Referências Bibliográficas

Atluri, S. N., 1983. Gallagher, R. H. & Zienkiewicz O. C. (eds.), Hybrid and Mixed Finite Element Methods, John Wiley & Sons.

Ben-Israel, A., Greville, T. N. E., 1980. Generalized Inverses: Theory and Applications. Krieger, New York.

Brebbia, C. A., 1978. The boundary element method for engineers. Pentech Press, London.

Bruch, J. C., Zyvoloski, G., 1974. Transient two-dimensional heat conduction problems solved by the finite element method. Int. J. Numer. Meth. Engng., 8: 481-494.

Chaves, R. A. P., 1999. Estudo do Método Híbrido dos Elementos de Contorno e Proposta de uma Formulação Simplificada. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Brasil.

Chaves, R. A. P., 2003. O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas Dependentes do Tempo. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Brasil.

Cheng. A. H.-D., 1984, Darcy’s flow with variable permeability: a boundary integral solution. Water Resources Research, 20: 980-984.

De Souza, R. M., 1992. O Método Híbrido dos Elementos de Contorno para a Análise Elastostática de Sólidos. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Brasil.

Divo, E. A., Kassab, A. J., 2003. Boundary Element Methods for Heat Conduction: With Applications in Non-Homogeneous Media, Topics in Engineering, Vol. 44 WITpress.

Dumont, N. A., 1996, “Notas de Aula: Método Híbrido dos Elementos de Contorno”, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro.

Dumont, N. A., 2003, Variationally-based Hybrid Boundary Element Methods, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 10, 407-430.

Dumont, N. A., 2005, An Advanced Mode Superposition Technique for the General Analysis of Time-Dependent Problems, BETeq – Montreal, July 26-28, in Advances in Boundary Element Techniques VI, A. P. S. Selvadurai, C. L. Tan, M. H. Aliabadi, eds., CL Ltd., England, pp 333-344

Dumont, N. A., 2005, On the Inverse of Generalized Lambda Matrices With Singular Leading Term, aceito Int. J. Numer. Meth. Engng,.

Dumont, N. A., Chaves, R. A. P., 2003, General Time-Dependent Analysis with the Frequency-Domain Hybrid Boundary Element Method, Comp. Assisted Mechs. and Engng. Sciences (CAMES), 10, 431-452.

Dumont, N. A., Chaves, R. A. P., 2003, Transient Heat Conduction in Functionally Graded Materials by the Hybrid Boundary Element Method, NMCM 2003 - 9th Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics, Žilina, República Eslovaca, 9-12 September, 20 pp

Dumont, N. A., Chaves, R. A. P., 2004, Transient heat conduction in orthotropic functionally graded materials by the hybrid boundary element methods, Extended Abstracts IABEM 2004 – International Association of Boundary Element Methods Conference, Minneapolis, USA, 24-26 May, 3 pp.

Dumont, N. A., Cruz, E. A., 2006, On the Solution of Generalized Non-Linear Complex-Symmetric Eigenvalue Problems. A ser submetido.

Dumont, N. A., Fernandez, J. A. L., 1998, “A New Family Of High Performing Finite Elements – Revisiting an Old Idea?”, International Symposium on the Use of Computers in Engineering and the Quality of the Software, Rio de Janeiro, 9-10 de novembro, in Computational Mechanics and the Use of Computers in Engineering, eds: A. J. Ferrante, M. V. Rodriguez y Rodriguez, B. A. Schrefler, A. Natali, pp 109-117, UniverCidade Editora

Dumont, N. A., Oliveira, R., 1997, The exact dynamic formulation of the hybrid boundary element method, XVIII CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Comput. Methods, Brasília, Brazil, 357-364.

Dumont, N. A., Oliveira, R., 2001, From frequency-dependent mass and stiffness matrices to the dynamic response of elastic systems, Int. J. Sol. Struct., 38, 10-13, 1813-1830.

Dumont, N. A., Prazeres, P. G. C., 2004. A Family of Advanced Hybrid Finite Elements for the General Analysis of time-dependent Problems. XXV CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Comput. Methods, Pernambuco, Brasil, 15 pp em CD.

Dumont, N. A., Prazeres, P. G. C., 2005. Hybrid Dynamic Finite Element Families for the General Analysis of Time-Dependent Problems. Procs. The 3rd International Conference on Structural Stability and Dynamics, Kissimmee, Florida, June 19-22, 10 pp em CD.

Dumont, N. A., Prazeres, P. G. C., 2006. General Hybrid Dynamic Truss and Beam Elements for the Analysis of Transient Problems. A ser submetido.

Gupta, A. K. & Asce, M. 1986, Frequency-Dependent Matrices for Tapered Beams. Journal of Structural Engineering, Vol.112. 85-103.

Gupta, K. K., 1976, On a Finite Dynamic Element Method for Free Vibration Analysis of Structures, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 9, 105-120.

Gupta, K. K., 1978, Development of a Finite Dynamic Element for Free Vibration Analysis of Two-Dimensional Structures, Int. J. Numer. Meth. Engng. 12, 1311-1327.

Gupta, K. K., 1979, Finite Dynamic Element Formulation for a Plane Triangular Element, Int. J. Numer. Meth. Engng. 14, 1431-1448.

Hellinger, E., 1914. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua, Enz. math. Wis, 4, 602-694.

Hu, H.-C., 1955. On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity, Scientia Sinica, 4, 33-54.

Jirousek, J. & Leon, N., 1977. A powerful finite element for plate bending, Com. Meths. in Appl. Mech. Engng., 12, 77-96.

Jirousek, J. & Stojek, M., 1995. Numerical assessment of a new T-element approach, Comp. & Structs., 57, 3,367-378.

Lancaster, P., 2002, Lambda-Matrices & Vibrating Systems, Dover Publications.

Maunder, E. (org.), 2002. Trefftz Method – Development and Applications in Computational Mechanics (IACM special interest conference), 16-18 September, Exeter, UK.

Merian, James L., 1985, Estática, 2ª ed.,Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.

Paz, M., Dung, L., 1975, Power Series Expansion of the General Stiffness Matrix for Beam Elements, Int. J. Numer. Meth. Engng. 9, 449-459

Pian, T. H. H., 1964, Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution. AIAA J., 2, 1333-1336.

Pian, T. H. H., 1983. Reflections and remarks on hybrid and mixed finite element methods, Hybrid and Mixed Finite Element Methods, Atluri, S. N., Gallagher, R. H. & Zienkiewicz O. C. (eds.), John Wiley & Sons.

Pian, T. H. H. & Tong, P., 1969, Basis of Finite Element Methods for Solid Continua. Int. J. Numer. Meth. Engng. 1, 3-28.

Przemieniecki, J. S., 1968, Theory of Matrix Structural Analysis, Dover Publications, New York.

Qin, Q. H., 2003. The Trefftz Finite and Boundary Element Method, WITPress.

Reddy, J. N., 2002. Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, Wiley, 2nd ed.

Reissner, E. 1950. On a variational theorem in elasticity, J. Math. Phys., 29, 90-95.

Trefftz, E., 1926. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Proc. 2nd International Congress of Applied Mechanics, Zurich, Switzerland.

Washizu, K., 1955. On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity, Techn. Report. 25-18, M.I.T.

Weaver, W., Jr., and Johnston, P. R., 1987. Structural Dynamics by Finite Elements, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Voss, H., 1987, A New Justification of Finite Dynamic Element Methods, Numerical Treatment of Eigenvalue Problems, Vol. 4, 232-242, eds. J. Albrecht, L. Collatz, W. Velte, W. Wunderlich, International Series on Numerical Mathematics 83, Birkhäuser Verlag, Stuttgart.

Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., 1989. The Finite Element Method, Vol. I Basic Formulations and Linear Problems, McGraw-Hill.

APÊNDICES

APÊNDICE A -
Obtenção da matriz de rigidez para problemas de elastostática no método híbrido dos elementos de contorno

A matriz de rigidez $\mathbf{K}_0$ para problemas de elastostática pode ser obtida por meio de um procedimento mais simples e direto (Dumont, 2005) do que o método geral apresentado na seção 2.10 do capítulo 2.

De acordo com o que é exposto no item 2.7.2, do capítulo 2, a singularidade de $\mathbf{H}_0^{\mathbf{T}}$ (para problemas estáticos) significa que certas forças $\mathbf{p}^*$ não podem ser transformadas em forças nodais equivalentes $\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^{\mathbf{b}}\right)$. Isto implica a não-existência de uma solução única para o sistema representado pelas equações (2.6.19) e (2.6.20). Esta unicidade da solução deve então ser provida, adicionando-se a condição de ortogonalidade

$$\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}^* = \mathbf{0} \tag{A.1}$$

para completar o sistema. Em outras palavras, o vetor $\mathbf{p}^*$ correspondente à solução desejada do sistema deve ser ortogonal às forças pertencentes ao espaço coberto pela base $\mathbf{V}$.

A partir da equação (A.1), pode-se resolver a primeira equação do sistema das equações (2.6.19)-(2.6.20) para as forças $\mathbf{p}^*$ formalmente como:

$$\mathbf{p}^* = \left(\mathbf{I}-\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right)\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{I}-\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right)+\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right]^{-1}\mathbf{H}\left(\mathbf{d}-\mathbf{d}^{\mathbf{b}}\right) \tag{A.2}$$

onde $\left(\mathbf{I}-\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right)\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{I}-\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right)+\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right]^{-1}$ é chamada de inversa do Bott-Duffin da matriz de flexibilidade $\mathbf{F}$ e $\left(\mathbf{I}-\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right)$ é o projetor ortogonal ao espaço coberto pela base $\mathbf{V}$ (Ben-Israel e Greville, 1980).

Substituindo-se a equação (A.2) na equação (2.6.20) e considerando a equação (2.7.16), obtém-se a expressão final:

$$\mathbf{p}-\mathbf{p}^b = \mathbf{H}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{F}+\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right]^{-1}\mathbf{H}\left(\mathbf{d}-\mathbf{d}^b\right) \tag{A.3}$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{F}+\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right]^{-1}\mathbf{H} \tag{A.4}$$

é a matriz de rigidez do método híbrido de elementos finitos para problemas estáticos. Esta matriz é simétrica, positiva semi-definida por construção ortogonal a deslocamentos de corpo rígido:

$$\mathbf{W}^T\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{0} \tag{A.5}$$

APÊNDICE B - Avaliação de deslocamentos no domínio em problemas de elastostática

Diferentemente do que acontece no método de elementos finitos convencional, no método híbrido de elementos finitos apresentado a contribuição de corpo rígido aos deslocamentos internos em problemas estáticos tem que ser calculada explicitamente durante o processo de pós-análise, já que nenhuma referência é feita direta às constantes C_{sm} da equação (2.3.8) durante a formulação do método (Dumont, 2003). Isso tem a ver com o fato conceitual de o método estar baseado num campo de tensões e não de deslocamentos.

No entanto, deslocamentos de corpo rígido inerentes ao problema e, portanto, deslocamentos absolutos, podem ser calculados uma vez conhecidos os deslocamentos nodais **d** em todo Γ, como se descreve a seguir. Inicialmente, expressa-se a função de deslocamentos de corpo rígido u_{is}^{r} da equação (2.3.8) de forma normalizada, de tal modo que, nos pontos nodais do contorno Γ seja coincidente com os valores da matriz normalizada W_{si}, que é a base dos deslocamentos de corpo rígido, introduzida na Seção 2.7.2. Sejam $\widetilde{u}_{is}^{r}$ funções genéricas de corpo rígido, ainda não-normalizadas. Funções normalizadas

$$u_{ij}^{r} = \widetilde{u}_{ik}^{r} \Lambda_{kj} \tag{B.1}$$

podem ser obtidas pela determinação da matriz quadrada, não-singular Λ_{kj} a partir da imposição de que, nos pontos nodais do contorno, $u_{mj}^{r} \equiv U_{mj}^{r} = W_{mj}$, ou seja,

$$U_{mj}^{r} \equiv W_{mj} = \widetilde{U}_{mk}^{r} \Lambda_{kj} \quad \text{ou} \quad \mathbf{U}^{r} \equiv \mathbf{W} = \widetilde{\mathbf{U}}^{r} \mathbf{\Lambda} \tag{B.2}$$

usando notação tanto indicial quanto matricial, de onde se obtém, pré-multiplicando-se toda a equação por $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$ e observando a equação (2.7.13):

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{\mathbf{U}}^{r}\right)^{-1} \tag{B.3}$$

Além disso, pode-se reescrever a equação (2.3.8) em uma forma equivalente, na qual os deslocamentos de corpo rígido são expressos separadamente, para certo vetor de parâmetros $\mathbf{r} \equiv r_s$:

$$u_i^{f} = u_i^{*} + u_i^{b} = (u_{im}^{*} + u_{ij}^{r} C_{jm}) p_m^{*} + u_i^{b} + u_{ij}^{r} r_j \tag{B.4}$$

Para ser consistente, a equação (B.4) deve ser válida nos pontos nodais,

$$\mathbf{d} = \left(\mathbf{U}^{*} + \mathbf{WC}\right)\mathbf{p}^{*} + \mathbf{d}^{b} + \mathbf{Wr} \quad ou \quad d_m = (U_{mn}^{*} + W_{mi} C_{in}) p_n^{*} + d_m^{b} + W_{mi} r_i \tag{B.5}$$

em notação matricial e indicial, respectivamente. Neste equação, $\mathbf{U}^*$ é uma matriz obtida expressando-se a solução fundamental u^*_{im} nos pontos nodais do elemento.

Então, pré-multiplicando-se a equação (B.5) em ambos os lados por $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$ (lembrando que $\mathbf{W}$ é ortonormal) e isolando-se $\mathbf{r}$, resulta:

$$\mathbf{r} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{d}-\mathbf{d}^b\right)-\left(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^* + \mathbf{C}\right)\mathbf{p}^* \quad ou \quad r_s = W_{ms}\left(d_m - d^b_m\right)-\left(W_{ms}U^*_{mn} + C_{sn}\right)p^*_n \tag{B.6}$$

Finalmente, substituindo-se esta expressão em (B.4), obtém-se a expressão dos deslocamentos em pontos internos do método híbrido para problemas estáticos com consideração de corpo rígido:

$$u^*_i = (u^*_{im} - u^r_{is}W_{ns}U^*_{nm})\,p^*_m + u^b_i + u^r_{is}W_{ns}\left(d_m - d^b_m\right) \tag{B.7}$$

Observe que, nesta expressão, u^*_i depende apenas dos valores encontrados na análise para $\mathbf{p}^*$ e $\mathbf{d}-\mathbf{d}^b$, já que a constante $\mathbf{C}$ é cancelada.

APÊNDICE C - Cálculo da matriz de rigides K no contexto do Método híbrido simplificado de elementos finitos

Alternativamente à forma como é calculada a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ durante todo o presente trabalho, existe uma forma mais simples, eficiente e tão precisa quanto, que ao invés de necessitar da matriz de flexibilidade $\mathbf{F}$ (como na Seção 2.6.2, necessita apenas que se avalie a solução fundamental nos pontos nodais do elemento, gerando uma matriz denominada $\mathbf{U}^*$, sem a necessidade de integração no contorno. Além disso, o processo de inversão de $\mathbf{U}^*$ (necessário para a obtensão de $\mathbf{K}$ como será mostrado a seguir) é mais simples, já que $\mathbf{U}^*$ é não-singular, mesmo para problemas estáticos.

Essa forma alternativa de obtenção da matriz de rigidez é a característica principal do denominado método híbrido *simplificado* de elementos de contorno (Chaves, 1999, 2003) e de elementos finitos. A seguir é apresentado de maneira sucinta o processo de obtenção da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ através do método híbrido simplificado de elementos finitos.

A partir do equilíbrio de forças nodais em termos de trabalhos virtuais, é possível se chegar exatamente à equação (2.6.20),

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \tag{2.6.20}$$

sem a necessidade de se fazer qualquer menção ao potencial de Hellinger-Reissner.

Os deslocamentos no domínio Ω do corpo elástico são expressos de acordo com as equações (2.3.2) e (2.6.9):

$$u_i^f = u_{im}^* p_m^* + u_i^p \tag{C.1}$$

e os deslocamentos no contorno Γ, de acordo com a equação (2.6.10):

$$\tilde{u}_i = u_{im} d_m \tag{2.6.10}$$

Pode-se forçar que ambas as hipóteses de deslocamentos coincidam nos pontos nodais, o que em notação matricial se escreve, a partir da equação (C.1),

$$\mathbf{d} = \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* + \mathbf{d}^b \tag{C.2}$$

onde $\mathbf{U}^* \equiv U_{mn}^*$ é uma matriz de deslocamentos medidos em pontos nodais em termos da solução fundamental, dada pela equação (5.1.9), e $\mathbf{d}^b \equiv u_m^b$ é o vetor de deslocamentos relacionados à solução particular.

A matriz $\mathbf{U}^* \equiv U_{mn}^*$, que no método híbrido simplificado de elementos de contorno é simétrica por construção, no método híbrido simplificado de elementos finitos é não-simétrica para a maioria dos elementos. Uma outra diferença da matriz $\mathbf{U}^*$ obtida através do método híbrido de elementos finitos em relação à obtida através do método híbrido de elementos de contorno é que ela é não-singular, tanto para problemas no domínio da freqüência quanto para problemas estáticos.

Um caso particular em que a matriz $\mathbf{U}^*$ é simétrica é o dos elementos unidimensionais (apresentados no Capítulo 5), para os quais a utilização da matriz $\mathbf{U}^*$ fornece exatamente a mesma matriz de rigidez $\mathbf{K}$ obtida com a utilização da matriz de flexibilidade $\mathbf{F}$, já que nenhuma aproximação é feita em relação às funções de interpolação utilizadas no contorno destes elementos.

Eliminando-se $\mathbf{p}^*$ nas equações (2.6.20) e (C.2), obtém-se

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{U}^*\right)^{-1}\left(\mathbf{d}-\mathbf{d}^b\right)=\mathbf{p}-\mathbf{p}^b \tag{C.3}$$

em que

$$\mathbf{K}=\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{U}^*\right)^{-1} \tag{C.4}$$

é uma matriz de rigidez que, devido à equação (C.2) ser formulada sem base variacional, é em geral não-simétrica.

Como mencionado no item 2.6.3 do Capítulo 2, em geral há mais graus de liberdade internos, relacionados a $\mathbf{p}^*$, do que graus de liberdade externos, relacionados a $(\mathbf{d}-\mathbf{d}^{\mathbf{b}})$, ou seja, $\dim\left(\mathbf{p}^*\right)\geq\dim\left(\mathbf{d}-\mathbf{d}^b\right)$ (ver tabelas 3.1 e 3.2 do Capítulo 3), o que ocasiona uma matriz $\mathbf{U}^*$ retangular (exceto em casos especiais, como o caso particular de elementos unidimensionais apresentados no Capítulo 5), que só pode ser invertida através de procedimentos de obtenção de matrizes inversas generalizadas.

Para o caso particular de elementos de treliça, apresentados na seção 5.1 do Capítulo 5, a matriz $\mathbf{U}^*$ dada para uma determinada freqüência assume a forma

$$\mathbf{U}^*=\frac{1}{EA}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\operatorname{sen}k\ell}{k}\\ \dfrac{\operatorname{sen}k\ell}{k} & 0\end{bmatrix} \tag{C.5}$$

de acordo com a equação (5.1.9), ou em um desenvolvimento em série de freqüência,

$$\mathbf{U}^*=\frac{\ell}{EA}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\frac{\rho}{E}\omega^2\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\ell^2}{6}\\ \dfrac{\ell^2}{6} & 0\end{bmatrix}+\frac{\rho^2}{E^2}\omega^4\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\ell^4}{120}\\ \dfrac{\ell^4}{120} & 0\end{bmatrix}-\frac{\rho^3}{E^3}\omega^6\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\ell^6}{5040}\\ \dfrac{\ell^6}{5040} & 0\end{bmatrix}\right)+\mathbf{0}(\omega^8) \tag{C.6}$$

de acordo com a equação (5.1.17).

A inversa da matriz **U*** como uma série de freqüência, a partir da equação (C.6), necessária para obtenção da matriz de rigidez **K**, dada na equação (C.4), deve ser obtida através do procedimento de inversão de matrizes em série de freqüência apresentado na seção 2.10 do capítulo 2, conforme as equações (2.10.1) e (2.10.2), visto que $\mathbf{U}_0$* é não-singular. Deve-se notar que o processo de obtenção de **K**, para elementos unidimensionais através de **U***, é extremamente vantajoso e mais simples do que a obtenção através **F**, visto que apenas a inversão de $\mathbf{U}_0$* se torna necessária.

APÊNDICE D -
Matrizes de transformação para elementos de treliça e viga

Neste apêncice são apresentadas algumas das matrizes de transformação entre os deslocamentos de sistemas de coordenadas que podem ser utilizados para os elementos de treliça e viga apresentados no capítulo 5.

Será denominado de *natural* o sistema de coordenadas com o menor número de graus de liberdade possível por elemento; de *local* o sistema de coordenadas em que os graus de liberdade se encontrarem na direção axial ou perpendicular ao elemento; e de *global* o sistema de coordenadas do elemento com o maior número de graus de liberdade dispostos de acordo com os graus de liberdade globais da estrutura.

D.1 - Matrizes de transformação para o elemento de treliça plana

O sistema de coordenada natural mais simples para os deslocamentos e esforços de um elemento de treliça no plano é o apresentado na Figura D.1a,

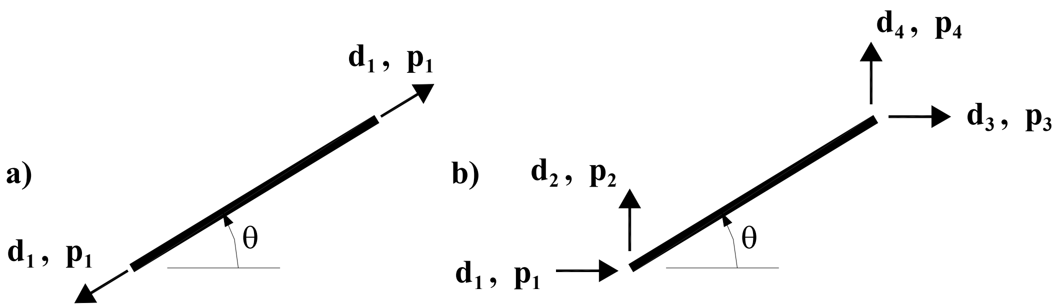

Figura D.1: a) Sistema de coordenadas naturais (sem deslocamentos de corpo rígido) de um elemento de treliça; b) sistema de coordenadas globais de um elemento de treliça.

Neste sistema de coordenadas, figura D.1a, não aperecem deslocamentos de corpo rígido e a matriz de rigidez do elemento tem ordem de 1x1, visto que o elemento possui apenas um grau de liberdade. Porém, em geral, para o estudo de treliças no plano, deseja-se obter a matriz de rigidez do elemento no sistema apresentado pela figura D.1b, em que aparecem quatro graus de liberdade, dos quais três correspondem a deslocamentos de corpo rígido.

Para que se possa obter uma matriz de rigidez no sistema de coordenadas globais (figura D.1b) partindo-se da matriz de rigidez obtida para o sistema de coordenadas naturais (figura D.1a), deve-se utilizar uma matriz de transformação, que permita transformar deslocamentos do sistema de coordenadas globais (figura D.1b) para o sistema de coordenadas naturais (figura D.1a).

Tal matriz de transformação é obtida aplicando-se um deslocamento unitário no grau de liberdade do sistema global, mantendo-se nulos todos os outros graus do referido sistema, e medindo-se o valor desse deslocamento unitário no sistema de coordenadas naturais, conforme ilustra a Figura D.2.

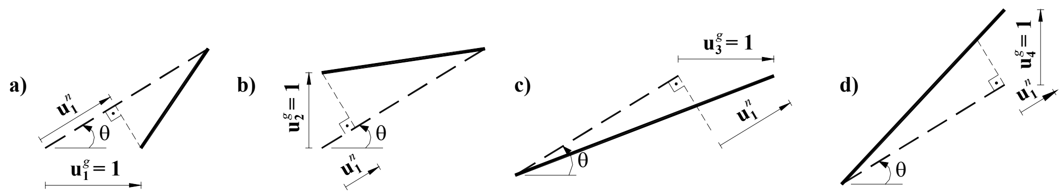

Figura D.2: Deslocamentos unitários do sistema global do elemento medidos a partir do sistema natural.

O procedimento ilustrado pela figura D.2 fornece, para os sistemas de coordenadas da Figura D.1, a seguinte matriz de transformação:

$$\mathbf{T} = \langle -\cos\theta \quad -\operatorname{sen}\theta \quad \cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta \rangle \tag{D.1}$$

que se relaciona com as matrizes de rigidez dos sistemas acima pela expressão:

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^n \mathbf{T} \tag{D.2}$$

em que $\mathbf{K}^g$ é a matriz de rigidez do elemento no sistema global (Figura D.1b) e $\mathbf{K}^n = \frac{EA}{\ell}$ é a matriz de rigidez do elemento no sistema natural (Figura D.1a).

Portanto, $\mathbf{K}^g$ é igual a:

$$\mathbf{K}^g = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \tag{D.3}$$

onde $c = \cos\theta$ e $s = \operatorname{sen}\theta$.

De acordo com o desenvolvimento feito na seção 5.1 do Capítulo 5, o sistema de coordenadas mais adequado para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de treliça pelo método híbrido de elementos finitos é:

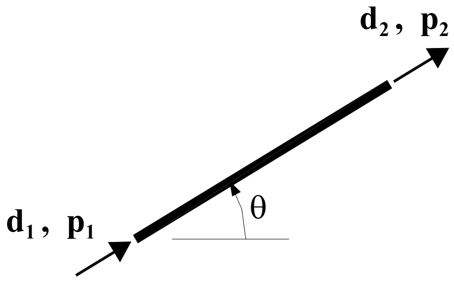

Figura D.3: Sistema de coordenadas local (com apenas 1 deslocamento de corpo rígido) de um elemento de treliça.

Ele fornece a matriz de rigidez apresentada na equação (5.1.21) e a matriz de transformação entre este sistema de coordenadas e o sistema da figura D.1b tem a forma:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} \tag{D.4}$$

$$\mathbf{K}^{g}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\ell}\mathbf{T} \tag{D.5}$$

onde $\mathbf{K}^{\ell}$ é

$$\mathbf{K}^{\ell}=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{D.6}$$

e $\mathbf{K}^{g}$ é a matriz de rigidez do elemento de treliça no sistema global, exatamente igual à matriz de rigidez encontrada usando a equação (D.3).

Outro sistema de coordenadas, muito difundido devido ao método da rigidez direta, é o da Figura D.4:

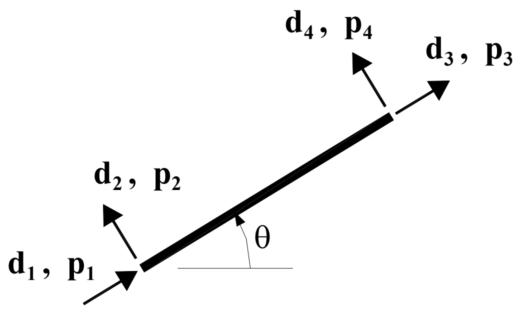

Figura D.4: Sistema de coordenadas local (com três deslocamentos de corpo rígido) de um elemento de treliça plana.

Nele aparecem todos os graus de liberdade possíveis em um elemento de treliça plana. A matriz de transformação entre os deslocamentos do sistema da Figura D.1b e os deslocamentos da Figura D.4 tem a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{D.7}$$

A transformação entre as matrizes do sistema local e global é dada pela equação (D.4), onde $\mathbf{K}^{\ell}$ tem a forma:

$$\mathbf{K}^{\ell} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{D.8}$$

D.2 - Matriz de transformação para o elemento de viga com 6 graus de liberdade

Em geral os elementos de viga são apresentados com 6 graus de liberdade, conforme mostra a Figura D.4, e não apenas com 4 graus de liberdade, como feito nas seções 5.2 e 5.3 do Capítulo 5.

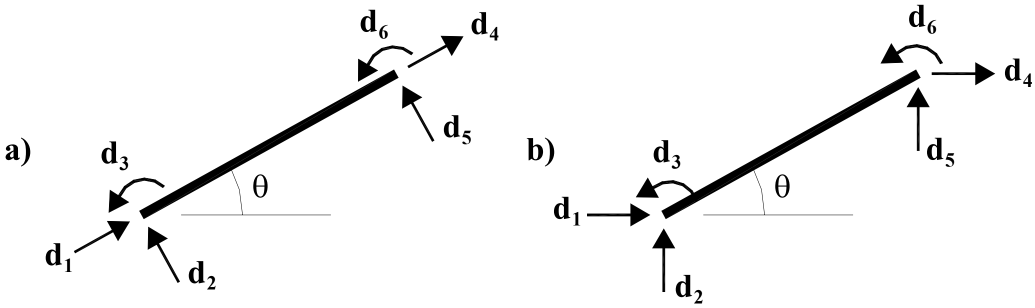

Figura D.4: a) Sistema de coordenadas local (com três deslocamentos de corpo rígido) de um elemento de viga; b) sistema de coordenadas global de um elemento de viga.

A matriz de rigidez local para um elemento de viga esbelta com os graus de liberdade da Figura D.4a é igual a:

$$\mathbf{K}^{\ell} = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} \frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\ell & 0 & -12 & 6\ell \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & 0 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -\frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 & \frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6\ell & 0 & 12 & -6\ell \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \tag{D.8}$$

na qual se percebe o acréscimo de mais duas linhas e colunas para representar as parcelas de rigidez correspondente aos graus de liberdade d_1 e d_2, que são exatamente iguais às rigidezes calculadas para o elemento de treliça da Seção 5.1 do capítulo 5. Da mesma forma, as parcelas referentes às matrizes de massa do elemento de treliça da Seção 5.1 devem ser adicionadas as matrizes de massa do elemento de viga das Seções 5.2 e 5.3 para a obtenção das matrizes de massa do elemento de viga com 6 graus de liberdade (de acordo com a Figura D.4a).

A matriz de transformação que relaciona os deslocamentos do sistema global de coordenadas da Figura D.4b aos respectivos deslocamentos no sistema local da Figura D.4a tem a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{D.9}$$

sendo a transformação entre as matrizes do sistema local e global para um elemento de treliça expressa pela equação (D.4), onde $\mathbf{T}$ é dada pela equação (D.9) e $\mathbf{K}^{\ell}$ pela equação (D.8).

APÊNDICE E -
Formulação analítica de cabos flexíveis

O cabo, ou fio, flexível, é um elemento estrutural muito utilizado em linhas de transmissão, pontes pênseis, transportes funiculares etc. Em seu cálculo admite-se, por hipótese, que o cabo seja um corpo em equilíbrio e que nele não haja nenhum esforço resistente à flexão, o que implica só existirem no cabo esforços normais que agem na direção axial. Seu estudo envolve o conhecimento das relações que existem entre as tensões, o vão, a flecha e o seu comprimento (Merian, 1985).

As forças que agem sobre os cabos flexíveis podem ser: forças concentradas, como mostra a figura E.1a, ou forças distribuídas em seu comprimento, como mostra a figura E.1b, onde w é uma carga de intensidade variável.

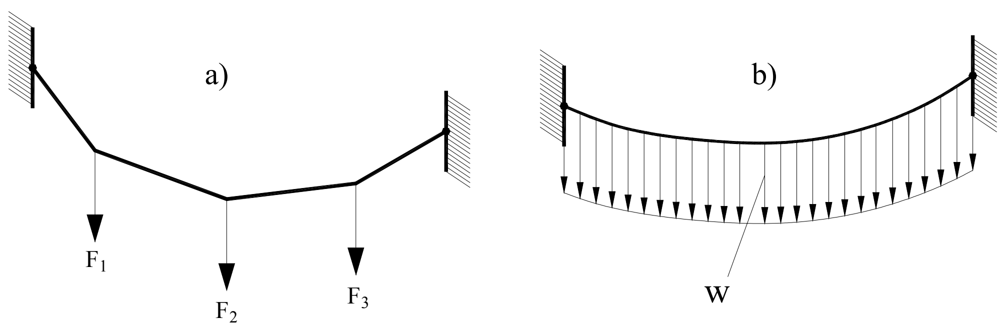

Figura E.1: Configurações de carregamento sobre um cabo flexível: a) cabo sujeito a forças concentradas F; b) cabo sob carregamento distribuído w.

E.1 - Equação de governo

Para que seja satisfeita a condição de equilíbrio do cabo, supõe-se que cada parcela infinitesimal do cabo esteja em equilíbrio. Na figura E.2 é mostrado o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal, em que T é a tração no cabo, θ é o ângulo que o cabo forma com a horizontal na direção x, w é uma carga distribuída verticalmente ao longo da componente horizontal e μ uma carga distribuída verticalmente ao longo do cabo, podendo ser, por exemplo, seu próprio peso.

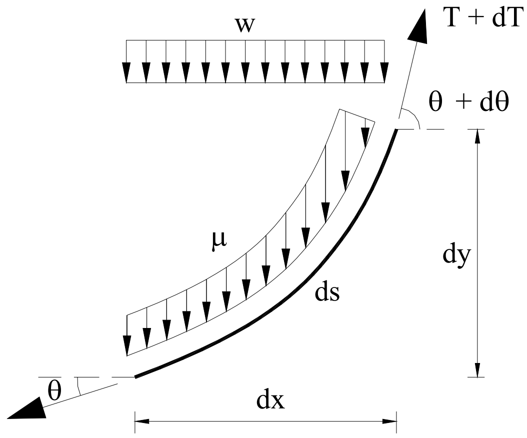

Figura E.2: Diagrama do corpo livre de um elemento infinitesimal de cabo.

Fazendo-se o somatório das forças verticais e das forças horizontais, respectivamente, tem-se:

$$(T + dT)\mathrm{sen}(\theta + d\theta) = T\,\mathrm{sen}\,\theta + wdx + \mu ds \qquad \text{(E.1)}$$

$$(T + dT)\cos(\theta + d\theta) = T\cos\theta \qquad \text{(E.2)}$$

Desenvolvendo o seno e o co-seno da soma dos dois ângulos, levando em consideração que, no limite, $\mathrm{sen}\,d\theta = d\theta$ e $\cos d\theta = 1$, e cancelando os termos de segunda ordem, obtém-se:

$$T\cos(\theta)d\theta + dT\,\mathrm{sen}\,\theta = wdx + \mu ds \qquad \text{(E.3)}$$

$$-T\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta + dT\cos\theta = 0 \qquad \text{(E.4)}$$

que se pode escrever como

$$d(T\,\mathrm{sen}\,\theta) = wdx + \mu ds \qquad \text{(E.5)}$$

$$d(T\cos\theta) = 0 \qquad \text{(E.6)}$$

A equação (E.6) mostra que a componente horizontal de T é uma constante, ou seja,

$$T\cos\theta = T_0 \qquad \text{(E.7)}$$

que combinada com a equação (E.5), fornece:

$$d(T_0\tan\theta) = wdx + \mu ds \qquad \text{(E.8)}$$

Lembrando que $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$, chega-se a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} + \frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx} \qquad \text{(E.9)}$$

que é a equação diferencial dos cabos flexíveis. A solução desta equação deve levar em conta as condições de contorno.

E.2 - Cabo Parabólico

Quando o peso próprio do cabo é pequeno em relação ao carregamento que nele age e tal carregamento é constante e uniformemente distribuído pela distância horizontal (vão), o cabo assume a configuração de um arco parabólico.

Sendo então w o carregamento constante e μ o peso próprio do cabo, desprezível, tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} \tag{E.10}$$

Integrando-se uma vez a equação (E.10), chega-se a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0}x + C_1 \tag{E.11}$$

onde C_1 é uma constante de integração.

Uma segunda integração da equação (E.10) fornece:

$$y = \frac{w}{2T_0}x^2 + C_2 \tag{E.12}$$

Adotando os eixos coordenados no vértice da parábola, conforme mostra a figura E.3a (abaixo), tem-se que, $\frac{dy}{dx} = 0$, quando x = 0, de modo que C_1 = 0. Da mesma forma y = 0, quando x = 0, e portanto C_2 = 0.

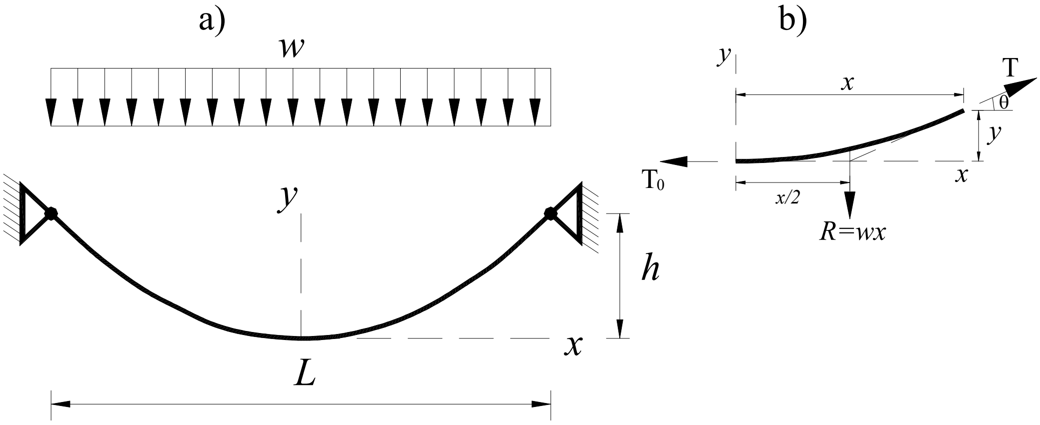

Figura E.3: Configuração de eixos e carregamento em um cabo parabólico.

Então a equação que define a configuração do cabo parabólico, de acordo com a figura E.3a é:

$$y = \frac{w}{2T_0}x^2 \tag{E.13}$$

Como se pode notar, na figura E.3b, a componente horizontal da tração do cabo é a própria tração do cabo na origem. Entrando-se na equação (E.13) com os valores $x = L/2$ e $y = h$, tem-se,

$$T_0 = \frac{wL^2}{8h} \tag{E.14}$$

$$y = \frac{4hx^2}{L^2} \tag{E.15}$$

A tração T é dada pela seguinte expressão, de acordo com o diagrama de corpo livre da figura E.3b,

$$T = \sqrt{T_0^{\ 2} + w^2 x^2} \tag{E.16}$$

ou, eliminando-se T_0,

$$T = w\sqrt{x^2 + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2} \tag{E.17}$$

A tração máxima ocorre quando $x = L/2$ e vale

$$T_{máx} = \frac{wL}{2}\sqrt{1 + \frac{L^2}{16h^2}} \tag{E.18}$$

Para se obter o comprimento S de um seguimento de cabo, utiliza-se da relação diferencial $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Portanto,

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2} + \frac{T_0}{2w}\ln\left(\frac{wx}{T_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\right)$$

(E.19)

E.3 - Cabo em Catenária

Quando o cabo está sujeito somente à ação do seu peso próprio, sua equação de governo torna-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx} \tag{E.20}$$

A figura E.4a mostra um cabo em catenária e os eixos coordenados adotados. Na figura E.4b tem-se o diagrama de corpo livre de uma porção finita do cabo de comprimento s. Este diagrama de corpo livre difere daquele de figura E.3b pelo fato de ser agora a força vertical suportada igual ao peso da parte do cabo de comprimento s, em lugar da carga uniformemente distribuída em relação à horizontal.

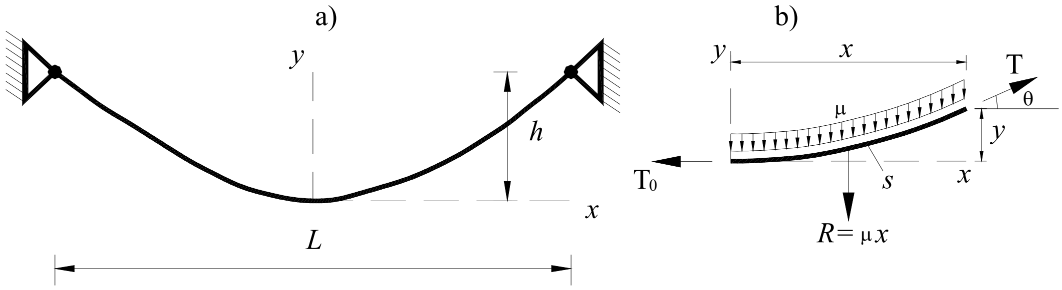

Figura E.4: a) cabo em catenária e eixos coordenados; b) diagrama de corpo livro de uma porção finita do cabo de comprimento s.

A partir da relação diferencial $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, modifica-se a equação (E.20), de forma a torná-la

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{E.21}$$

que é a equação diferencial da curva catenária formada pelo cabo.

Utilizando-se as expressões do co-seno hiperbólico, do seno hiperbólico e de suas derivadas é possível chegar à solução da equação (E.21) de maneira bastante simples.

Primeiramente, percebendo-se a semelhança entre a derivada do seno hiperbólico de ax, equação (E.22), e a equação (E.21),

$$\frac{d\,\mathrm{senh}\,ax}{dx} = a\cosh ax = a\sqrt{1+\mathrm{senh}^2\,ax} \tag{E.22}$$

chega-se à conclusão que

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{senh}\left(\frac{\mu}{T_0}x\right) \tag{E.23}$$

Portanto, a integração da equação (E.23) fornece:

$$y = \frac{T_0}{\mu}\cosh\left(\frac{\mu}{T_0}x\right) + C \tag{E.24}$$

em que C é a constante de integração. Considerando-se que $y = 0$, quando $x = 0$, conclui-se que $C = -T_0/\mu$ e, portanto,

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu}{T_0}x\right) - 1\right) \tag{E.25}$$

a qual é a equação da curva catenária formada pelo cabo suspenso sob a ação do seu próprio peso.

Do diagrama de corpo livre da figura E.4b e das expressões anteriores vem

$$s = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^x \cosh\frac{\mu x}{T_0}\, dx = \frac{T_0}{\mu}\operatorname{senh}\frac{\mu x}{T_0} \tag{E.26}$$

A tração T no cabo é obtida do triângulo de equilíbrio das forças na figura E.4b. Assim,

$$T^2 = T_0^{\,2} + \mu^2 s^2 \tag{E.27}$$

A substituição do valor de s dado pela equação (E.26) na equação (E.27) fornece,

$$T^2 = T_0^{\,2}\left(1 + \operatorname{senh}^2\frac{\mu x}{T_0}\right) = T_0^{\,2}\cosh^2\frac{\mu x}{T_0} \tag{E.28}$$

ou, em função de y, através da utilização da equação (E.25),

$$T = T_0 \cosh\frac{\mu x}{T_0} = T_0 + \mu y \tag{E.29}$$

A solução de problemas de catenária para cabos muito tencionados (cabos em que a relação flecha-vão é pequena), pode ser obtida, de maneira aproximada, pelas fórmulas apresentadas para o caso de cabo parabólico. Em problemas em que os cabos são suspensos em pontos que não estão no mesmo nível, pode-se aplicar as relações acima de forma isolada em ambos os lados do cabo, de forma a se resolver o problema por inteiro.

APÊNDICE F -
Condensação Estática dos graus de liberdade 3 e 6 do elemento de viga

Para se obter o elemento de treliça com 4 graus de liberdade (conforme a Figura 5.5), deve-se pensar o elemento de viga com seis graus de liberdade da Figura F.1, como tendo dois graus de liberdade internos (d_3 e d_6) e quatro externos (d_1, d_2, d_4 e d_5).

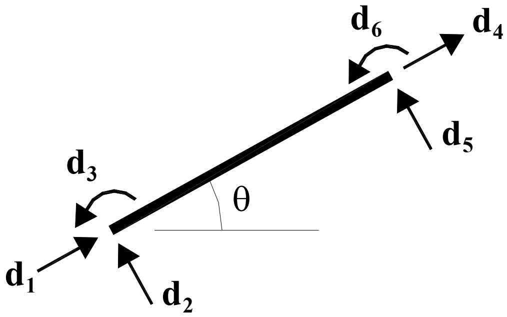

Figura F.1: Graus de liberdade de um elemento de viga plana.

Desta forma pode-se escrever a matriz do elemento de viga, dada pela equação (5.2.22) reescrita abaixo,

$$\mathbf{K}=\frac{EIk}{1-Cc}\begin{bmatrix} \frac{k^t EAc^t}{s^t}\frac{(1-Cc)}{EIk} & 0 & 0 & -\frac{k^t EA}{s^t}\frac{(1-Cc)}{EIk} & 0 & 0 \\ 0 & k^2(Sc+Cs) & kSs & 0 & -k^2(S+s) & k(C-c) \\ 0 & kSs & Cs-Sc & 0 & k(c-C) & S-s \\ -\frac{k^t EA}{s^t}\frac{(1-Cc)}{EIk} & 0 & 0 & \frac{k^t EAc^t}{s^t}\frac{(1-Cc)}{EIk} & 0 & 0 \\ 0 & -k^2(S+s) & k(c-C) & 0 & k^2(Sc+Cs) & -kSs \\ 0 & k(C-c) & S-s & 0 & -kSs & Cs-Sc \end{bmatrix} \quad (5.2.22)$$

como:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} K_{11}^{ee} & K_{12}^{ee} & K_{13}^{ei} & K_{14}^{ee} & K_{15}^{ee} & K_{16}^{ei} \\ K_{21}^{ee} & K_{22}^{ee} & K_{23}^{ei} & K_{24}^{ee} & K_{25}^{ee} & K_{26}^{ei} \\ K_{31}^{ie} & K_{32}^{ie} & K_{33}^{ii} & K_{34}^{ie} & K_{35}^{ie} & K_{36}^{ii} \\ K_{41}^{ee} & K_{42}^{ee} & K_{43}^{ei} & K_{44}^{ee} & K_{45}^{ee} & K_{46}^{ei} \\ K_{51}^{ee} & K_{52}^{ee} & K_{53}^{ei} & K_{54}^{ee} & K_{55}^{ee} & K_{56}^{ei} \\ K_{61}^{ie} & K_{62}^{ie} & K_{63}^{ii} & K_{64}^{ie} & K_{65}^{ie} & K_{66}^{ii} \end{bmatrix} \quad (F.1)$$

em que, os índices ee, ei, ie e ii nos elementos da matriz indicam a relação destes elementos com os graus de liberdade externos e internos.

Desta forma é possível montar as seguintes submatrizes a partir da matriz $\mathbf{K}$, conforme equações (F.1) e (5.2.22):

$$\mathbf{K}_{ee} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ee} & K_{12}^{ee} & K_{14}^{ee} & K_{15}^{ee} \\ K_{21}^{ee} & K_{22}^{ee} & K_{24}^{ee} & K_{25}^{ee} \\ K_{41}^{ee} & K_{42}^{ee} & K_{44}^{ee} & K_{45}^{ee} \\ K_{51}^{ee} & K_{52}^{ee} & K_{54}^{ee} & K_{55}^{ee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^t EAc^t}{s^t} & 0 & -\frac{k^t EA}{s^t} & 0 \\ 0 & \frac{k^3 EI(Sc+Cs)}{1-Cc} & 0 & -\frac{k^3 EI(S+s)}{1-Cc} \\ -\frac{k^t EA}{s^t} & 0 & \frac{k^t EAc^t}{s^t} & 0 \\ 0 & -\frac{k^3 EI(S+s)}{1-Cc} & 0 & \frac{k^3 EI(Sc+Cs)}{1-Cc} \end{bmatrix} \quad \text{(F.2)}$$

$$\mathbf{K}_{ei} = \begin{bmatrix} K_{13}^{ei} & K_{16}^{ei} \\ K_{23}^{ei} & K_{26}^{ei} \\ K_{43}^{ei} & K_{46}^{ei} \\ K_{53}^{ei} & K_{56}^{ei} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k^2 EISs}{1-Cc} & \frac{k^2 EI(C-c)}{1-Cc} \\ 0 & 0 \\ -\frac{k^2 EI(C-c)}{1-Cc} & -\frac{k^2 EISs}{1-Cc} \end{bmatrix} \quad \text{(F.3)}$$

$$\mathbf{K}_{ie} = \begin{bmatrix} K_{31}^{ie} & K_{32}^{ie} & K_{34}^{ie} & K_{35}^{ie} \\ K_{61}^{ie} & K_{62}^{ie} & K_{64}^{ie} & K_{65}^{ie} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k^2 EISs}{1-Cc} & 0 & -\frac{k^2 EI(C-c)}{1-Cc} \\ 0 & \frac{k^2 EI(C-c)}{1-Cc} & 0 & -\frac{k^2 EISs}{1-Cc} \end{bmatrix} \quad \text{(F.4)}$$

$$\mathbf{K}_{ie} = \begin{bmatrix} K_{33}^{ii} & K_{36}^{ii} \\ K_{63}^{ii} & K_{66}^{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{kEI(-Sc+Cs)}{1-Cc} & \frac{kEI(S-s)}{1-Cc} \\ \frac{kEI(S-s)}{1-Cc} & \frac{kEI(-Sc+Cs)}{1-Cc} \end{bmatrix} \quad \text{(F.5)}$$

Sendo a equação da matriz de rigidez condensada dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{K}_{cond} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ie} \quad \text{(F.6)}$$

então, a matriz de rigidez condensada efetiva do elemento de viga é igual a:

$$\mathbf{K}_{cond} = \begin{bmatrix} \frac{k^t EAc^t}{s^t} & 0 & -\frac{k^t EA}{s^t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{k^3 EI(Sc-Cs)}{Ss} & 0 & -\frac{1}{2}\frac{k^3 EI(S-s)}{Ss} \\ -\frac{k^t EA}{s^t} & 0 & \frac{k^t EAc^t}{s^t} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{k^3 EI(S-s)}{Ss} & 0 & \frac{1}{2}\frac{k^3 EI(Sc-Cs)}{Ss} \end{bmatrix} \quad \text{(F.7)}$$

que é a matriz de rigidez efetiva do elemento de treliça bi-dimensional, cuja expansão em série de freqüência leva à equação (5.2.25).