figura 4.25, têm-se as seguintes condições de contorno:

Para $x = b$ $w = 0$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ (4.27)

Para $x = 0$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = 0$ (4.28)

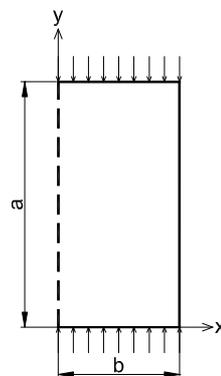


Figura 4.25 – Placa retangular sob compressão axial com $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0,a$ apoiados.

Pelas eqs. (4.27), conclui-se que $C = D = 0$ e as eqs. (4.28) fornecem duas equações algébricas para A e B :

$$\left[\left(\varphi^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sinh \varphi b \right] A - \left[\left(\beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \beta b \right] B = 0 \quad (4.29)$$

$$\left\{ \varphi \left[\varphi^2 - (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \cosh \varphi b \right\} A - \left\{ \beta \left[\beta^2 + (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \cosh \beta b \right\} B = 0$$

Para que o sistema homogêneo da eq. (4.29) tenha solução não-trivial é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja igual a zero, isto é:

$$\beta \left(\varphi^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \tanh \varphi b = \varphi \left(\beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \tan \beta b \quad (4.30)$$

A eq. (4.30) pode ser usada para calcular o valor crítico de N_y se as dimensões da placa e as constantes elásticas do material são conhecidas. Estes cálculos mostram que o menor valor de N_y é obtido para $m = 1$, ou seja, a placa ao perder a estabilidade apresenta somente meia-onda na direção y .

A carga crítica e a respectiva tensão podem ser encontradas por:

$$N_{cr} = \frac{k\pi^2 D}{b^2} \quad (4.31)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 D}{hb^2} \therefore \sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2} \quad (4.32)$$

Na literatura técnica, encontram-se soluções analíticas para diversas condições de contorno e geometrias simples. Geralmente para problemas de placas com formas complexas são usados métodos numéricos.

4.2.1. Comportamento Crítico e Pós-Crítico

Para a placa sob compressão axial e com os bordos $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados (Figura 4.24), são apresentados nas Figuras de 4.26 à Figura 4.30 os cinco primeiros modos de bifurcação de placas retangulares para alguns valores de α , com seus respectivos fatores de carga λ , obtidos usando-se o ABAQUS. Nota-se que, para este caso, a maior carga crítica entre os α estudados, ocorre para $\alpha=1.0$ e que esta decresce monotonicamente a medida que α aumenta, concordando com a solução analítica (4.21).

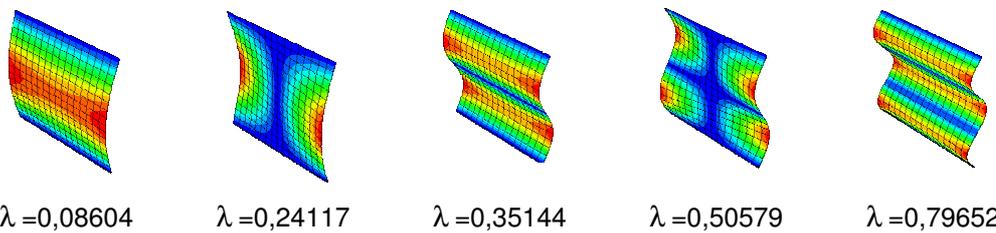


Figura 4.26 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=1.0$.

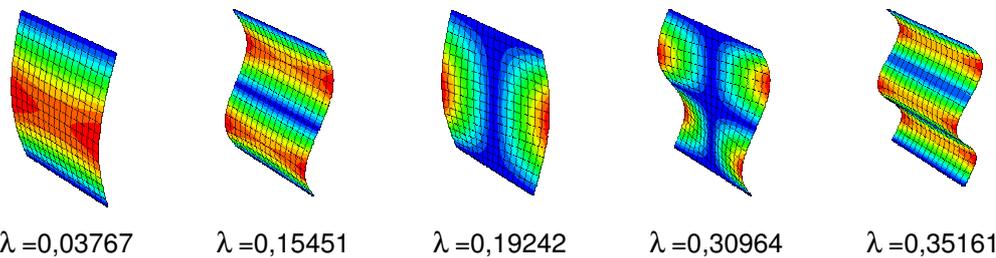


Figura 4.27 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=1.5$.

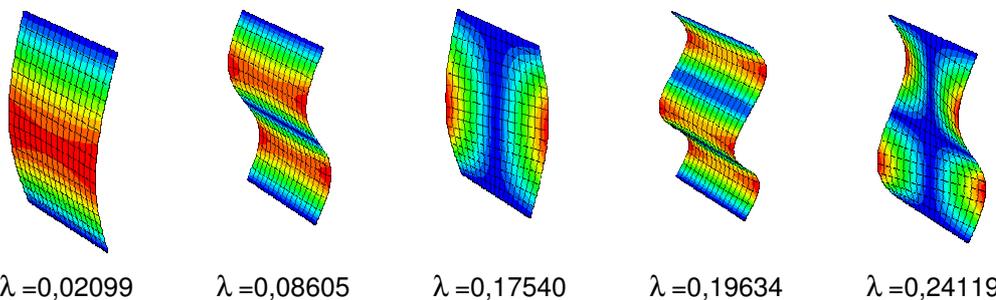


Figura 4.28 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=2.0$.

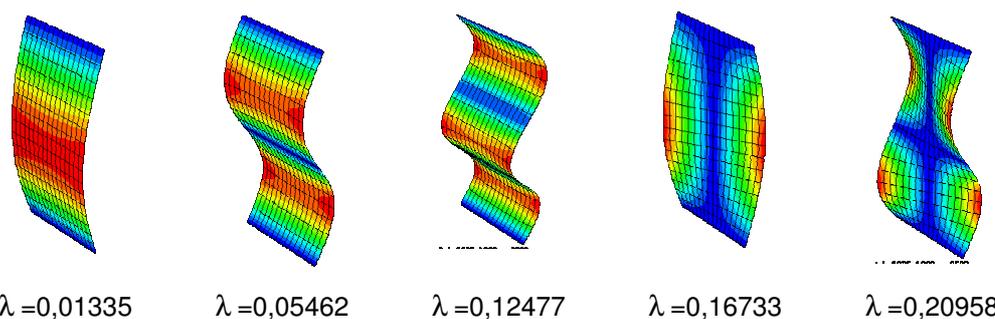


Figura 4.29 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha = 2.5$.

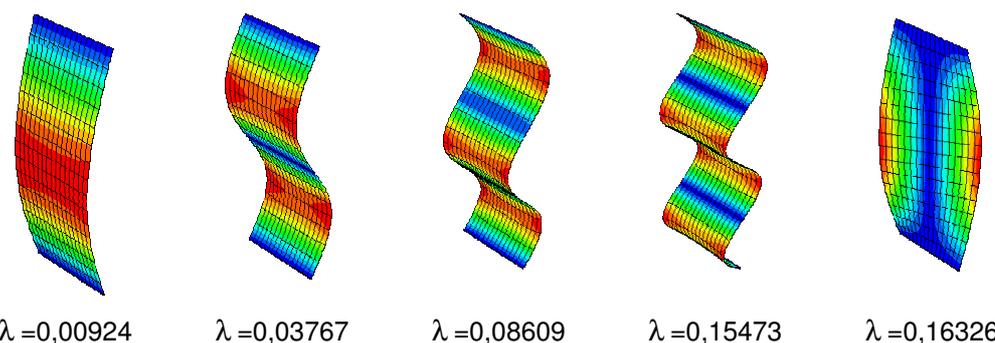


Figura 4.30 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha = 3.0$.

Observa-se que o modo crítico apresenta-se com o número de meias-ondas m igual a 1 para todos os valores de α estudados, em concordância com a solução analítica.

Para todos os estudados, os caminhos de equilíbrio apresentam-se estáveis como demonstrado na Figura 4.31. Entretanto observa-se que a rigidez pós-crítica decresce a medida que α aumenta, sendo que, para placas longas, a rigidez pós-crítica inicial é praticamente nula. Um comportamento semelhante à coluna de Euler, como pode ser observado na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – λ numérico e teórico para as cinco primeiras cargas de flambagem de uma placa isolada com apenas os bordos carregados apoiados, para cada α estudado.

λ	$\alpha = 1.0$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 2.0$		$\alpha = 2.5$		$\alpha = 3.0$	
	Numérico	Teórico								
1ª	0,086	0,090	0,038	0,040	0,021	0,023	0,013	0,014	0,009	0,010
2ª	0,241	0,361	0,154	0,161	0,086	0,090	0,055	0,058	0,038	0,040
3ª	0,351	0,813	0,192	0,361	0,175	0,203	0,125	0,130	0,086	0,090
4ª	0,506	1,446	0,310	0,643	0,196	0,361	0,167	0,231	0,155	0,161
5ª	0,796	2,260	0,352	1,004	0,241	0,565	0,210	0,362	0,163	0,251

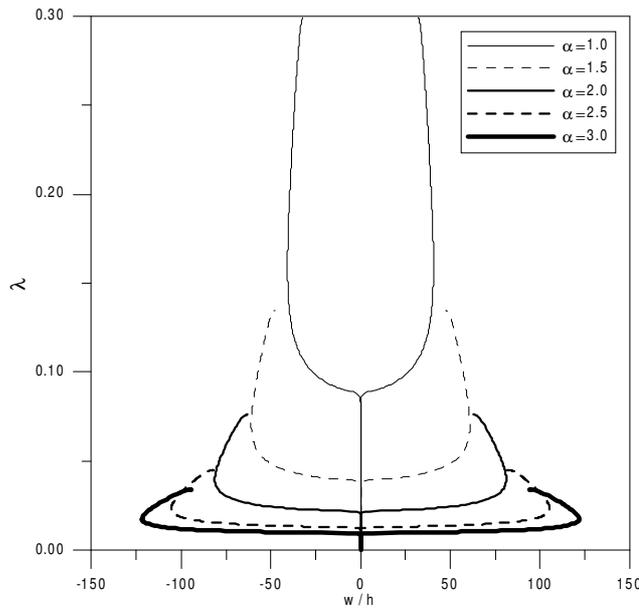


Figura 4.31 – Caminhos de Equilíbrio para valores seleccionados de α para placa retangular sob compressão axial com $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados.

Considera-se agora o caso da placa sob compressão com o bordo $x=0$ livre e os bordos $x=b$ e $y=0,a$ simplesmente apoiados (Figura 4.25). As Figuras 4.32 à 4.36 mostram os cinco primeiros modos de bifurcação para alguns valores de α e os respectivos fatores de carga λ . Nota-se que, para este caso, a maior carga crítica entre os α estudados, ocorre novamente para $\alpha=1.0$ e decresce a medida que α aumenta. Mais uma vez os resultados numéricos concordam com a solução analítica apresentada anteriormente.

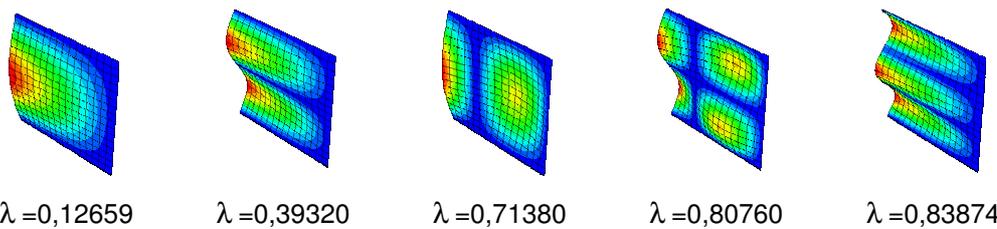


Figura 4.32 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=1.0$.

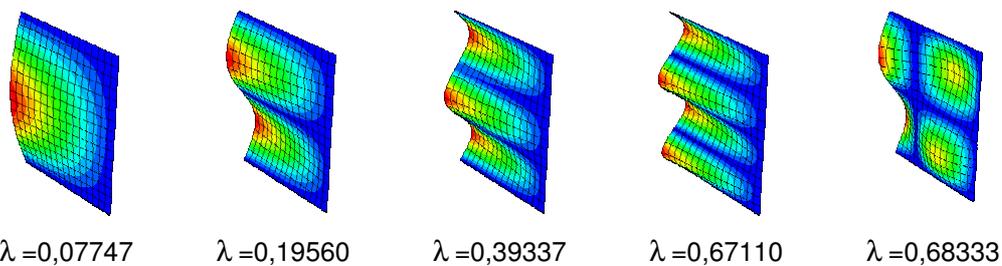


Figura 4.33 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=1.5$.

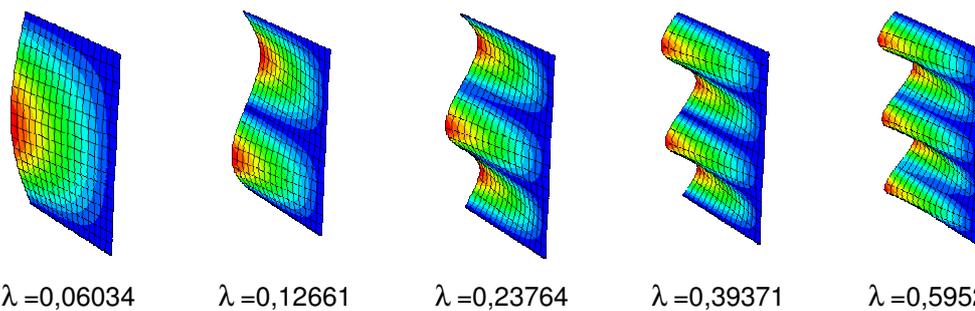


Figura 4.34 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha = 2.0$.

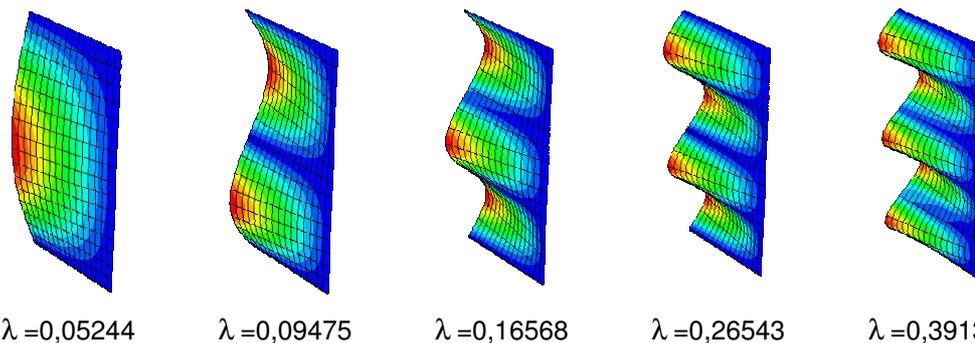


Figura 4.35 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha = 2.5$.

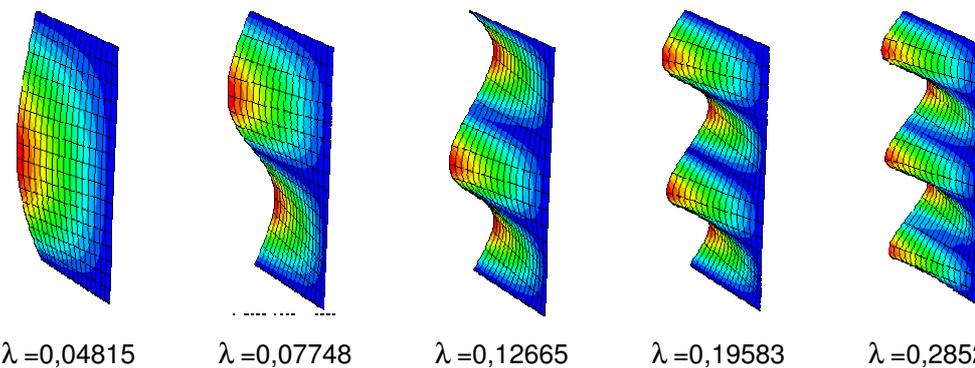


Figura 4.36 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha = 3.0$.

Para todos os α estudados, os caminhos de equilíbrio apresentam-se estáveis como demonstrado na Figura 4.37. Observa-se que neste caso a placa apresenta uma acentuada rigidez pós-crítica.

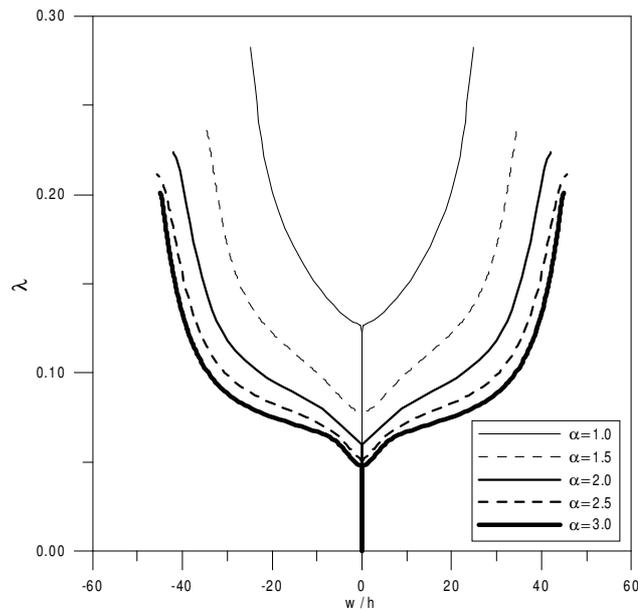


Figura 4.37 – Caminhos de pós-críticos de equilíbrio valores selecionados de α para placa retangular sob compressão axial com $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0,a$ apoiados

4.2.2. Evolução do Estado de Tensões

As Figuras 4.38 e 4.39 apresentam o estudo da evolução do estado de tensões da placa retangular sob compressão axial com $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados e $\alpha = 3.0$, ao longo do caminho pós-crítico de equilíbrio. Para este caso $\lambda_{cr} = 0,00924$.

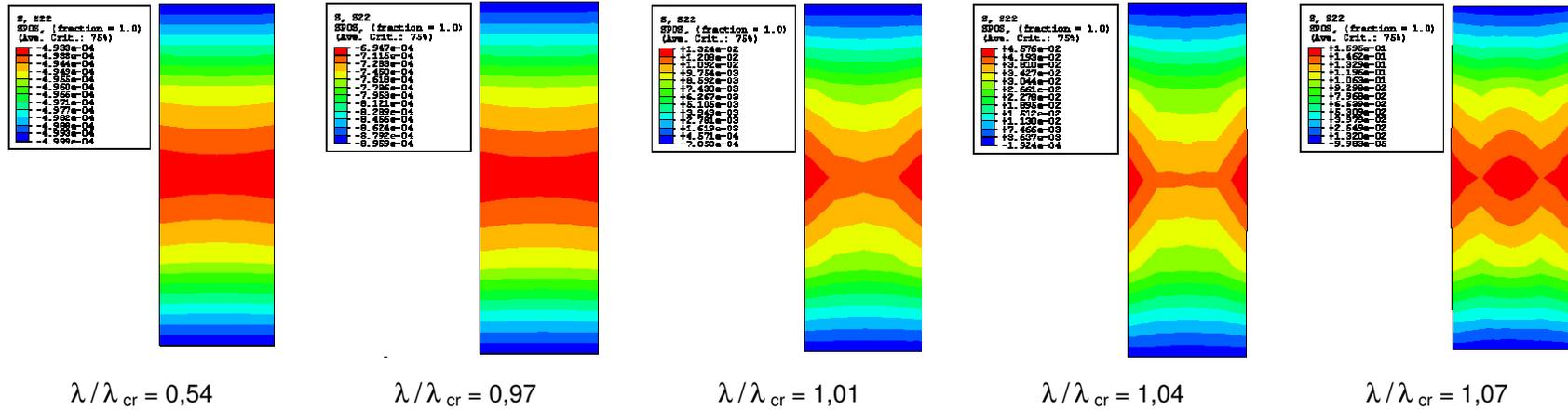


Figura 4.38 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$.

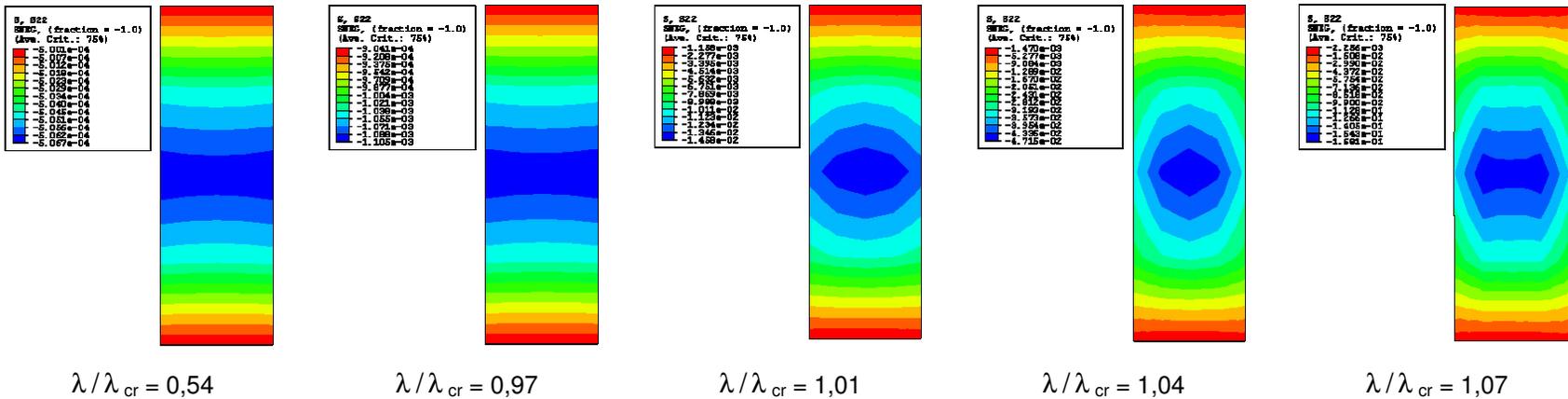


Figura 4.39 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$.

Nas Figuras 4.40 e 4.41, tem-se a distribuição das tensões nas faces positiva e negativa da placa ($z = \pm h/2$) a meia-altura da placa ($y = a/2$), para algumas relações de λ / λ_{cr} , sendo estes valores concordantes com os observados nas Figuras 4.38 e 4.39.

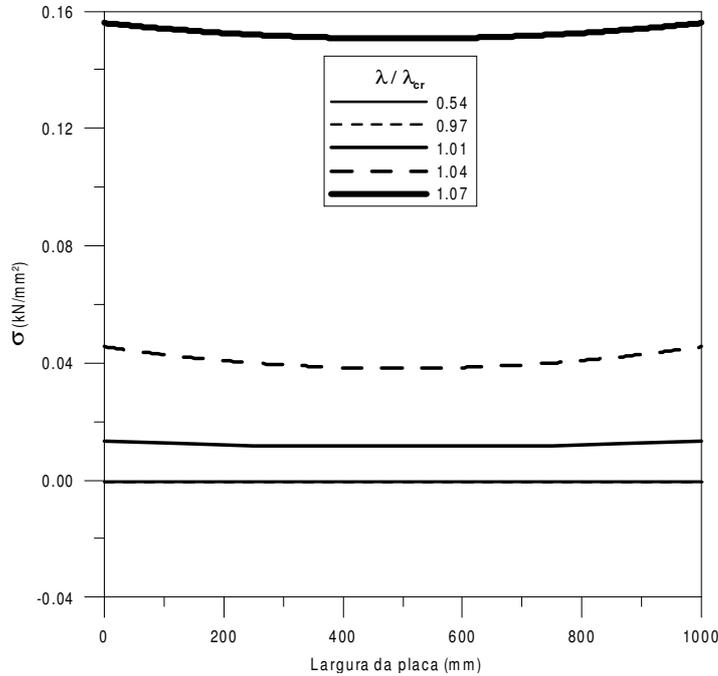


Figura 4.40 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados para algumas relações de λ / λ_{cr} .

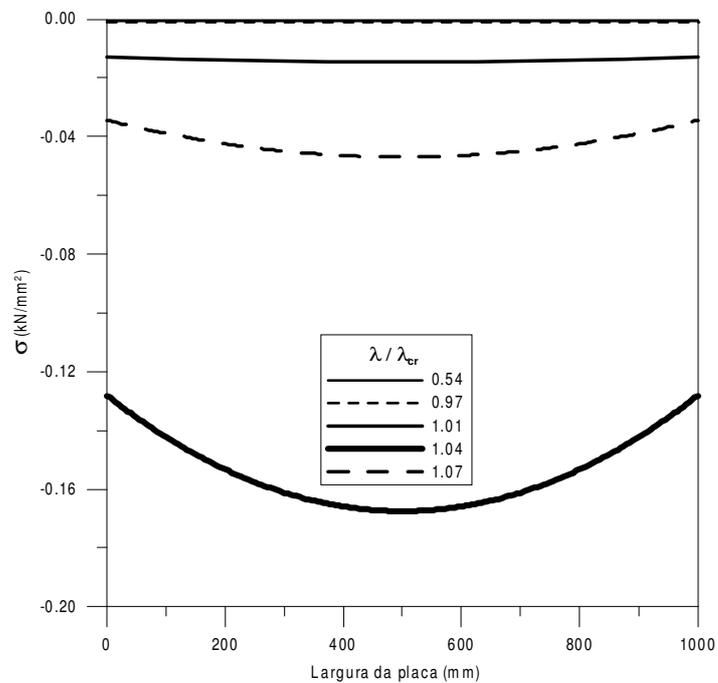


Figura 4.41 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados para algumas relações de λ / λ_{cr} .

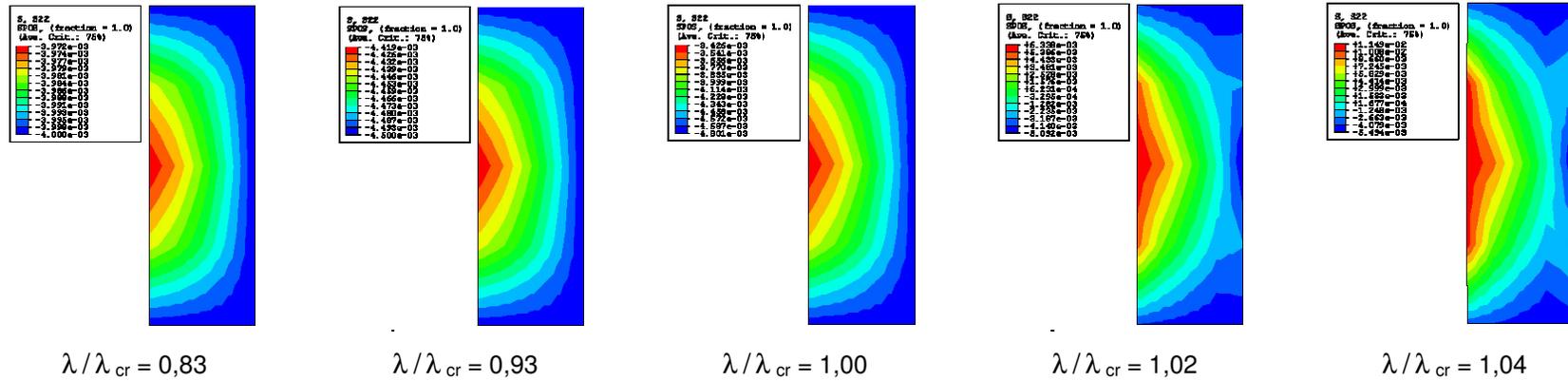


Figura 4.42 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$.

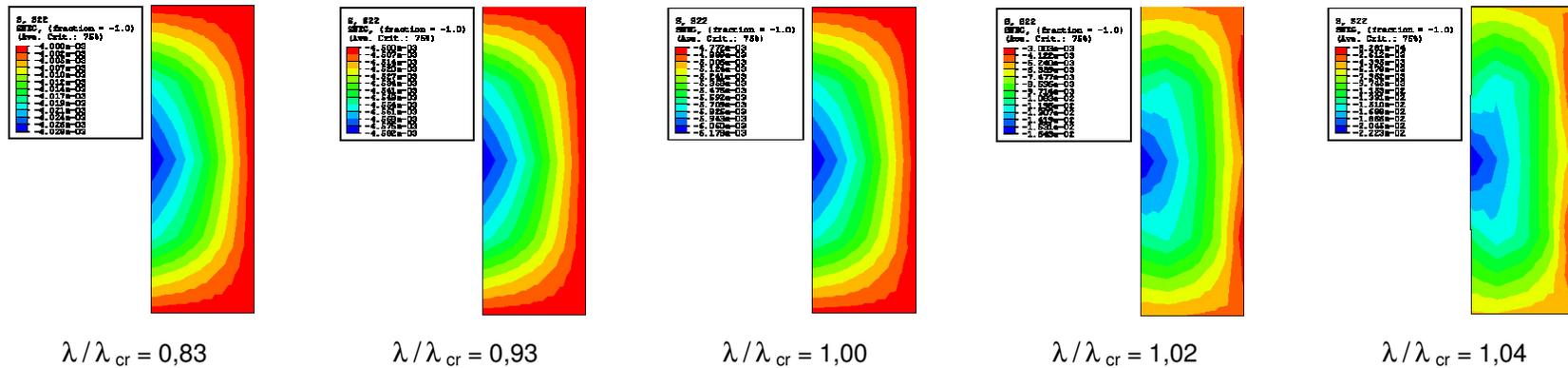


Figura 4.43 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$.

Observa-se nas Figuras 4.44 e 4.45, o estudo da evolução do estado de tensões na placa ao longo do caminho pós-crítico de equilíbrio, para uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$, tendo $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0,a$ apoiados. Para este caso $\lambda_{cr}=0,04815$.

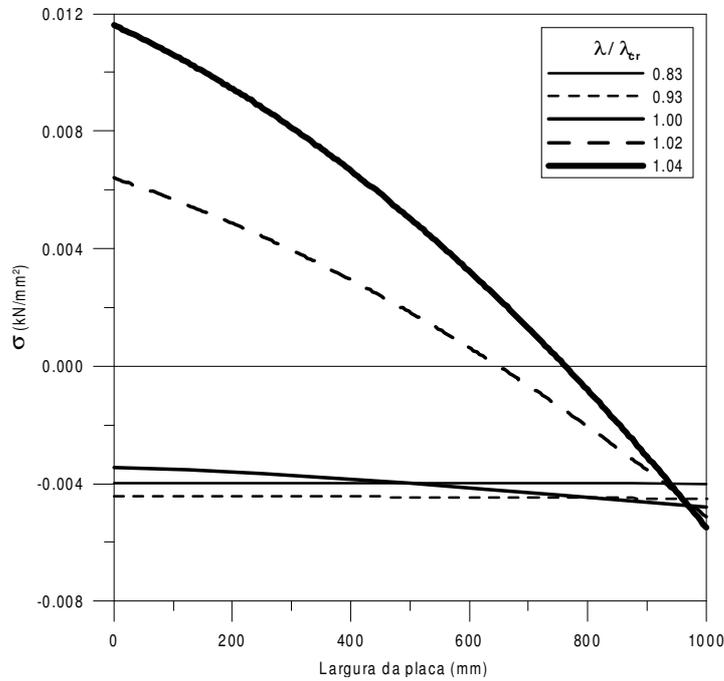


Figura 4.44 – Distribuição das tensões no centro da placa ($y = a/2$), na face positiva, para algumas relações de λ / λ_{cr} . Placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0,a$ apoiados.

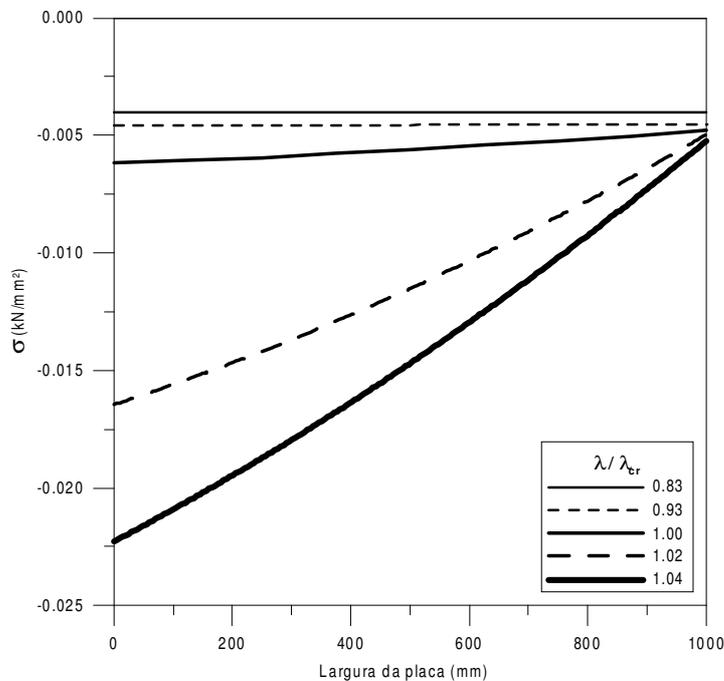


Figura 4.45 – Distribuição das tensões no centro da placa ($y = a/2$), na face negativa, para algumas relações de λ / λ_{cr} . Placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0,a$ apoiados.