

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Patrícia Carla da Cunha

Comportamento Crítico e Pós-Crítico de Placas Dobradas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro
Setembro de 2005.



Patrícia Carla da Cunha

Comportamento Crítico e Pós-Crítico de Placas Dobradas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Eduardo de Miranda Batista

Programa de Engenharia Civil – COPPE / UFRJ

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Djenane Pamplona

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial
do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 06 de setembro de 2005.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Patrícia Carla da Cunha

Graduou-se em Engenharia Civil pelo Centro Universitário de Volta Redonda – UniFOA, em 2002 e em Matemática pelo Centro Universitário de Barra Mansa – UBM, em 2000.

Ficha Catalográfica

Cunha, Patrícia Carla da

Comportamento Crítico e Pós-Crítico de Placas Dobradas / Patrícia Carla da Cunha; orientador: Paulo Batista Gonçalves - Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2005.

v. 195f.:il; 29,7cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil - Teses, 2. Instabilidade de placas, 3. Placas dobradas, 4. Comportamento pós-crítico. 5. Placas em "V". I. Gonçalves, Paulo Batista II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus amados pais: Fátima e Osmar,
e ao meu querido avô João Batista...

Agradecimentos

À Deus, força de todos os dias e que nas horas em que achava impossível superar os obstáculos, me carregava no colo...

Aos meus pais, avô João, Lala e querido irmão Gustavo, pelo amor, carinho, incentivo e orações durante o período deste trabalho.

À minha estimada e admirável irmã Gisele e ao querido Julinho, que por muitas vezes não me deixaram desanimar, companheiros e presenças fundamentais nesta jornada...

Ao professor Paulo pela orientação deste trabalho, transmitindo sempre confiança e serenidade.

Aos professores da banca e aos professores do Centro Universitário de Volta Redonda, em especial aos professores Francisco Abreu, Nacib Abdala e Ildony Bellei pelo incentivo e apoio.

A todos os amigos de Barra Mansa que de uma forma ou de outra contribuíram para que este ciclo se fechasse, em especial a Johnny...

Aos amigos da Pós: Cyntia, Carol, Juliana Meneghel, Paôla, Thaís, Bianca, Salete, Patrício, Gustavo, Jair, Marcelo, Plínio, Ricardo, Alonso, Fred, Alex, Pasquetti, Diego, Walter Edgley, Walter Menezes, Saré, Leandro, Ramires e em especial a Juliana Vianna, que adotei como irmã de coração, pelos inesquecíveis momentos juntos...

Aos amigos, José Roberto Silvestre e Cláudio Carvalho Ribeiro pelas inúmeras vezes que, com carinho, me auxiliaram no ABAQUS.

Aos funcionários do DEC, em especial à Ana Roxo, Cris, Marcel e Léo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Cunha, Patrícia Carla da.; Gonçalves, Paulo Batista (Orientador). **Comportamento Crítico e Pós-Crítico de Placas Dobradas**. Rio de Janeiro, 2005. 195p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho tem por objetivo estudar o comportamento crítico e pós-crítico de placas dobradas. Placas dobradas, tanto de aço quanto de concreto, têm sido usadas com grande frequência em obras de engenharia, particularmente como paredes portantes e coberturas de grandes vãos. Neste último caso, placas dobradas têm uma aplicação semelhante a de cascas esbeltas, sendo, porém, mais simples de construir, dado que são compostas de superfícies planas. Neste trabalho utiliza-se o software ABAQUS para análise de placas dobradas compostas de duas placas formando um dado ângulo entre si. Estuda-se o uso destas placas como paredes portantes sob compressão, sendo conduzido um estudo paramétrico para determinar a influência dos diversos parâmetros geométricos e condições de contorno nas cargas críticas e modos críticos da placa dobrada. A seguir são determinados os caminhos pós-críticos e estuda-se a influência dos diversos parâmetros na rigidez pós-crítica e sensibilidade a imperfeições. Finalmente, estuda-se o comportamento não-linear destas placas sob flexão, sendo investigados os fenômenos de perda de estabilidade associados a este problema.

Palavras-chave

Instabilidade de placas; placas dobradas; comportamento pós-crítico; placas em “V”.

Abstract

Cunha, Patrícia Carla da.; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor). **Buckling and Post-Buckling Behavior of Folded Plates**. Rio de Janeiro, 2005. 195p. M.Sc. Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The aim of the present work is to study the buckling and post-buckling behavior of folded plates. Folded plates, made of steel or concrete, have been widely used in engineering construction as load-bearing walls designed to carry floor and roof loads or roofs for large spaces. In the last case, folded plates work as a thin shell, being however easier to build since they are formed by flat surfaces joined along the fold lines. In this work the software ABAQUS is used to study the behavior of V-shaped folded plates. Initially it is analyzed the behavior of these plates when used as load-bearing walls under axial compression. A detailed parametric analysis is conducted to identify the influence of the geometrical parameters and boundary conditions on critical loads and modes. The influence of these parameters on the post-buckling response, post-critical stiffness and imperfection sensitivity is also investigated. Finally, the non-linear response of V-shaped folded plates under flexure is investigated and the possible instabilities under these loading conditions are analyzed.

Keywords

Plate instability; folded plates; post-buckling behavior; “V” plates.

Sumário

Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	26
Lista de Símbolos	27
1 Introdução	30
1.1. Objetivo	34
1.2. Organização do Texto	35
2 Teoria de Placas Esbeltas	37
2.1. Flexão de Placas Esbeltas	37
2.2. Energia Potencial Estacionária	42
2.3. Equações de Equilíbrio e Compatibilidade	43
2.4. Critério de Equilíbrio Adjacente	44
3 Modelagem Computacional Através do Programa ABAQUS	46
3.1. Características Gerais do Programa ABAQUS	46
3.2. Elemento Finito Adotado	47
3.3. Modelagem das Placas	49
4 Instabilidade de Placas Retangulares sob Compressão	51
4.1. Placa Simplesmente Apoiada nos Quatro Bordos	51
4.1.1. Comportamento Crítico e Pós-Crítico	55
4.1.2. Evolução do Estado de Tensões	57
4.2. Placa com Condições de Contorno Arbitrárias	69
4.2.1. Comportamento Crítico e Pós-Crítico	72
4.2.2. Evolução do Estado de Tensões	76
5 Instabilidade de Placas Dobradas sob Compressão	81
5.1. Variação do Ângulo de Dobra (θ)	81

5.1.1 Todos os Bordos Apoiados	81
5.1.2. Bordos Carregados Apoiados e os Demais Livres	89
5.2. Ângulo de Dobra igual a 90° - Variação de H	96
5.2.1. Todos os Bordos Apoiados	96
5.2.2. Bordos Carregados Apoiados e os Demais Livres	100
6 Comportamento Pós-Crítico de Placas Dobradas sob Compressão	104
6.1. Estudo Paramétrico do Comportamento Pós-Crítico	104
6.1.1. Variação do Ângulo de Dobra (θ)	104
6.1.1.1. Todos os Bordos Apoiados	104
6.1.1.2. Bordos Carregados Apoiados e os Demais Livres	107
6.1.2. Ângulo de Dobra igual a 90° - Variação de H	109
6.1.2.1. Placa com Todos os Bordos Apoiados	109
6.1.2.2. Bordos Carregados Apoiados e os Demais Livres	112
6.2. Evolução do Estado de Tensões em Placas Dobradas	115
6.2.1. Variação do Ângulo de Dobra (θ)	115
6.2.1.1. Todos os Bordos Apoiados	116
6.2.1.2. Bordos Carregados Apoiados e os Demais Livres	128
6.2.2.1. Todos os Bordos Apoiados	138
6.3. Influência da Dobra no Comportamento de Placas	157
7 Comportamento de Placas Dobradas sob Flexão	159
7.1. Comportamento Não-Linear	159
7.2. Evolução do Estado de Tensões em Placas Dobradas	163
8 Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	174
8.1. Conclusões	174
8.2. Sugestões para Trabalhos Futuros	177
Referências Bibliográficas	178
Anexo A - Entrada de Dados de Placa Dobrada sob Compressão Axial para obter as Cargas e os Modos de Flambagem	181

Anexo B - Entrada de Dados de Placa Dobrada sob Compressão Axial para obter o Caminho Pós-Crítico 186

Anexo C - Entrada de Dados de Placa Dobrada sob Flexão para estudo do Comportamento Não-Linear 191

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Placa esbelta: (a) Plana sob flexão; (b) Dobrada / Enrijecida. http://www.ul.ie/~gaughran/Gildea/page10.htm	30
Figura 1.2 – Placa esbelta com: (a) Cargas além de sua capacidade; (b) Enrijecedores transversais às extremidades. http://www.ul.ie/~gaughran/Gildea/page10.htm	31
Figura 1.3 – Placa esbelta: (a) Plana / Flambada; (b) Dobrada / Enrijecida. http://www.ul.ie/~gaughran/Gildea/page10.htm	31
Figura 1.4 – Placa dobrada: (a) Sem Momento Fletor; (b) Sujeita ao Momento Fletor. http://www.ul.ie/~gaughran/Gildea/page10.htm	32
Figura 1.5 - Exemplos de aplicação de <i>folded plates</i> como paredes portantes. http://www.cardboardschool.co.uk/content/index1.htm	32
Figura 1.6 - Exemplos de aplicação de <i>folded plates</i> como cobertura de grandes vãos. http://www.ketchum.org/shellpix.html	32
Figura 1.7 - Placa dobrada sob compressão axial e: (a) θ variável; (b) $\theta = 90^\circ$ e H variável.	35
Figura 2.1 – Elemento de placa.	37
Figura 2.2 – Elemento de placa $dx dy$ em configuração indeformada.	39
Figura 2.3 – Normal à superfície média da placa antes de depois da deformação.	40
Figura 2.4 – Elemento de placa em configuração deformada – Normal e Cortante.	43
Figura 2.5 – Elemento de placa em configuração deformada – Momento.	43
Figura 3.1 – Ordenação dos nós no elemento de casa S8R5.	48
Figura 3.2 – Descrição do elemento de casca S8R5.	48
Figura 3.3 – Placa dobrada com cada placa discretizada em 16 elementos e com todos os bordos apoiados.	49
Figura 3.4 – Deslocamentos e rotações possíveis de serem restringidos em um nó.	50
Figura 4.1 – Placa retangular com bordos $x=0,b$ e $y=0,a$ simplesmente	

apoiados, sob compressão.	51
Figura 4.2 – Variação do parâmetro k em relação a α .	53
Figura 4.3 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha=1.0$.	55
Figura 4.4 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha=1.5$.	55
Figura 4.5 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha=2.0$.	55
Figura 4.6 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha=2.5$.	56
Figura 4.7 – Cinco primeiros modos de bifurcação e os respectivos valores de λ para uma placa retangular simplesmente apoiada sob compressão axial e $\alpha=3.0$.	56
Figura 4.8 – Caminhos pós-críticos de equilíbrio para valores selecionados de α - Placa retangular com todos os bordos simplesmente apoiados sob compressão axial.	57
Figura 4.9 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 1$ para valores crescentes de λ .	59
Figura 4.10 – Distribuição das tensões na face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha=1$ para valores crescentes de λ .	60
Figura 4.11 – Distribuição das tensões no centro ($y= a/2$) da face positiva ($z = h/2$) de uma placa retangular com $\alpha = 1.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	61
Figura 4.12 – Distribuição das tensões no centro ($y= a/2$) da face negativa ($z = -h/2$) de uma placa retangular com $\alpha = 1.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	61
Figura 4.13 – Distribuição das tensões no bordo da placa ($y = 0$).	

Face positiva.	62
Figura 4.14 – Distribuição das tensões no bordo da placa ($y = 0$).	
Face negativa.	62
Figura 4.15 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$.	63
Figura 4.16 – Distribuição das tensões na face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$.	63
Figura 4.17 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	64
Figura 4.18 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	64
Figura 4.19 – Distribuição das tensões no bordo $y = 0$ da face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	65
Figura 4.20 – Distribuição das tensões no bordo $y = 0$ da face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	65
Figura 4.21 – Comportamento pós-crítico de placas retangulares comprimidas axialmente (Reis & Camotim, 2001).	66
Figura 4.22 – Caminhos não-lineares de equilíbrio de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 1.0$ e com diferentes níveis de imperfeição.	67
Figura 4.23 – Cálculo da largura efetiva.	68
Figura 4.24 – Placa retangular sob compressão axial com $x=0, b$ livres e $y=0, a$ apoiados.	69
Figura 4.25 – Placa retangular sob compressão axial com $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0, a$ apoiados.	70
Figura 4.26 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha = 1.0$.	72
Figura 4.27 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha = 1.5$.	72

- Figura 4.28 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=2.0$. 72
- Figura 4.29 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=2.5$. 73
- Figura 4.30 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=3.0$. 73
- Figura 4.31 – Caminhos de Equilíbrio para valores seleccionados de α para placa retangular sob compressão axial com $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados. 74
- Figura 4.32 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=1.0$. 74
- Figura 4.33 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=1.5$. 74
- Figura 4.34 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=2.0$. 75
- Figura 4.35 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=2.5$. 75
- Figura 4.36 – Cinco primeiros modos de bifurcação para placa retangular sob compressão axial e $\alpha=3.0$. 75
- Figura 4.37 – Caminhos de pós-críticos de equilíbrio valores seleccionados de α para placa retangular sob compressão axial com $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0,a$ apoiados 76
- Figura 4.38 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$. 77
- Figura 4.39 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$. 77
- Figura 4.40 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face positiva de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados para algumas relações de λ/λ_{cr} . 78
- Figura 4.41 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $x=0,b$ livres e $y=0,a$ apoiados para algumas relações de λ/λ_{cr} . 78
- Figura 4.42 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa

- retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$. 79
- Figura 4.43 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3$. 79
- Figura 4.44 – Distribuição das tensões no centro da placa ($y = a/2$), na face positiva, para algumas relações de λ/λ_{cr} . Placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0,a$ apoiados. 80
- Figura 4.45 – Distribuição das tensões no centro da placa ($y = a/2$), na face negativa, para algumas relações de λ/λ_{cr} . Placa retangular sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $x=0$ livre e $x=b$ e $y=0,a$ apoiados. 80
- Figura 5.1 – Placa dobrada sob compressão axial e com todos os bordos apoiados. 81
- Figura 5.2 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=15^\circ$. 82
- Figura 5.3 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=30^\circ$. 82
- Figura 5.4 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=45^\circ$. 82
- Figura 5.5 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=60^\circ$. 83
- Figura 5.6 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=75^\circ$. 83
- Figura 5.7 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α para $\theta=90^\circ$. 83
- Figura 5.8 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=105^\circ$. 83
- Figura 5.9 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada

sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=120^\circ$. 84

Figura 5.10 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=135^\circ$. 84

Figura 5.11 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=150^\circ$. 84

Figura 5.12 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, para cinco valores de α e $\theta=165^\circ$. 85

Figura 5.13 – Cinco primeiros modos e respectivas cargas de bifurcação λ para uma: (a) placa dobrada com $\theta=15^\circ$ e (b) placa isolada, sob compressão axial com todos os bordos apoiados e $\alpha=1.0$. 85

Figura 5.14 – Cinco primeiros modos e respectivas cargas de bifurcação λ para uma: (a) placa dobrada com $\theta=90^\circ$ e (b) placa isolada, sob compressão axial com todos os bordos apoiados e $\alpha=1.0$. 86

Figura 5.15 – Cinco primeiros modos e respectivas cargas de bifurcação λ para uma: (a) placa dobrada com $\theta=165^\circ$ e (b) placa isolada, sob compressão axial com todos os bordos apoiados e $\alpha=1.0$. 86

Figura 5.16 – Variação do valor de λ crítico de placas dobradas em função dos ângulos para cinco valores de α com todos os bordos apoiados, sendo estes resultados comparados aos de uma placa isolada. 86

Figura 5.17 – Placa dobrada sob compressão axial e apenas os bordos carregados apoiados 89

Figura 5.18 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=15^\circ$. 89

Figura 5.19 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=30^\circ$. 89

Figura 5.20 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para

- alguns α e $\theta=45^\circ$. 90
- Figura 5.21 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=60^\circ$. 90
- Figura 5.22 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=75^\circ$. 90
- Figura 5.23 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=90^\circ$. 90
- Figura 5.24 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=105^\circ$. 91
- Figura 5.25 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=120^\circ$. 91
- Figura 5.26 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=135^\circ$. 91
- Figura 5.27 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=150^\circ$. 91
- Figura 5.28 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para alguns α e $\theta=165^\circ$. 92
- Figura 5.29 – Cinco primeiros modos de bifurcação e seus respectivos λ de: (a) placa dobrada com $\theta=15^\circ$, sob compressão axial, com apenas os bordos carregados apoiados e (b) placa isolada, sob compressão axial com apenas um dos bordos descarregados apoiado, para $\alpha=1.0$. 92
- Figura 5.30 – Cinco primeiros modos de bifurcação e seus respectivos λ de: (a) placa dobrada com $\theta=90^\circ$, sob compressão axial, com apenas os bordos carregados apoiados e (b) placa isolada, sob compressão axial com apenas um dos bordos descarregados apoiado, para $\alpha=1.0$. 93

Figura 5.31 – Cinco primeiros modos de bifurcação e seus respectivos λ de: (a) placa dobrada com $\theta=165^\circ$, sob compressão axial, com apenas os bordos carregados apoiados e (b) placa isolada, sob compressão axial com apenas um dos bordos descarregados livres, para $\alpha=1.0$. 93

Figura 5.32 – Variação do valor de λ crítico de placas dobradas em função dos ângulos para cinco valores de α com apenas os bordos carregados apoiados, sendo estes resultados comparados aos de uma placa isolada com o bordo $y=0$ livre. 95

Figura 5.33 – Placa dobrada sob compressão axial, com todos os bordos apoiados, $\theta=90^\circ$ e H variável. 96

Figura 5.34 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, $\theta=90^\circ$ e para cinco valores de α para $H/b=0.25$. 97

Figura 5.35 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, $\theta=90^\circ$ e para cinco valores de α para $H/b=0.50$. 97

Figura 5.36 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, $\theta=90^\circ$ e para cinco valores de α para $H/b=0.75$. 97

Figura 5.37 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados, $\theta=90^\circ$ e para cinco valores de α para $H/b=1$. 97

Figura 5.38 - Carga crítica $\times H/b$ para alguns α de placa dobrada sob compressão axial com todos os bordos apoiados e $\theta=90^\circ$. 98

Figura 5.39 – Cinco primeiros modos de bifurcação e seus respectivos λ para placa dobrada com todos os bordos apoiados, $\alpha=1.0$ e $H/b=0.50$. 99

Figura 5.40 – Placa dobrada sob compressão axial, com apenas os bordos carregados apoiados e os demais livres. $\theta=90^\circ$ e H variável. 100

Figura 5.41 - Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para cinco valores de α e $H/b=0.25$. 100

Figura 5.42 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para

cinco valores de α e $H/b=0.50$.	101
Figura 5.43 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para cinco valores de α e $H/b=0.75$.	101
Figura 5.44 – Modo crítico e seu respectivo λ crítico para placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados, para cinco valores de α e $H/b=1$.	101
Figura 5.45 – Carga crítica $\times H/b$ para alguns α de placa dobrada sob compressão axial com apenas os bordos carregados apoiados e $\theta=90^\circ$.	102
Figura 5.46 – Cinco primeiros modos de bifurcação e seus respectivos λ para placa dobrada com apenas os bordos carregados apoiados, $\alpha=1.0$ e $H/b=0.50$.	103
Figura 6.1 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para alguns valores de α e $\theta=15^\circ$.	105
Figura 6.2 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para alguns valores de α e $\theta=90^\circ$.	105
Figura 6.3 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para alguns valores de α e $\theta=165^\circ$.	106
Figura 6.4 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para $\alpha =3.0$ e $\theta=15^\circ, 90^\circ$ e 165° .	106
Figura 6.5 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para alguns valores de α e $\theta=15^\circ$.	107
Figura 6.6 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para alguns valores de α e $\theta=90^\circ$.	108
Figura 6.7 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para alguns valores de α e $\theta=165^\circ$.	108
Figura 6.8 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para $\alpha = 3.0$ e $\theta=15^\circ, 90^\circ$ e 165° .	109
Figura 6.9 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para H/b variável e $\alpha=1.0$.	110
Figura 6.10 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para H/b variável e $\alpha=1.5$.	110

- Figura 6.11 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para H/b variável e $\alpha=2.0$. 111
- Figura 6.12 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para H/b variável e $\alpha=2.5$. 111
- Figura 6.13 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com todos os bordos apoiados para H/b variável e $\alpha=3.0$. 112
- Figura 6.14 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para H/b variável e $\alpha=1.0$. 113
- Figura 6.15 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para H/b variável e $\alpha=1.5$. 113
- Figura 6.16 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para H/b variável e $\alpha=2.0$. 114
- Figura 6.17 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para H/b variável e $\alpha=2.5$. 114
- Figura 6.18 – Caminhos pós-críticos de placas dobradas com apenas os bordos carregados apoiados para H/b variável e $\alpha=3.0$. 115
- Figura 6.19 – Distribuição das tensões na face positiva de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha=3.0$ e $\theta=15^\circ$. 117
- Figura 6.20 – Distribuição das tensões na face negativa de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha=3.0$ e $\theta=15^\circ$. 118
- Figura 6.21 – Distribuição das tensões a meia altura ($y = a/2$) da face positiva de uma placa dobrada com $\theta=15^\circ$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} . 119
- Figura 6.22 – Distribuição das tensões a meia altura ($y = a/2$) da face negativa de uma placa dobrada com $\theta=15^\circ$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} . 120
- Figura 6.23 – Distribuição das tensões no bordo. Face positiva de uma placa dobrada com $\theta=15^\circ$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} . 120
- Figura 6.24 – Distribuição das tensões no bordo. Face negativa de uma placa dobrada com $\theta=15^\circ$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} . 121
- Figura 6.25 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha=3.0$ e $\theta=90^\circ$. 122
- Figura 6.26 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa

dobrada sob compressão axial com $\alpha = 3$ e $\theta = 90^\circ$.	123
Figura 6.27 – Distribuição das tensões a meia altura da face positiva de uma placa dobrada com $\theta = 90^\circ$ e $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	124
Figura 6.28 – Distribuição das tensões a meia altura da face negativa de uma placa dobrada com $\theta = 90^\circ$ e $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	124
Figura 6.29 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha = 3$ e $\theta = 165^\circ$.	125
Figura 6.30 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha = 3$ e $\theta = 165^\circ$.	126
Figura 6.30.1 – Distribuição das tensões a meia altura da face positiva de uma placa dobrada com $\theta = 165^\circ$ e $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	127
Figura 6.32 – Distribuição das tensões a meia altura da face negativa de uma placa dobrada com $\theta = 165^\circ$ e $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	127
Figura 6.33 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $\theta = 15^\circ$.	128
Figura 6.34 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $\theta = 15^\circ$.	129
Figura 6.35 – Distribuição das tensões a meia altura $y = a/2$ da face positiva de uma placa dobrada com $\theta = 15^\circ$ e $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	130
Figura 6.36 – Distribuição das tensões a meia altura $y = a/2$ da face negativa de uma placa dobrada com $\theta = 15^\circ$ e $\alpha = 3.0$ para algumas relações de λ / λ_{cr} .	131
Figura 6.37 – Placa dobrada com $\theta = 15^\circ$ e $\alpha = 3.0$.	131
Figura 6.38 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $\theta = 90^\circ$.	132
Figura 6.39 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha = 3.0$ e $\theta = 90^\circ$.	133
Figura 6.40 – Distribuição das tensões a meia altura da face positiva de	

uma placa dobrada com $\theta=90^\circ$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	134
Figura 6.41 – Distribuição das tensões a meia altura da face negativa de uma placa dobrada com $\theta=90^\circ$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	134
Figura 6.42 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha=3.0$ e $\theta=165^\circ$.	135
Figura 6.43 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob compressão axial com $\alpha=3.0$ e $\theta=165^\circ$.	136
Figura 6.44 – Distribuição das tensões a meia altura da face positiva de uma placa dobrada com $\theta=165^\circ$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	137
Figura 6.45 – Distribuição das tensões a meia altura da face negativa de uma placa dobrada com $\theta=165^\circ$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	137
Figura 6.46 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada sob compressão axial com $H/b=0.25$.	139
Figura 6.47 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob compressão axial com $H/b=0.25$.	140
Figura 6.48 – Distribuição das tensões a meia altura da face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.25$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	141
Figura 6.49 – Distribuição das tensões a meia altura da face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.25$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	141
Figura 6.50 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.50$.	142
Figura 6.51 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.50$.	143
Figura 6.52 – Distribuição das tensões a meia altura ($y = a/2$) da face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.50$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	144
Figura 6.53 – Distribuição das tensões a meia altura ($y = a/2$) da face	

negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.50$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	144
Figura 6.54 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.75$.	145
Figura 6.55 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.75$.	146
Figura 6.56 – Distribuição das tensões a meia altura da face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.75$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	147
Figura 6.57 – Distribuição das tensões a meia altura da face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.75$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	147
Figura 6.58 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.25$.	148
Figura 6.59 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.25$.	149
Figura 6.60 – Distribuição das tensões a meia altura ($y = a/2$) da face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.25$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	150
Figura 6.61 – Distribuição das tensões a meia altura ($y = a/2$) da face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.25$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	150
Figura 6.62 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.50$.	151
Figura 6.63 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.50$.	152
Figura 6.64 – Distribuição das tensões a meia altura da face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.50$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	153
Figura 6.65 – Distribuição das tensões a meia altura da face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.50$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	153
Figura 6.66 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa	

dobrada com $H/b=0.75$.	154
Figura 6.67 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada com $H/b=0.75$.	155
Figura 6.68 – Distribuição das tensões a meia altura da face positiva de uma placa dobrada com $H/b=0.75$ e $\alpha=3.0$ para algumas relações de λ/λ_{cr} .	156
Figura 6.70 – Cinco primeiros modos de flambagem de placa retangular com $\alpha=1.0$.	157
Figura 6.71 – Cinco primeiros modos de flambagem de placa dobrada com $\alpha=2.0$.	157
Figura 6.72 – Caminho pós-crítico de uma placa isolada quadrada e placa dobrada com $\theta=15^\circ$ sob compressão axial, com apenas os bordos carregados apoiados.	157
Figura 6.73 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face positiva.	158
Figura 6.74 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face negativa.	158
Figura 7.1 – Placa dobrada sob flexão.	159
Figura 7.2 – Placa dobrada sob flexão, com todos os bordos apoiados e $\theta = 10^\circ$.	160
Figura 7.3 – Placa dobrada sob flexão, com todos os bordos apoiados e $\theta = 12.5^\circ$.	161
Figura 7.4 – Placa dobrada sob flexão, com todos os bordos apoiados e $\theta = 15^\circ$.	162
Figura 7.5 – Configurações estudadas ao longo do caminho não-linear de equilíbrio.	163
Figura 7.6 – Comparação do comportamento não-linear com o comportamento linearizado.	164
Figura 7.7 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada sob flexão, $\alpha=3.0, \theta=10^\circ$ e todos bordos apoiados, para quatro configurações de equilíbrio.	165
Figura 7.8 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob flexão, $\alpha=3.0, \theta=10^\circ$ e todos bordos apoiados, para quatro	

- configurações de equilíbrio. 166
- Figura 7.9 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face positiva de uma placa dobrada de $\theta=10^\circ$, sob flexão com $\alpha=3.0$ e todos os bordos apoiados, para quatro configurações de equilíbrio. 167
- Figura 7.10 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face negativa de uma placa dobrada de $\theta=10^\circ$, sob flexão com $\alpha=3.0$ e todos os bordos apoiados, para quatro configurações de equilíbrio. 167
- Figura 7.11 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada sob flexão, $\alpha=3.0, \theta=12.5^\circ$ e todos bordos apoiados quatro configurações de equilíbrio. 168
- Figura 7.12 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob flexão, $\alpha=3.0, \theta=12.5^\circ$ e todos bordos apoiados para quatro configurações de equilíbrio. 169
- Figura 7.13 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face positiva de uma placa dobrada de $\theta=12.5^\circ$, sob flexão com $\alpha=3.0$ e todos os bordos apoiados, para quatro configurações de equilíbrio. 170
- Figura 7.14 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face negativa de uma placa dobrada de $\theta=12.5^\circ$, sob flexão com $\alpha=3.0$ e todos os bordos apoiados, para quatro configurações de equilíbrio. 170
- Figura 7.15 – Distribuição das tensões, na face positiva de uma placa dobrada sob flexão, $\alpha=3.0, \theta=15^\circ$ e todos bordos apoiados para quatro configurações de equilíbrio. 171
- Figura 7.16 – Distribuição das tensões, na face negativa de uma placa dobrada sob flexão, $\alpha=3.0, \theta=15^\circ$ e todos bordos apoiados para quatro configurações de equilíbrio. 172
- Figura 7.17 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face positiva de uma placa dobrada de $\theta=15^\circ$, sob flexão com $\alpha=3.0$ e todos os bordos apoiados, para quatro configurações de equilíbrio. 173
- Figura 7.18 – Distribuição das tensões no centro $y = a/2$ da face negativa de uma placa dobrada de $\theta=15^\circ$, sob flexão com $\alpha=3.0$ e todos os bordos apoiados, para quatro configurações de equilíbrio. 173
- Todos os caminhos de equilíbrio estudados exibiram uma bifurcação simétrica estável. 175

Lista de tabelas

Tabela 4.1 – λ numérico e teórico para as cinco primeiras cargas de flambagem de uma placa isolada com apenas os bordos carregados apoiados, para cada α estudado.	56
Tabela 4.2 – λ numérico e teórico para as cinco primeiras cargas de flambagem de uma placa isolada com apenas os bordos carregados apoiados, para cada α estudado.	73
Tabela 5.1 – Razão entre $\lambda_{cr \text{ placa dobrada}}$ e $\lambda_{cr \text{ placa isolada}}$ para cada θ estudado com $\alpha=1.0$ e todos os bordos apoiados para os cinco primeiros modos.	87
Tabela 5.2 – Razão entre $\lambda_{cr \text{ placa dobrada}}$ e $\lambda_{cr \text{ placa isolada}}$ para cada θ estudado com $\alpha=1.0$ e apenas os bordos apoiados para os cinco primeiros modos.	94
Tabela 5.3 – Razão entre $\lambda_{cr \text{ placa dobrada}}$ e $\lambda_{cr \text{ placa isolada}}$ para cada relação H/b estudada com $\theta=90^\circ$ com todos os bordos apoiados para cinco valores de α .	98
Tabela 5.4 – Razão entre $\lambda_{cr \text{ placa dobrada}}$ e $\lambda_{cr \text{ placa isolada}}$ para cada relação H/b estudada com $\theta=90^\circ$ e apenas os bordos carregados apoiados para cinco valores de α .	102
Tabela 7.1 – Carga crítica para placa dobrada sob flexão com todos os bordos apoiados.	162

Lista de Símbolos

Romanos

a	Altura da placa
b	Largura da placa
b_e	Largura efetiva
h	Espessura
H	Largura variável
z	Altura a partir da superfície média
N_{bif}	Carga de bifurcação
N_{cr}	Carga crítica
N_x	Força normal ao plano na direção x
N_y	Força normal ao plano na direção y
N_{yx}	Força cisalhante no plano na direção x
N_{xy}	Força cisalhante no plano na direção y
Q_x	Força cisalhante transversal ao plano
Q_y	Força cisalhante transversal ao plano
M_x	Momento de flexão na direção x
M_y	Momento de flexão na direção y
M_{yx}	Momento de torção na direção x
M_{xy}	Momento de torção na direção y
u	Componente de deslocamento em x , no plano médio da placa
v	Componente de deslocamento em y , no plano médio da placa
w	Componente de deslocamento em z , no plano médio da placa
\bar{u}	Componente de deslocamento em x , em qualquer ponto da placa
\bar{v}	Componente de deslocamento em y , em qualquer ponto da placa
\bar{w}	Componente de deslocamento em z , em qualquer ponto da placa
K_x	Mudança de curvatura
K_y	Mudança de curvatura
K_{xy}	Mudança de curvatura

V	Energia potencial total
U	Energia de deformação
U_m	Energia de membrana
U_b	Energia de flexão
f	Função de tensão
u_0	Deslocamento na direção x antes do incremento
v_0	Deslocamento na direção y antes do incremento
w_0	Deslocamento na direção z antes do incremento
u_1	Deslocamento incremental na direção x
v_1	Deslocamento incremental na direção y
w_1	Deslocamento incremental na direção z
m	Número de meias-ondas na direção y
n	Número de meias-ondas na direção x
C	Rigidez extensional
D	Rigidez à flexão
E	Módulo de Elasticidade
P_{lim}	Carga limite
S	Superfície média
q_{mn}	Amplitude modal

Gregos

α	Relação a/b
β	Raiz da equação característica da placa
λ	Parâmetro de carga de bifurcação
θ	Ângulo de dobra
φ	Raiz da equação característica da placa
λ_{cr}	Parâmetro de carga de bifurcação crítica
ε	Imperfeição geométrica
σ_{cr}	Tensão crítica
σ_x	Tensão normal ao plano na direção x , no plano médio da placa
σ_y	Tensão normal ao plano na direção y , no plano médio da placa
σ_u	Tensão de colapso da placa

τ_{yx}	Tensão cisalhante ao plano na direção x, no plano médio da placa
τ_{xy}	Tensão cisalhante ao plano na direção y, no plano médio da placa
$\bar{\sigma}_x$	Tensão normal ao plano na direção x, em qualquer ponto da placa
$\bar{\sigma}_y$	Tensão normal ao plano na direção y, em qualquer ponto da placa
$\bar{\tau}_{yx}$	Tensão cisalhante ao plano na direção x, em qualquer ponto
$\bar{\tau}_{xy}$	Tensão cisalhante ao plano na direção y, em qualquer ponto
β_x	Rotação relativa x
β_y	Rotação relativa y
ε_x	Deformação referente aos pontos no plano médio, na direção x
ε_y	Deformação referente aos pontos no plano médio, na direção y
γ_{xy}	Deformação cisalhante referente aos pontos no plano médio
$\bar{\varepsilon}_x$	Deformação referente a qualquer ponto da placa, na direção x
$\bar{\varepsilon}_y$	Deformação referente a qualquer ponto da placa, na direção y
$\bar{\gamma}_{xy}$	Deformação cisalhante referente a qualquer ponto da placa
Ω	Energia potencial das cargas aplicadas
∇^4	$= \nabla^2 \cdot \nabla^2$, onde ∇^2 é o operador Laplaciano
ν	Coeficiente de Poisson