2
Teoria de Placas Esbeltas

Neste capítulo apresenta-se um resumo da teoria não linear de placas esbeltas. Um tratamento detalhado desta teoria e sua aplicação no estudo da estabilidade de placas pode ser encontrado em Timoshenko & Gere (1961), Brush & Almroth (1975), Allen & Bulson (1980), Bazant & Cedolin (1991) e Reis & Camotim (2001), dentre outros. Este capítulo segue a formulação apresentada por Brush & Almroth (1975).

2.1.
Flexão de Placas Esbeltas

Placas são estruturas laminares cuja geometria se caracteriza pela existência de uma superfície média *S*, definida por duas coordenadas (*x, y*), e de uma espessura *h*, medida segundo a normal dessa superfície (*z*).

A teoria de placas esbeltas é similar à teoria de vigas, porém o efeito da flexão tem que ser avaliado nas duas direções.

Considere um elemento de placa retangular (*dxdy*), como mostra a Figura 2.1, formado pela interseção de duas faixas.

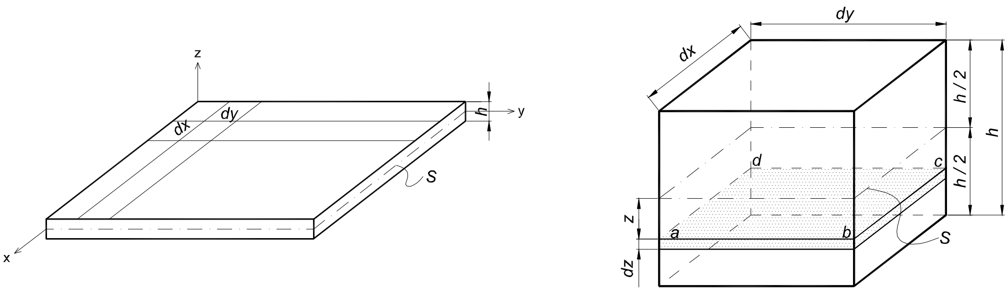

Figura 2.1 – Elemento de placa.

O objetivo da teoria de placas esbeltas é reduzir um problema tri-dimensional a um problema bi-dimensional. As forças e momentos internos agindo nas faces de um elemento de placa *dxdy*, como mostra a Figura 2.2, têm suas magnitudes (por unidade de comprimento) relacionadas às tensões internas pelas equações:

$$
\begin{aligned}
N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y dz \\
N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} dz \\
Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} dz \qquad (2.1) \\
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y z dz \\
M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} z dz & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} z dz
\end{aligned}
$$

Onde: h é a espessura da placa

N_x , N_y são as forças normais ao plano

N_{xy} , N_{yx} são as forças cisalhantes no plano

Q_x , Q_y são as forças cisalhantes transversais ao plano

M_x , M_y são os momentos fletores

M_{xy} , M_{yx} são os momentos torsores

σ_x , σ_y são as tensões normais ao plano

τ_{xy} , τ_{yx} são as tensões cisalhantes no plano

Os símbolos $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$, etc., denotam componentes de tensão de um ponto qualquer ao longo da espessura da placa, distinguindo-os de σ_x , τ_{xy} , etc., os quais correspondem às tensões no plano médio *(z=0)*.

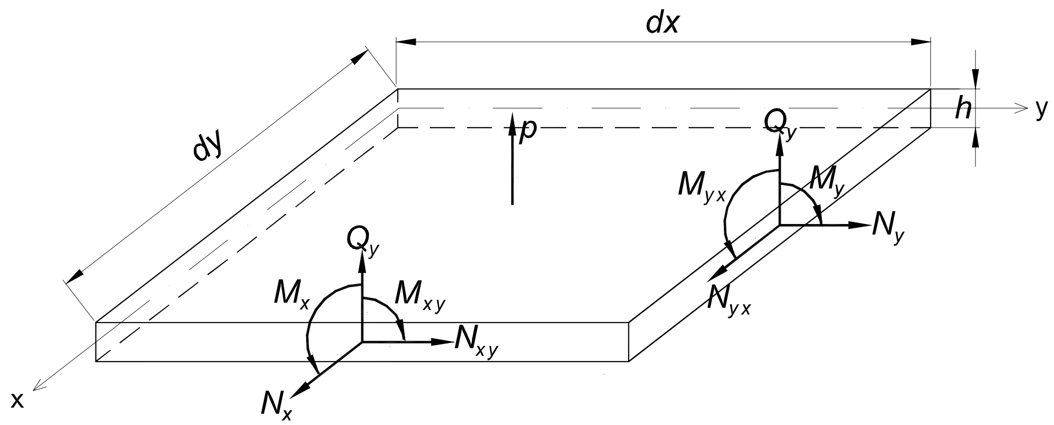

Figura 2.2 – Elemento de placa *dxdy* em configuração indeformada.

A teoria de placas esbeltas pode ser deduzida em termos das seguintes aproximações:

- A espessura da placa é pequena se comparada com as outras dimensões;
- O plano médio da placa não se alonga durante a flexão, permanece uma superfície neutra análoga ao eixo neutro de uma viga;
- Uma normal ao plano médio indeformado permanece reta, normal, e inextensível durante a deformação, de modo que as deformações normais e cisalhantes transversais possam ser desprezadas ao se derivar as relações cinemáticas da placa.
- As seções planas giram durante a flexão, permanecendo normais à superfície neutra, de modo que as tensões e deformações sejam proporcionais à sua distância da superfície neutra;
- As tensões normais transversais são pequenas quando comparadas com outras componentes de tensões normais, de modo que podem ser desprezadas nas relações tensão-deformação.

Estas aproximações são conhecidas como hipóteses de Kirchhoff. Como conseqüência da primeira aproximação, as componentes de deslocamentos de qualquer ponto na placa, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, podem ser expressas em termos das correspondentes quantidades do plano médio, *u, v, w* e das rotações β_x e β_y relativas, respectivamente, aos eixos *y* e *x* (Figura 2.3), a saber:

$$\bar{u} = u + z\beta_x$$
$$\bar{v} = v + z\beta_y \qquad (2.2)$$
$$\bar{w} = w$$

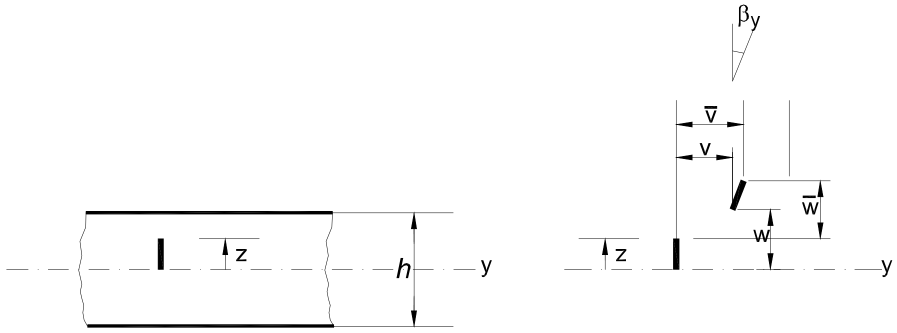

Figura 2.3 – Normal à superfície média da placa antes de depois da deformação.

Considera-se, como uma primeira aproximação da teoria não-linear de placas, que as deformações sejam pequenas quando comparadas com a unidade, que as rotações relativas aos eixos *x* e *y* sejam moderadamente pequenas, e que as rotações relativas à direção *z* seja desprezível. Assim tem-se as seguintes relações deformação-deslocamento para uma fibra qualquer da placa:

$$\bar{\varepsilon}_x = \bar{u}_{,x} + \tfrac{1}{2}\bar{w}_{,x}^{\,2}$$
$$\bar{\varepsilon}_y = \bar{v}_{,y} + \tfrac{1}{2}\bar{w}_{,y}^{\,2} \qquad (2.3)$$
$$\bar{\gamma}_{xy} = \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x+} + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y}$$

onde se considerou que, para esta classe de deformações, $\beta_x = -w_{,x}$ e $\beta_y = -w_{,y}$.

Substituindo as eqs. (2.2) nas eqs. (2.3), tem-se:

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x + zk_x$$
$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_y + zk_y \qquad (2.4)$$
$$\bar{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} + 2zk_{xy}$$

onde ε_x, ε_y, γ_{xy} denotam as deformações correspondentes aos pontos no plano médio da placa, e K_x K_y *e* K_{xy} são as mudanças de curvatura.

Assim, têm-se as relações cinemáticas que descrevem o comportamento geometricamente não-linear de placas esbeltas:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \tfrac{1}{2}\beta_x^{\,2} \qquad \beta_x = -w_{,x} \qquad k_x = \beta_{x,x}$$
$$\varepsilon_y = v_{,y} + \tfrac{1}{2}\beta_y^{\,2} \qquad \beta_y = -w_{,y} \qquad k_y = \beta_{y,y} \tag{2.5}$$
$$\gamma_{xy} = (u_{,y} + v_{,x}) + \beta_x\beta_y \qquad k_{xy} = \tfrac{1}{2}(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})$$

A Lei de Hooke Generalizada para as componentes de deformação $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ e $\bar{\gamma}_{xy}$ em um meio isotrópico tem a forma:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{E}[\bar{\sigma}_x - \nu(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)]$$
$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{E}[\bar{\sigma}_y - \nu(\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x)] \tag{2.6}$$
$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\bar{\tau}_{xy}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de elasticidade.

Como conseqüência da segunda aproximação da teoria de placas esbeltas, $\bar{\sigma}_z$ é desprezível. Assim, pelas eqs. (2.6), tem-se:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{\varepsilon}_x + \nu\bar{\varepsilon}_y)$$
$$\bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{\varepsilon}_y + \nu\bar{\varepsilon}_x) \tag{2.7}$$
$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\bar{\gamma}_{xy}$$

Substituindo as eqs. (2.7) e (2.4) nas eqs. (2.1) e integrando as expressões resultantes, obtém-se:

$$N_x = C(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \qquad M_x = D(k_x + \nu k_y)$$
$$N_y = C(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \qquad M_y = D(k_y + \nu k_x) \tag{2.8a}$$
$$N_{xy} = C\frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy} \qquad M_{xy} = D(1-\nu)k_{xy}$$

onde

$$C \equiv \frac{Eh}{1-\nu^2} \qquad \text{e} \qquad D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.8b}$$

2.2. Energia Potencial Estacionária

Uma placa carregada está em equilíbrio se sua energia potencial total V é estacionária. V é estacionária se o integrando na expressão para V satisfizer as equações de Euler-Lagrange.

A energia potencial total de uma placa sujeita a pressão lateral *p(x,y)* e carregada nos bordos é a soma da energia de deformação U e a energia potencial das cargas aplicadas, Ω:

$$V = U + \Omega \tag{2.9}$$

A energia de deformação pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2}\iiint\left(\bar{\sigma}_x\bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y\bar{\varepsilon}_y + \bar{\sigma}_z\bar{\varepsilon}_z + \bar{\tau}_{xy}\bar{\gamma}_{xy} + \bar{\tau}_{yz}\bar{\gamma}_{yz} + \bar{\tau}_{zx}\bar{\gamma}_{zx}\right)dxdydz \tag{2.10}$$

Omitindo $\bar{\gamma}_{yz}$, $\bar{\gamma}_{zx}$ e $\bar{\sigma}_z$, de acordo com as aproximações básicas da teoria de placas esbeltas, substituindo as eqs. (2.7) na eq. (2.10), tem-se:

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\iiint\left(\bar{\varepsilon}_x^{\,2} + \bar{\varepsilon}_y^{\,2} + 2\nu\bar{\varepsilon}_x\bar{\varepsilon}_y + \frac{1-\nu}{2}\bar{\gamma}_{xy}^{\,2}\right)dxdydz \tag{2.11}$$

Substituindo as eqs. (2.4) na eq. (2.11) e integrando em z, tem-se:

$$U = U_m + U_b \tag{2.12}$$

onde:

$$U_m = \frac{C}{2}\iint\left(\varepsilon_x^{\,2} + \varepsilon_y^{\,2} + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^{\,2}\right)dxdy \tag{2.13}$$

é denominada *energia de membrana* e

$$U_b = \frac{D}{2}\iint\left[k_x^{\,2} + k_y^{\,2} + 2\nu k_x k_y + 2(1-\nu)k_{xy}^{\,2}\right]dxdy \tag{2.14}$$

é denominada *energia de flexão*.

Considerando uma carga uniformemente distribuída perpendicular a superfície da placa, p, e uma carga uniformemente distribuída P_y nos bordos $y=0$ e $y=a$, tem-se para a energia potencial, Ω:

$$\Omega = \iint\left(\frac{1}{b}P_y u_{,y} - pw\right)dxdy \tag{2.15}$$

2.3.
Equações de Equilíbrio e Compatibilidade

Considerando o funcional de energia da eq. (2.9) e aplicando-se as ferramentas de cálculo variacional, tem-se, a partir do Princípio da Energia Potencial estacionária, as seguintes equações de equilíbrio em termos dos esforços (ver Figura 2.4):

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \tag{2.16a}$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \tag{2.16b}$$

$$D\nabla^4 w - (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) = p \tag{2.16c}$$

onde:

$$\nabla^4 w = w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} \tag{2.17}$$

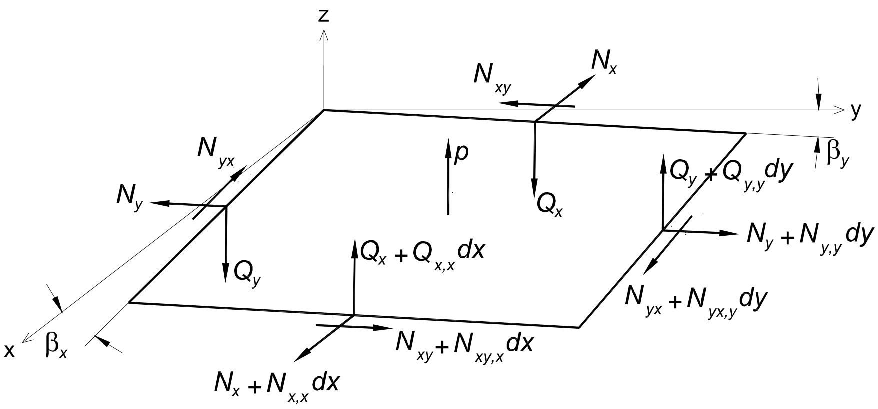

Figura 2.4 – Elemento de placa em configuração deformada – Normal e Cortante.

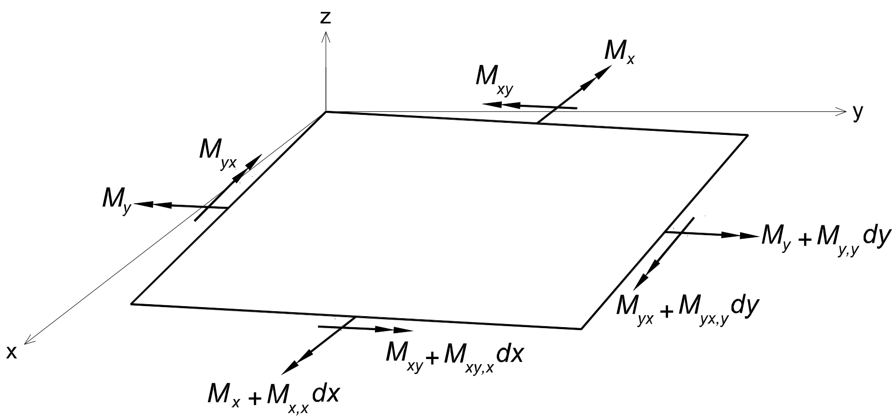

Figura 2.5 – Elemento de placa em configuração deformada – Momento.

Pela introdução de uma função de tensão *f* definida pelas relações:

$$N_x = f_{,yy} \qquad N_y = f_{,xx} \qquad N_{xy} = -f_{,xy} \tag{2.18}$$

Onde $f = f(x,y)$, pode-se reduzir o problema a duas variáveis, já que estas expressões satisfazem as eqs. (2.16a) e (2.16b). Introduzindo as eqs. (2.18) na eq. (2.16c), tem-se:

$$D\nabla^4 w - (f_{,yy}w_{,xx} - 2f_{,xy}w_{,xy} + f_{,xx}w_{,yy}) = p \tag{2.19}$$

Precisa-se, para resolver o problema, de uma segunda equação correlacionando *w* e *f*. Considerando a compatibilidade geométrica, das eqs. (2.5) tem-se que:

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - \gamma_{xy,xy} = w_{,xy}{}^2 - w_{,xx}w_{,yy} \tag{2.20}$$

Das eqs. (2.8a) e (2.18), tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh}\left(f_{,yy} - \nu f_{,xx}\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh}\left(f_{,xx} - \nu f_{,yy}\right) \qquad \gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh}f_{,xy} \tag{2.21}$$

Assim:

$$\nabla^4 f - Eh(w_{,xy}{}^2 - w_{,xx}w_{,yy}) = 0 \tag{2.22}$$

As eqs. (2.19) e (2.22) formam um sistema de duas equações com duas variáveis, *w* e *f*. Elas são chamadas de equações de equilíbrio e compatibilidade, respectivamente. Tais equações são conhecidas como as equações não-lineares de Von Kármán. A solução destas equações permite analisar o comportamento não-linear de placas esbeltas, sendo esta a teoria usada no presente estudo.

2.4.
Critério de Equilíbrio Adjacente

Para estudar a possível existência de configurações de equilíbrio adjacentes, consideram-se pequenos incrementos nas variáveis de deslocamento:

$$\begin{aligned} u &\to u_0 + u_1 \\ v &\to v_0 + v_1 \\ w &\to w_0 + w_1 \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde o sub-índice 0 corresponde ao estado de equilíbrio cuja estabilidade se deseja analisar e o sub-índice 1, ao estado perturbado.

Introduzindo as eqs (2.23) nas eqs. (2.16), e linearizando as equações resultantes, tem-se as equações de equilíbrio crítico:

$$
\begin{gathered}
N_{x1,x} + N_{xy1,y} = 0 \\
N_{xy1,x} + N_{y1,y} = 0 \\
D\nabla^4 w_1 - (N_{x0} w_{1,xx} + 2N_{xy0} w_{1,xy} + N_{y0} w_{1,yy}) = 0
\end{gathered}
\qquad (2.24)
$$

Assim o problema clássico de estabilidade de placas, isto é, a determinação das cargas e modos críticos, pode ser analisado através da resolução da terceira equação do sistema (2.24), como será mostrado no Capítulo 4.