

## Bibliografia

- [1] Bird, R. B., Dotson, P. J. and Johnson, N. L., “Polymer Solution Rheology Based on a Finitely Extensible Bead-Spring Chain Model”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **7**, 213-235 (1980).
- [2] Bird, R. B., Armstrong, R. C. and Hassager, O., “Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1”, *John Wiley & Sons*, New York, USA, (1987a).
- [3] Bird, R. B., Curtiss, C. F., Armstrong, R. C. and Hassager, O., “Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 2”, *John Wiley & Sons*, New York, USA, (1987b).
- [4] Bakhtiyarov, S. and Siginer, D. A., “Fluid Displacement in Horizontal Tube”, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **65**, 1–15 (1996).
- [5] Bonn, D., Kellay, H., Braunlich, M., Ben Amar, M. and Meunier, J., “Viscous Fingering in Complex Fluids”, *Physica A*, **220**, 60-73 (1995).
- [6] Bonn, D., Ross, D., Bertrand, E., Ragil, K., Shahidzadeh, N., Broseta, D. and Meunier J., “Wetting Transitions”, *Physica A*, **306**, 279–286 (2002).
- [7] Bretherton, F. P., “The Motion of Long Bubbles in Tubes”, *J. Fluid Mechanics*, **10**, 166–188 (1960).
- [8] Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., “Streamline Upwind Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **32**, 199-259 (1982).
- [9] Chilcott, M. D. and Rallison, J. M., “Creeping Flow of Dilute Polymer Solutions Past Cylinders and Spheres”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **29**, 381-432 (1988).

- [10] Christanti, Y. and Walker, L. M., “Surface Tension Driven Jet Breakup of Strain-Hardening Polymer Solutions”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **100**, 9-26 (2001).
- [11] Cooper-White, J. J., Fagan, J. E., Tirtaatmadja, V., Lester, D. R. and Boger, D. V., “Drop Formation Dynamics of Constant Low-Viscosity, Elastic Fluids”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **106**, 29-59 (2002).
- [12] Cox, B. G., “On Driving a Viscous Fluid out of a Tube”, *J. Fluid Mechanics*, **14**, 81–96 (1962).
- [13] Cox, B. G., “An Experimental Investigation of the Streamlines in Viscous Fluid Expelled from a Tube”, *J. Fluid Mechanics*, **20**, 193–200 (1964).
- [14] Cunha, F. R., *Personal Communication*, (2005).
- [15] Dontula, P., Macosko, C. W. and Scriven, L. E., “Model Elastic Liquids with Water-Soluble Polimers”, *AIChE Journal*, Vol. 44, **6**, 1247-1255 (1998).
- [16] Entov, V. M. and Hinch, E. J., “Effect of a Spectrum of Relaxation Times on the Capillary Thinning of a Filament of Elastic Liquid”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **72**(1), 31-54 (1997).
- [17] Fairbrother, F. and Stubbs, A. E., “Studies in Electroendosmosis. Part IV. The Bubble-Tube Method of Measurements”, *Journal of Chemical Society*, **1**, 527-529 (1935).
- [18] Giavedoni, M. D. and Saita, F. A., “The Axisymmetric and Plane Cases of a Gas Phase Steadily Displacing a Newtonian Liquid - A Simultaneous Solution of the Governing Equations”, *Physics of Fluids*, **8**, 2420-2428 (1997).
- [19] Goldsmith, H. L. and Mason, S. G., “The Flow of Suspensions Through Tubes. II. Single Large Bubbles” *J. Colloid Sci.*, **18**, 237 (1963).

- [20] Guenette, R. and Fortin, M., “A New Mixed Finite Element Method for Computing Viscoelastic Flows”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **60**, 27-52 (1995).
- [21] Herrchen, M. and Ottinger, H. C., “A Detailed Comparison of Various FENE Dumbbell Models”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **68**, 17-42 (1997).
- [22] Hirsch, C., “Numerical Computation of Internal and External Flows”, Vol. 1, *John Wiley & Sons*, (1995).
- [23] Hughes, T. J. R., “The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis”, (1987).
- [24] Kamisli, F. and Ryan, M. E., “Gas-Assisted non-Newtonian Fluid Displacement in Circular Tubes and Noncircular Channels”, *Chemical Engineering Science*, **56**, 4913–4928 (2001).
- [25] Kistler, S. F. and Schweizer, P. M., “Liquid Film Coating”, *Chapman & Hill*, (1997)
- [26] Kline, S. J. and McClintok, F. A., “Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments”, *Mechanical Engineering*, **75**, 3-9 (1953).
- [27] Huzyak, P. C. and Koelling, K. W., “The Penetration of a Long Bubble Through a Viscoelastic Fluid in a Tube”, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **71**, 73-88 (1997).
- [28] Gauri, V. and Koelling, K. W., “Gas-Assisted Displacement of Viscoelastic Fluids: Flow Dynamics at the Bubble Front”, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **83**, 183–203 (1999).
- [29] Kolte, M. I. and Szabo, P., “Capillary Thinning of Polymeric Filaments”, *Journal of Rheology*, **43**(3), 609-626 (1999).
- [30] Larson, R. G., “Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions”, *Butterworths*, 1988.

- [31] Lee, A. G.-K., “Viscoelastic Effects on Free Surface Displacement Flows: a Computational and Experimental Study”, *Ph.D. Thesis, Stanford University*, (2001).
- [32] Lee, A. G., Shaqfeh, E. S. G. and Khomami, B., “A Study of Viscoelastic Free Surface Flows by the Finite Element Method: Hele-Shaw and Slot Coating Flows”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **108**, 327-362 (2002).
- [33] McKinley, G. H. and Tripathi, A., “How to Extract the Newtonian Viscosity from Capillary Breakup Measurements in a Filament Rheometer”, *Journal of Rheology*, **43**(3), 653-671 (2000).
- [34] Macosko, C. W., “Rheology: Principles, Measurements and Applications”, VCH Publishers Inc., (1994).
- [35] Oldroyd, J. G., “An Approach to non-Newtonian Fluid Mechanics”, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **14**, 9–46 (1984).
- [36] Owens, M., “Misting in Forward Roll Coating: Structure, Properties and Processing Relationships”, *Ph.D. Thesis, University of Minnesota, MN, USA*, (2004).
- [37] Pomeau, Y., “Recent Progress in the Moving Contact Line Problem: a Review”, *C. R. Mecanique*, **330**, 207–222 (2002).
- [38] Renardy, M., “A Numerical Study of the Asymptotic Evolution and Breakup of Newtonian and Viscoelastic Jets”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **59**, 267-282 (1995).
- [39] Ro, J. S. and Homsy, G. M., “Viscoelastic Free Surface Flows: Thin Film Hydrodynamics of Hele-Shaw and Dip Coating Flows”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **57**, 203-225 (1995).
- [40] Romero, O. J., Suszynsky, W. J., Scriven, L. E. and Carvalho, M. S., “Low-Flow Limit in Slot Coating of Dilute Solutions of High Molecular Weight Polymer”, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **118**, 137–156 (2004).

- [41] Soares, E. J., “Deslocamento de Fluidos Imiscíveis em Tubos: Efeito de Capilaridade, Inércia, Razão de Viscosidades e Propriedades Reológicas”, *Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro*, (2002).
- [42] Taylor, G. I., “Deposition of a Viscous Fluid on the Wall a Tube”, *J. Fluid Mechanics*, **10**, 161–165 (1960).
- [43] Tilton, J. N., “The Steady Motion of an Interface Between Two Viscous Liquids in a Capillary Tube”, *Chemical Engineering Science*, **43/6**, 1371–1384 (1988).
- [44] Yarin, A. L., “Free Liquid Jets and Films: Hydrodynamics and Rheology”, *Interactions of Mechanics and Mathematics Series, Longman, Wiley*, New York, 1993.
- [45] Warner, H. R., *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **11**, 379-387 (1972).

## A

### Funções Materiais para os Modelos Oldroyd-B, FENE-P e FENE-CR

Nas anotações abaixo segue-se a convenção de sinais adotada por Bird *et al.* [2].

#### Modelo Oldroyd-B

$$\boldsymbol{\tau}_p + \lambda \boldsymbol{\tau}_{p(1)} = -\eta_p \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (\text{A-1})$$

1. Funções materiais para o escoamento simples de cisalhamento

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_s + \eta_p; \quad (\text{A-2})$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = 2\lambda\eta_p; \quad (\text{A-3})$$

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = 0. \quad (\text{A-4})$$

2. Funções materiais para o escoamento simples livre de cisalhamento

$$\bar{\eta}_1(\dot{\epsilon}, a) = (3 + a) \left\{ \eta_s + \left[ \frac{1}{1 - (1 - a)\lambda\dot{\epsilon} - (1 + a)2(\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}; \quad (\text{A-5})$$

$$\bar{\eta}_2(\dot{\epsilon}, a) = 2a \left\{ \eta_s + \left[ \frac{1}{(1 + \lambda\dot{\epsilon})^2 - (a\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}. \quad (\text{A-6})$$

3. Viscosidade elongacional

$$\bar{\eta}_1(\dot{\epsilon}, 0) = \bar{\eta}(\dot{\epsilon}) = 3 \left\{ \eta_s + \left[ \frac{1}{1 - \lambda\dot{\epsilon} - 2(\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}. \quad (\text{A-7})$$

**Modelo FENE-P**

$$Z\boldsymbol{\tau}_p + \lambda\boldsymbol{\tau}_{p(1)} - \lambda \left[ \boldsymbol{\tau}_p - \left( \frac{\eta_p}{\lambda} \right) \mathbf{I} \right] \frac{D}{Dt}(\ln Z) = -\eta_p \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (\text{A-8})$$

em que

$$Z = 1 + \frac{3}{b} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{3\eta_p} \right) \text{tr } \boldsymbol{\tau}_p \right] \quad (\text{A-9})$$

e

$$f(Z) = Z - \lambda \frac{D}{Dt}(\ln Z). \quad (\text{A-10})$$

1. Funções materiais para o escoamento simples de cisalhamento

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_s + \left( \frac{Z}{f^2} \right) \eta_p; \quad (\text{A-11})$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = 2\lambda\eta_p \left( \frac{Z}{f^3} \right); \quad (\text{A-12})$$

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = 0. \quad (\text{A-13})$$

2. Funções materiais para o escoamento simples livre de cisalhamento

$$\bar{\eta}_1(\dot{\epsilon}, a) = (3 + a) \left\{ \eta_s + \left[ \frac{Z}{f^2 - (1 - a)f\lambda\dot{\epsilon} - (1 + a)2(\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}; \quad (\text{A-14})$$

$$\bar{\eta}_2(\dot{\epsilon}, a) = 2a \left\{ \eta_s + \left[ \frac{Z}{(f + \lambda\dot{\epsilon})^2 - (a\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}. \quad (\text{A-15})$$

3. Viscosidade elongacional

$$\bar{\eta}_1(\dot{\epsilon}, 0) = \bar{\eta}(\dot{\epsilon}) = 3 \left\{ \eta_s + \left[ \frac{Z}{f^2 - f\lambda\dot{\epsilon} - 2(\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}. \quad (\text{A-16})$$

**Modelo FENE-CR**

$$Z\boldsymbol{\tau}_p + \lambda\boldsymbol{\tau}_{p(1)} - \lambda\boldsymbol{\tau}_p \frac{D}{Dt}(\ln Z) = -Z\eta_p \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (\text{A-17})$$

em que

$$Z = \frac{1 - (\lambda/b\eta_p)\text{tr } \boldsymbol{\tau}_p}{1 - (3/b)} \quad (\text{A-18})$$

e

$$f(Z) = Z - \lambda \frac{D}{Dt}(\ln Z). \quad (\text{A-19})$$

1. Funções materiais para o escoamento simples de cisalhamento

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_s + \left( \frac{Z}{f} \right) \eta_p; \quad (\text{A-20})$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = 2\lambda\eta_p \left( \frac{Z}{f^2} \right); \quad (\text{A-21})$$

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = 0. \quad (\text{A-22})$$

2. Funções materiais para o escoamento simples livre de cisalhamento

$$\bar{\eta}_1(\dot{\epsilon}, a) = (3 + a) \left\{ \eta_s + \left[ \frac{Zf}{f^2 - (1-a)f\lambda\dot{\epsilon} - (1+a)2(\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}; \quad (\text{A-23})$$

$$\bar{\eta}_2(\dot{\epsilon}, a) = 2a \left\{ \eta_s + \left[ \frac{Zf}{(f + \lambda\dot{\epsilon})^2 - (a\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}. \quad (\text{A-24})$$



3. Viscosidade elongacional

$$\bar{\eta}_1(\dot{\epsilon}, 0) = \bar{\eta}(\dot{\epsilon}) = 3 \left\{ \eta_s + \left[ \frac{Zf}{f^2 - f\lambda\dot{\epsilon} - 2(\lambda\dot{\epsilon})^2} \right] \eta_p \right\}. \quad (\text{A-25})$$

## B Coeficientes do Jacobiano Relativos às Equações dos Resíduos

Nas equações seguintes,  $\bar{\Omega}$  representa a integração no sistema de referência numérico, ou seja, no domínio numérico, sendo  $|\mathbf{F}|$  o determinante da matriz de transformação de coordenadas.

### Resíduo da equação de conservação da massa, $R_c^i$

1. Sensibilidade com relação à velocidade axial

$$\frac{\partial R_c^i}{\partial U_k^j} = \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \chi_i r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} \quad (\text{B-1})$$

2. Sensibilidade com relação à velocidade radial

$$\frac{\partial R_c^i}{\partial V_k^j} = \int_{\bar{\Omega}} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\phi_j}{r} \right) \chi_i r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} \quad (\text{B-2})$$

3. Sensibilidade com relação à pressão

$$\frac{\partial R_c^i}{\partial P_k^j} = 0 \quad (\text{B-3})$$

4. Sensibilidade com relação à posição axial

$$\frac{\partial R_c^i}{\partial X_j} = \int_{\bar{\Omega}} \left[ |\mathbf{F}| \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial r} \right) + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial r} + \frac{v_k}{r} \right) \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial X_j} \right] \chi_i r d\bar{\Omega} \quad (\text{B-4})$$

5. Sensibilidade com relação à posição radial

$$\frac{\partial R_c^i}{\partial R_j} = \int_{\bar{\Omega}} |\mathbf{F}| \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial r} + \frac{v_k}{r} \right) \chi_i r +$$

$$\left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\alpha}{r} \right) \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial R_j} \chi_i r d\bar{\Omega} \quad (\text{B-5})$$

**Resíduo da equação de conservação da quantidade de movimento linear axial,  $R_{mx}^i$**

1. Sensibilidade com relação à velocidade axial

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{mx}^i}{\partial U_k^j} &= \int_{\bar{\Omega}} \rho_k \phi_i \left( \phi_j \frac{\partial u_k}{\partial x} + u_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + v_k \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) r |\mathbf{F}| + \\ &\left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xx)_k}}{\partial U_k^j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial U_k^j} \right) r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial U_k^j} (f_x \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} \quad (\text{B-6}) \end{aligned}$$

2. Sensibilidade com relação à velocidade radial

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{mx}^i}{\partial V_k^j} &= \int_{\bar{\Omega}} \left[ \rho_k \phi_i \phi_j \frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xx)_k}}{\partial V_k^j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial V_k^j} \right] r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} + \\ &\int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial V_k^j} (f_x \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} \quad (\text{B-7}) \end{aligned}$$

3. Sensibilidade com relação à pressão

$$\frac{\partial R_{mx}^i}{\partial P_k^j} = \int_{\bar{\Omega}} \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xx)_k}}{\partial P_k^j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial P_k^j} \right] r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial P_k^j} (f_x \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} \quad (\text{B-8})$$

4. Sensibilidade com relação à posição axial

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{mx}^i}{\partial X_j} &= \int_{\bar{\Omega}} \rho_k \phi_i \left[ u_k \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) + v_k \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) \right] r |\mathbf{F}| + \\ &\left[ \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) T_{(xx)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xx)_k}}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) T_{(xr)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial X_j} \right] r |\mathbf{F}| + \\ &\left[ \rho_k \phi_i \left( u_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} T_{(xx)_\alpha} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} T_{(xr)_k} - \rho_k g_x \phi_i \right] r \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial X_j} d\bar{\Omega} + \\ &\int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial X_j} (f_x \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial X_j} r f_x \phi_i d\bar{\Gamma} \quad (\text{B-9}) \end{aligned}$$

## 5. Sensibilidade com relação à posição radial

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{mj}^i}{\partial R_j} &= \int_{\bar{\Omega}} \rho_k \phi_i \left[ u_k \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) + v_k \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) \right] r |\mathbf{F}| + \\
&\left[ \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) T_{(xx)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xx)_k}}{\partial R_j} + \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) T_{(xr)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial R_j} \right] r |\mathbf{F}| + \\
&\left[ \rho_k \phi_i \left( u_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} T_{(xx)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} T_{(xr)_k} - \rho_k g_x \phi_i \right] \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial R_j} r d\bar{\Omega} \\
&\int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial R_j} (f_x \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial R_j} (r |\mathbf{F}|) f_x \phi_i d\bar{\Gamma} \quad (B-10)
\end{aligned}$$

**Resíduo da equação de conservação da quantidade de movimento linear radial,  $R_{mr}^i$** 

## 1. Sensibilidade com relação à velocidade axial

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{mr}^i}{\partial U_k^j} &= \int_{\bar{\Omega}} \left[ \rho_k \phi_i \phi_j \frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial U_k^j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial U_k^j} + \frac{\phi_i}{r} \frac{\partial T_{(\theta\theta)_k}}{\partial U_k^j} \right] r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} + \\
&\int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial U_k^j} (f_r \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} \quad (B-11)
\end{aligned}$$

## 2. Sensibilidade com relação à velocidade radial

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{mr}^i}{\partial V_k^j} &= \int_{\bar{\Omega}} \rho_k \phi_i \left( u_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial v_k}{\partial r} + v_k \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) r |\mathbf{F}| + \\
&\left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial V_k^j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(rr)_k}}{\partial V_k^j} + \frac{\phi_i}{r} \frac{\partial T_{(\theta\theta)_k}}{\partial V_k^j} \right) r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial V_k^j} (f_r \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} \\
&\quad (B-12)
\end{aligned}$$

## 3. Sensibilidade com relação à pressão

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{mr}^i}{\partial P_k^j} &= \int_{\bar{\Omega}} \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial P_k^j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(rr)_k}}{\partial P_k^j} + \frac{\phi_i}{r} \frac{\partial T_{(\theta\theta)_k}}{\partial P_k^j} \right] r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} + \\
&\int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial P_k^j} (f_r \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} \quad (B-13)
\end{aligned}$$

## 4. Sensibilidade com relação à posição axial

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{mr}^i}{\partial X_j} &= \int_{\bar{\Omega}} \rho_k \phi_i \left[ u_k \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) + v_k \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial r} \right) \right] r |\mathbf{F}| + \\
&\left[ \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) T_{(xr)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) T_{(rr)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(rr)_k}}{\partial X_j} + \frac{\phi_i}{r} \frac{\partial T_{(\theta\theta)_k}}{\partial X_j} \right] r |\mathbf{F}| + \\
&\rho_k \phi_i \left( u_k \frac{\partial v_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial r} \right) \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial X_j} r + \\
&\left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} T_{(xr)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} T_{(rr)_k} - \rho_k g_r \phi_i + \frac{\phi_i}{r} T_{(\theta\theta)_k} \right) \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial X_j} r d\bar{\Omega} + \\
&\int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial X_j} (f_r \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial X_j} r f_r \phi_i d\bar{\Gamma} \quad (\text{B-14})
\end{aligned}$$

## 5. Sensibilidade com relação à posição radial

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{mr}^i}{\partial R_j} &= \int_{\bar{\Omega}} \rho_k \phi_i \left[ u_k \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) + v_k \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial r} \right) \right] r |\mathbf{F}| + \\
&\left[ \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) T_{(xr)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial T_{(xr)_k}}{\partial R_j} + \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) T_{(rr)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial T_{(rr)_k}}{\partial R_j} \right] r |\mathbf{F}| + \\
&\left[ \rho_k \phi_i \left( u_k \frac{\partial v_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial r} \right) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} T_{(xr)_k} + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} T_{(rr)_k} - \rho_k g_r \phi_i + \frac{\phi_i}{r} T_{(\theta\theta)_k} \right] \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial R_j} r \\
&\left( \frac{\phi_i}{r} \frac{\partial T_{(\theta\theta)_k}}{\partial R_j} - \frac{\phi_i}{r^2} \phi_j T_{(\theta\theta)_k} \right) r |\mathbf{F}| d\bar{\Omega} + \\
&\int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial R_j} (f_r \phi_i) r |\mathbf{F}| d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial R_j} (r |\mathbf{F}|) f_r \phi_i d\bar{\Gamma} \quad (\text{B-15})
\end{aligned}$$

**Resíduo da equação da malha na direção elementar  $\xi$ ,  $R_\xi^i$** 

## 1. Sensibilidade com relação à velocidade axial

$$\frac{\partial R_\xi^i}{\partial U_k^j} = 0 \quad (\text{B-16})$$

## 2. Sensibilidade com relação à velocidade radial

$$\frac{\partial R_\xi^i}{\partial V_k^j} = 0 \quad (\text{B-17})$$

3. Sensibilidade com relação à pressão

$$\frac{\partial R_\xi^i}{\partial P_k^j} = 0 \quad (\text{B-18})$$

4. Sensibilidade com relação à posição axial

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_\xi^i}{\partial X_j} &= \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) |\mathbf{F}| + \\ &\frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial X_j} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial X_j} (\phi_i \nabla \xi \cdot \mathbf{n}) d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

5. Sensibilidade com relação à posição radial

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_\xi^i}{\partial R_j} &= \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) |\mathbf{F}| + \\ &\frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial R_j} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial R_j} (\phi_i \nabla \xi \cdot \mathbf{n}) d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

### Resíduo da equação da malha na direção elementar $\eta$ , $R_\eta^i$

1. Sensibilidade com relação à velocidade axial

$$\frac{\partial R_\eta^i}{\partial U_k^j} = 0 \quad (\text{B-21})$$

2. Sensibilidade com relação à velocidade radial

$$\frac{\partial R_\eta^i}{\partial V_k^j} = 0 \quad (\text{B-22})$$

3. Sensibilidade com relação à pressão

$$\frac{\partial R_\eta^i}{\partial P_k^j} = 0 \quad (\text{B-23})$$

4. Sensibilidade com relação à posição axial

$$\frac{\partial R_\eta^i}{\partial X_j} = \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) |\mathbf{F}| +$$

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial X_j} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial X_j} (\phi_i \nabla \eta \cdot \mathbf{n}) d\bar{\Gamma} \quad (\text{B-24})$$

5. Sensibilidade com relação à posição radial

$$\frac{\partial R_\eta^i}{\partial R_j} = \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) |\mathbf{F}| +$$

$$\frac{\partial}{\partial R_j} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) \frac{\partial |\mathbf{F}|}{\partial R_j} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial R_j} (\phi_i \nabla \eta \cdot \mathbf{n}) d\bar{\Gamma} \quad (\text{B-25})$$

## C Análise de Incertezas

É interessante realizar uma análise de incertezas tanto para a fração mássica de líquido depositada na parede do tubo capilar (parâmetro desejado) quanto para o número de capilaridade do experimento (parâmetro de variação).

A fração mássica de líquido depositada na parede do tubo capilar tem a seguinte dependência funcional:

$$m = m(U, \bar{U}), \quad (\text{C-1})$$

onde  $U$  é a velocidade da ponta da bolha e  $\bar{U}$  é a velocidade média da fase deslocada suficientemente distante da ponta da bolha.

Para o cálculo da propagação das incertezas, segue-se a proposta de Kline e McClintock [26]:

$$\delta m^2 = \left( \frac{\partial m}{\partial U} \delta U \right)^2 + \left( \frac{\partial m}{\partial \bar{U}} \delta \bar{U} \right)^2, \quad (\text{C-2})$$

que na forma de frações pode ser expressa por:

$$\left( \frac{\delta m}{m} \right)^2 = \left( \frac{\delta U}{U} \right)^2 + \left( \frac{\delta \bar{U}}{\bar{U}} \right)^2. \quad (\text{C-3})$$

A incerteza na velocidade na ponta da bolha é dada por:



$$\left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 = \left(\frac{\delta \Delta x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta \Delta t}{\Delta t}\right)^2, \quad (\text{C-4})$$

onde  $\Delta x$  é a distância percorrida pela bolha entre duas listras preferenciais, e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo para percorrê-las.

Por outro lado, a incerteza na velocidade média é dada por:

$$\left(\frac{\delta \bar{U}}{\bar{U}}\right)^2 = \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\delta \Delta t}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)^2, \quad (\text{C-5})$$

onde  $M$  é a massa coletada durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ ,  $\rho$  é a massa específica do líquido de trabalho e  $R_0$  é o raio interno do tubo capilar.

Por sua vez, o número de capilaridade do escoamento é dado por:

$$Ca = \frac{\eta U}{\sigma}, \quad (\text{C-6})$$

onde  $\eta$  é a viscosidade total da fase líquida e  $\sigma$  é a tensão interfacial entre o gás penetrante invíscido e o líquido deslocado.

Sua incerteza pode ser calculada como:

$$\left(\frac{\delta Ca}{Ca}\right)^2 = \left(\frac{\delta \eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\delta \sigma}{\sigma}\right)^2. \quad (\text{C-7})$$

Foram utilizados os seguintes valores para o cálculo das incertezas individuais:

- (1)  $\Delta x$ : menor divisão medida com uma régua num intervalo de 100 mm;
- (2)  $\Delta t$ : desvio padrão de uma média de dez corridas;
- (3)  $M$ : desvio padrão de uma média de dez corridas;
- (4)  $\rho$ : incerteza da técnica do densímetro;
- (5)  $R_0$ : incerteza da técnica do densímetro;
- (6)  $\eta$ : incerteza do viscosímetro Cannon-Fenske;
- (7)  $\sigma$ : desvio padrão de uma média de dez medidas.

Todas as medidas foram feitas na temperatura do experimento ( $\approx 22^\circ$  C).

As tabelas abaixo mostram cada uma das incertezas mencionadas, bem como as incertezas finais na fração mássica depositada e no número de capilaridade.

Tabela C.1: Propagação das incertezas na fração mássica depositada na parede do tubo capilar.

$\Delta x$	$\Delta t$	$M$	$\rho$	$R_0$	$m$
$\pm 1,00\%$	$\pm 0,82\%$	$\pm 1,70\%$	$\pm 0,20\%$	$\pm 0,55\%$	<b><math>\pm 2,21\%</math></b>

Tabela C.2: Propagação das incertezas no número de capilaridade do escoamento.

$\Delta x$	$\Delta t$	$\eta$	$\sigma$	$Ca$
$\pm 1,00\%$	$\pm 0,82\%$	$\pm 0,14\%$	$\pm 0,41\%$	<b><math>\pm 1,36\%</math></b>

## D Análise de Escala do Problema

Considere um diagrama esquemático típico do problema de deslocamento de fluidos em um tubo capilar [14]:

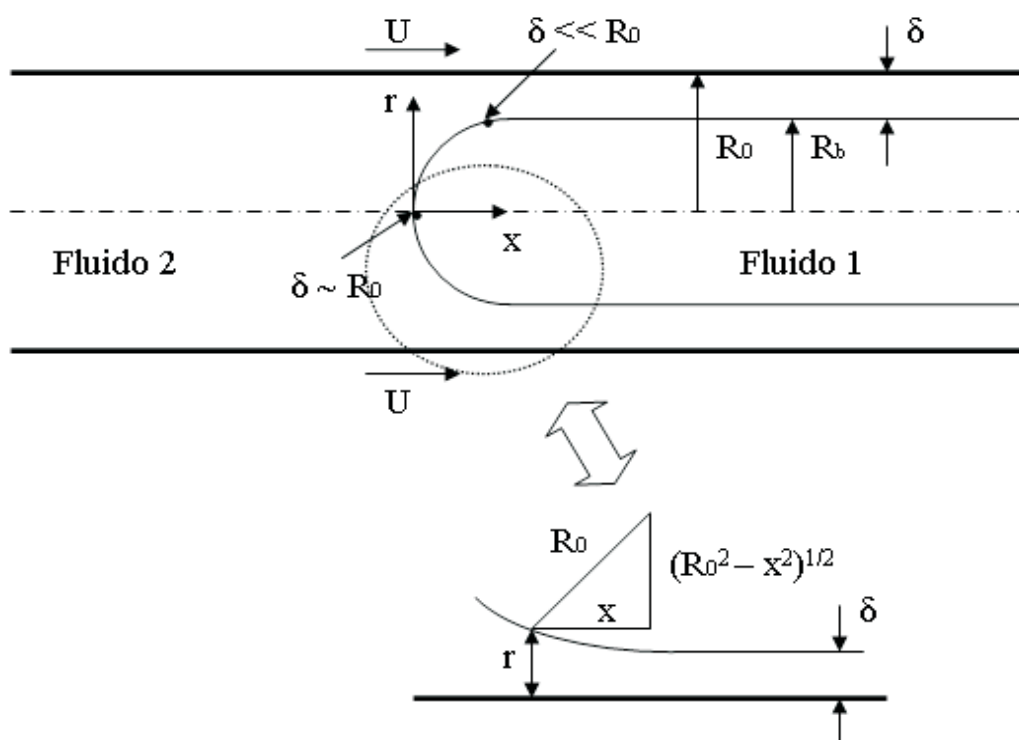


Figura D.1: Análise de escala do problema de deslocamento de fluidos em um tubo capilar.

Aqui,  $\delta$  é o tamanho característico da espessura de líquido,  $R_0$  é o raio do tubo,  $R_b$  é o raio da bolha,  $U$  é uma escala de velocidade típica do problema,  $x$  é a coordenada longitudinal e  $r$  é a coordenada radial.

Considere, também, que  $\rho$  é a massa específica do líquido base (fluido 2),  $\mu$  é a viscosidade de cisalhamento do líquido base (fluido 2),  $\sigma$  é a tensão superficial e  $k$  é uma curvatura característica ( $k \sim 1/R_0$ ).

Note que  $R_0 \sim R_b$  se  $\delta \ll 1$ .

Considere a aproximação de lubrificação no escoamento do filme líquido. Para que os efeitos de inércia sejam desprezados com relação aos efeitos viscosos, devemos ter

$$\left(\frac{R_0 U \rho}{\mu}\right) \left(\frac{\delta}{R_o}\right)^2 \ll 1.$$

Desde que  $\delta \ll R_o$ , do detalhe na figura observamos que

$$r = R_0 + \delta - (R_0^2 - x^2)^{1/2},$$

ou ainda

$$r = R_0 + \delta - R_0 \left(1 - (x/R_0)^2\right)^{1/2}.$$

Uma aproximação parabólica do perfil da bolha  $r(x)$  nas vizinhanças do ponto onde  $\delta \ll R_0$  (ver figura) é válida quando  $x/R_0 \ll 1$ . Usando desenvolvimento em série binomial, temos

$$r \sim R_0 + \delta - R_0 \left(1 - \frac{1}{2}(x/R_0)^2 + \dots\right)$$

e, portanto,

$$r \sim \delta + \frac{x^2}{2R_0}.$$

Nas vizinhanças do ponto onde  $\delta \ll R_0$ ,  $r \sim \delta$ . Conseqüentemente,

$$x \sim \sqrt{R_0 \delta}.$$

### Caso de Líquido Newtoniano, $De = 0$

Na condição Newtoniana ( $De = 0$ ) gradientes de pressão capilar balanceiam efeitos viscosos. Portanto,

$$\frac{dp}{dx} \sim \mu \frac{d^2 u}{dr^2}$$

$$\frac{\sigma}{R_o (R_o \delta)^{1/2}} \sim \frac{\mu U}{\delta^2}.$$

Resolvendo a equação acima para  $\delta$ , obtemos

$$(\delta/R_o)^{3/2} \sim \mu U/\sigma,$$

e em termos do número de capilaridade,

$$\delta \sim R_o Ca^{2/3}.$$

Note que no caso de  $\delta \sim R_o$  (nas vizinhanças da frente da bolha),  $x \sim R_o$  e, portanto,

$$\delta \sim R_o Ca^{1/2}.$$

### Caso não-Newtoniano

Para o caso não Newtoniano consideramos uma *camada limite* elástica de espessura típica da ordem de  $\delta$ . Considerando  $\tau$  o tempo de relaxação da macromolécula e  $\dot{\gamma}$  a taxa de cisalhamento do escoamento, uma escala característica da tensão elástica  $\sigma_e$  é expressa como sendo simplesmente

$$\sigma_e \sim \mu\tau \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t}.$$

### Escoamentos em que $De \ll 1$

Neste caso a escala de tempo típica do escoamento é

$$t \sim 1/\dot{\gamma} \sim U/R_o.$$

Portanto, a força elástica por unidade de volume,  $f_e$ , possui a seguinte escala:

$$f_e = d\sigma_e/dx \sim \mu\tau(U/R_o)^2 1/(R_o\delta)^{1/2}.$$

Agora, nessa região de camada limite, forças viscosas balanceiam forças elásticas tal que

$$\mu\tau(U/R_o)^2 1/(R_o\delta)^{1/2} \sim \mu U/\delta^2.$$

Do balanço acima,

$$(\delta/R_o)^{3/2} \sim (R_o/U)/\tau,$$

então,

$$\delta \sim R_0 De^{-2/3}.$$

Os argumentos de escala mostram que a espessura de uma camada limite elástica localizada em regiões em que  $x \sim (\delta R_0)^{1/2}$  e  $De \ll 1$  decresce algebricamente com expoente  $De^{-2/3}$ .

### Escoamentos em que $De \sim 1$

Neste caso, uma escala de tempo típica do escoamento é da ordem do tempo de relaxação da macromolécula, i.e.  $t \sim \tau$ . Portanto, a escala da força elástica em regiões do escoamento em que  $De \sim 1$  pode ser expressa na forma

$$f_e = d\sigma_e/dx \sim \frac{\mu}{\tau} \frac{1}{(R_0\delta)^{1/2}},$$

que novamente nessa camada limite elástica deve estar em balanço com as forças viscosas:

$$\frac{\mu}{\tau} \frac{1}{(R_0\delta)^{1/2}} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}.$$

Nestas condições determinamos que:

$$\delta \sim R_0 De^{2/3}.$$