

5

ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS APORTICADAS

Neste Capítulo é desenvolvida a formulação do método híbrido de elementos finitos para elementos unidimensionais (elemento de treliça e elemento de viga) seguindo-se de maneira semelhante o desenvolvimento da formulação apresentado de forma completamente geral no Capítulo 2 para elementos bi- e tridimensionais.

A motivação deste capítulo é o estudo realizado pelo Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia – NiCAE, que é coordenado pelo professor Remo Magalhães de Souza, do Departamento de Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Pará através do convênio Eletronorte/UFPa, com a participação do autor e do orientador desta dissertação.

O intuito deste capítulo é apresentar a formulação de elementos finitos híbridos unidimensionais de forma a possibilitar sua implementação em um programa de análise dinâmica de estruturas aporticadas adequado à análise de trechos de linhas de transmissão, de acordo com os objetivos do NiCAE.

Os desenvolvimentos feitos neste Capítulo são fortemente influenciados pelas apostilas e notas de aulas do curso de método híbrido de elementos de contorno ministrado na PUC-Rio pelo professor Dumont.

5.1. Formulação de um elemento de treliça

Elementos de treliça são os elementos mais simples da análise estrutural. São definidos como elementos que trabalham unicamente sob cargas axiais (tração ou compressão). São denominados elementos unidimensionais, por possuírem apenas uma dimensão predominante (Figura 5.1).

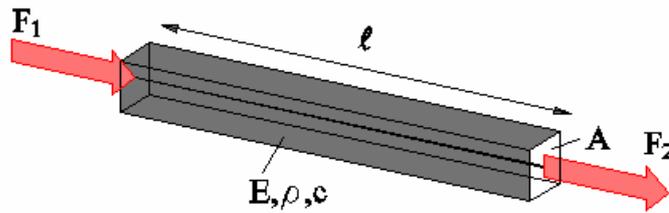


Figura 5.1: Elemento de treliça.

5.1.1. Formulação do Problema

A equação diferencial do problema de elasticidade para um elemento de treliça de comprimento ℓ , seção transversal constante A , módulo de elasticidade E , massa específica ρ e amortecimento viscoso c , submetido a vibração harmônica, é dada por,

$$E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (5.1.1)$$

onde $c = 2\zeta\rho$ é definido por unidade de volume e $u(x,t)$ é o deslocamento no tempo na direção do eixo longitudinal x da barra.

Supõe-se que o deslocamento $u(x,t)$ possa ser definido em termos de uma separação de variáveis de espaço $0 \leq x \leq \ell$ e tempo $t \geq 0$, como:

$$u(x,t) = u^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.1.2)$$

em que $e^{-i\omega t}$ é função $\tau(t,\omega)$ definida na equação (2.7.4). Portanto, a nova expressão para a equação (5.1.1), passa a ser

$$E \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} + \rho(\omega^2 + 2i\zeta\omega)u^*(x) = 0 \quad (5.1.3)$$

ou ainda, de forma mais simples,

$$\frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} + k^2 u^*(x) = 0 \quad (5.1.4)$$

em que

$$k^2 = \frac{\rho}{E}(\omega^2 + 2i\zeta\omega) \quad (5.1.5)$$

5.1.2. Obtenção da matriz de rigidez

A solução geral da equação (5.1.4) é:

$$u^*(x) = C_1 \frac{\text{sen } kx}{k} + C_2 \cos kx \quad (5.1.6)$$

de tal maneira que a solução estática alcançada como o caso limite seja

$$\lim_{k \rightarrow 0} u^*(x) = C_1 x + C_2 \quad (5.1.7)$$

Como se está analisando um problema no domínio da frequência, em termos de uma superposição de harmônicos, requer-se que

$$C_2 = 0 \quad (5.1.8)$$

já que a solução oscila em torno de $u^*(x) = 0$.

Uma forma adequada de expressar o campo de deslocamentos u^* (Dumont, 2005) é

$$u^* = \frac{1}{EA} \left\langle \frac{\text{sen } kx}{k} \quad \frac{\text{sen } k(\ell - x)}{k} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (5.1.9)$$

como uma função de dois parâmetros de força p_1^* e p_2^* , os quais são interpretados como as bases do sistema interno ou auxiliar de coordenadas, caracterizado por $(^*)$. Conseqüentemente, obtém-se para as tensões normais:

$$\sigma^* = E \frac{du^*}{dx} = \frac{1}{A} \langle \cos kx \quad -\cos k(\ell - x) \rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{p}^* \quad (5.1.10)$$

Por outro lado, pode-se descrever para os deslocamentos nas extremidades do elemento, definidas como os contornos Γ_1 e Γ_2 :

$$u = \langle 1 \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad u = \langle 0 \quad 1 \rangle \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (5.1.11)$$

em que \mathbf{N}_1 e \mathbf{N}_2 são as funções u_{im} definidas na equação (2.6.10). Observa-se que neste caso especial de elementos unidimensionais, u_{im} é constante, valendo 1 ou 0, de acordo com a equação (5.1.11).

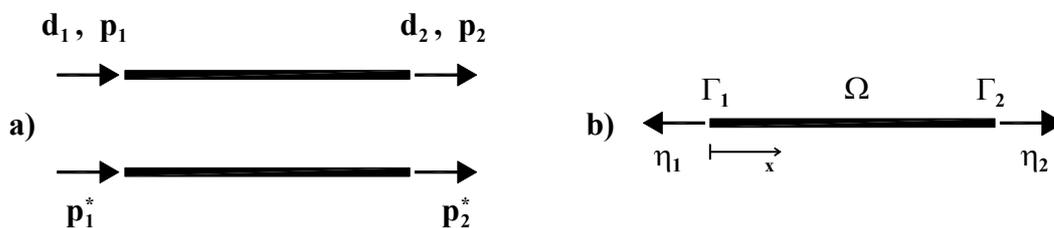


Figura 5.2: a) Sistema de coordenadas para a derivação da matriz de rigidez de um elemento de treliça e sistema interno de coordenadas; b) definição do domínio Ω , contornos Γ_1 e Γ_2 e correspondentes co-senos diretores η_1 e η_2 do elemento de treliça.

A matriz \mathbf{H} de transformação cinemática entre os sistemas \mathbf{d} e \mathbf{p}^* se expressa, de acordo com a equação (2.6.14), como:

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \eta \mathbf{N} d\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\cos k\ell \end{array} \right\} (-1) \langle 1 \ 0 \rangle + \left\{ \begin{array}{c} \cos k\ell \\ -1 \end{array} \right\} \langle 0 \ 1 \rangle = \begin{bmatrix} -1 & \cos k\ell \\ \cos k\ell & -1 \end{bmatrix} \quad (5.1.12)$$

onde η é a normal ao contorno do elemento e assume os valores -1 e 1 , para os contornos Γ_1 e Γ_2 , respectivamente, de acordo com a figura 5.2b. Deve-se observar que, para o elemento de treliça, a matriz de incidência cinemática \mathbf{H} é quadrada, como mostra a equação (5.1.12).

A matriz de flexibilidade no sistema interno \mathbf{p}^* se expressa, de acordo com a equação (2.6.13), como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \eta \mathbf{u}^* d\Gamma = \frac{1}{EA} \left[\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\cos k\ell \end{array} \right\} (-1) \left\langle 0 \ \frac{\sin k\ell}{k} \right\rangle + \left\{ \begin{array}{c} \cos k\ell \\ -1 \end{array} \right\} \left\langle \frac{\sin k\ell}{k} \ 0 \right\rangle \right] \\ &= \frac{\sin k\ell}{kEA} \begin{bmatrix} \cos k\ell & -1 \\ -1 & \cos k\ell \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

com a correspondente inversa

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{-kEA}{\sin^3 k\ell} \begin{bmatrix} \cos k\ell & 1 \\ 1 & \cos k\ell \end{bmatrix} \quad (5.1.14)$$

Finalmente, obtém-se a matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \frac{kEA}{\sin k\ell} \begin{bmatrix} \cos k\ell & -1 \\ -1 & \cos k\ell \end{bmatrix} \quad (5.1.15)$$

em que se pode verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.16)$$

É válido mencionar que as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{F} expressas pelas equações (5.1.12) e (5.1.13), respectivamente, são obtidas para uma dada frequência angular ω e também que elas são não-singulares, como foi dito na Subseção 2.7.1.

Como já foi dito na Subseção 2.7.3, pode-se, ao invés de se formular o problema para uma dada frequência ω , expressar as soluções fundamentais, dadas nesta seção pela na equação (5.1.9), como uma série de potência de frequências, ou seja,

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{EA} \left(\left(x - \frac{\rho x^3}{6E} \omega^2 + \frac{\rho^2 x^5}{120E^2} \omega^4 - \frac{\rho^3 x^7}{5040E^3} \omega^6 + 0(\omega^8) \right) \right. \\ &\left. \left((\ell - x) + \frac{\rho(-\ell + x)^3}{6E} \omega^2 - \frac{\rho^2(-\ell + x)^5}{120E^2} \omega^4 + \frac{\rho^3(-\ell + x)^7}{5040E^3} \omega^6 + 0(\omega^8) \right) \right) \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

$$\sigma^* = \frac{1}{A} \left\langle \left(1 - \frac{\rho x^2}{2E} \omega^2 + \frac{\rho^2 x^4}{24E^2} \omega^4 - \frac{\rho^3 x^6}{720E^3} \omega^6 + 0(\omega^8) \right) \right. \\ \left. \left(-1 + \frac{\rho(-\ell+x)^2}{2E} \omega^2 - \frac{\rho^2(-\ell+x)^4}{24E^2} \omega^4 + \frac{\rho^3(-\ell+x)^6}{720E^3} \omega^6 + 0(\omega^8) \right) \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{p}^* \quad (5.1.18)$$

e dessa forma se obter as matrizes \mathbf{H} , \mathbf{F} e \mathbf{K} também em série de freqüências como

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\sigma}_0^* + \omega^2 \boldsymbol{\sigma}_1^* + \omega^4 \boldsymbol{\sigma}_2^* + \omega^6 \boldsymbol{\sigma}_3^* + \mathbf{0}(\omega^8) \right)^T \eta \mathbf{N} d\Gamma = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 + \mathbf{0}(\omega^8) = \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^2}{2} \\ \frac{\ell^2}{2} & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho^2}{E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^2}{24} \\ \frac{\ell^2}{24} & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho^3}{E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^6}{720} \\ \frac{\ell^6}{720} & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.1.19)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\sigma}_0^* + \omega^2 \boldsymbol{\sigma}_1^* + \omega^4 \boldsymbol{\sigma}_2^* + \omega^6 \boldsymbol{\sigma}_3^* + \mathbf{0}(\omega^8) \right)^T \eta \left(\mathbf{u}_0^* + \omega^2 \mathbf{u}_1^* + \omega^4 \mathbf{u}_2^* + \omega^6 \mathbf{u}_3^* + \mathbf{0}(\omega^8) \right) d\Gamma = \\ \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\sigma}_0^{*T} \mathbf{u}_0^* + \omega^2 \left(\boldsymbol{\sigma}_0^{*T} \mathbf{u}_1^* + \boldsymbol{\sigma}_1^{*T} \mathbf{u}_0^* \right) + \omega^4 \left(\boldsymbol{\sigma}_0^{*T} \mathbf{u}_2^* + \boldsymbol{\sigma}_1^{*T} \mathbf{u}_1^* + \boldsymbol{\sigma}_2^{*T} \mathbf{u}_0^* \right) + \right. \\ \left. + \omega^6 \left(\boldsymbol{\sigma}_0^{*T} \mathbf{u}_3^* + \boldsymbol{\sigma}_1^{*T} \mathbf{u}_2^* + \boldsymbol{\sigma}_2^{*T} \mathbf{u}_1^* + \boldsymbol{\sigma}_3^{*T} \mathbf{u}_0^* \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \right) \eta d\Gamma = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{0}(\omega^8) = \\ \frac{\ell}{EA} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{2\ell^2}{3} & -\frac{\ell^2}{6} \\ -\frac{\ell^2}{6} & \frac{2\ell^2}{3} \end{bmatrix} + \frac{\rho^2}{E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} \frac{2\ell^4}{15} & -\frac{\ell^4}{120} \\ -\frac{\ell^4}{120} & \frac{2\ell^4}{15} \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \frac{\rho^3}{E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{4\ell^6}{315} & -\frac{\ell^6}{5040} \\ -\frac{\ell^6}{5040} & \frac{4\ell^6}{315} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.1.20)$$

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho \ell^2}{6E} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\rho^2 \ell^4}{45E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} & 1 \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \frac{\rho^3 \ell^6}{45E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & \frac{31}{336} \\ \frac{31}{336} & \frac{2}{21} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.1.21)$$

Fica claro na equação (5.1.20) que a primeira das matrizes no desenvolvimento em série da matriz \mathbf{F} , ou seja \mathbf{F}_0 , é singular, como já se havia mencionado na Subseção 2.7.2, do Capítulo 2, e sua inversão pode ser obtida de acordo com o que apresenta o Apêndice A.

Na equação (5.1.21) estão explícitas as matrizes de rigidez e massa, \mathbf{K}_0 e \mathbf{M}_1 , encontradas na análise dinâmica pelo método convencional de elementos finitos denominadas apenas por \mathbf{K} e \mathbf{M} .

5.2. Formulação de um Elemento de Viga – Viga Esbelta

Nesta formulação de viga, viga esbelta ou viga de Bernoulli-Euler, não se considera a deformação por cisalhamento, tampouco se considera a inércia à rotação, consideração que corresponderia a uma proposta de Rayleigh, que no entanto, não é consistente.

5.2.1. Formulação do Problema

A equação diferencial do problema de viga esbelta é:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (5.2.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia, $m = \rho A$ é a densidade específica (por unidade de comprimento), sendo A a área da seção transversal e ρ a massa específica, e $c = 2\zeta\rho$ é o amortecimento viscoso, definido por unidade de comprimento.

Supõe-se que o deslocamento $w(x,t)$ possa ser definido em termos de uma separação de variáveis de espaço x e de tempo t , como:

$$w(x,t) = w^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.2.2)$$

Então, a equação (5.2.1) passa a ser expressa como:

$$\frac{\partial^4 w^*(x)}{\partial x^4} - \frac{m}{EI}(\omega^2 + 2i\zeta\omega)w^*(x) = 0 \quad (5.2.3)$$

ou de forma mais adequada,

$$\frac{\partial^4 w^*(x)}{\partial x^4} - k^4 w^*(x) = 0 \quad (5.2.4)$$

onde

$$k^4 = \frac{m}{EI}(\omega^2 + 2i\zeta\omega) \quad (5.2.5)$$

5.2.2. Obtenção da Matriz de Rigidez

A solução geral da equação (5.2.4) se expressa, de maneira conveniente,

$$w^*(x) = C_1 \frac{\sin kx + \sinh kx}{k} + C_2 \frac{\sin kx - \sinh kx}{k^3} + C_3 (\cos kx + \cosh kx) + C_4 \frac{\cos kx - \cosh kx}{k^2} \quad (5.2.6)$$

de tal modo que

$$\lim_{k \rightarrow 0} w^*(x) = C_3 + C_1 x - C_4 x^2 - C_2 x^3 \quad (5.2.7)$$

O campo de deslocamentos transversais pode ser expresso na forma

$$w^* = \left\langle \frac{\text{sen } kx + \text{senh } kx}{k} \quad \frac{\text{sen } kx - \text{senh } kx}{k^3} \quad \cos kx + \cosh kx \quad \frac{\cos kx - \cosh kx}{k^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \quad (5.2.8)$$

$$\equiv \langle \mathbf{w}_1^* \quad \mathbf{w}_2^* \quad \mathbf{w}_3^* \quad \mathbf{w}_4^* \rangle \mathbf{p}^* \equiv \mathbf{w}^* \mathbf{p}^*$$

em função de quatro parâmetros de força, numa formulação híbrida de elementos finitos. Estes parâmetros \mathbf{p}^* não têm necessariamente um sentido físico definido, embora pudessem tê-lo, como se fez para a dedução de matriz de rigidez do elemento de treliça. Para efeito de estabelecimento das equações que governam o problema da viga, escreve-se, com a mesma notação usada para o elemento de treliça,

$$\left\{ \frac{dw^*}{dx} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^* & \mathbf{w}_2^* & \mathbf{w}_3^* & \mathbf{w}_4^* \\ \frac{d\mathbf{w}_1^*}{dx} & \frac{d\mathbf{w}_2^*}{dx} & \frac{d\mathbf{w}_3^*}{dx} & \frac{d\mathbf{w}_4^*}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (5.2.9)$$

Conseqüentemente, obtém-se para os esforços seccionais:

$$\begin{Bmatrix} Q^* \\ M^* \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{d^3 \mathbf{w}_1^*}{dx^3} & \frac{d^3 \mathbf{w}_2^*}{dx^3} & \frac{d^3 \mathbf{w}_3^*}{dx^3} & \frac{d^3 \mathbf{w}_4^*}{dx^3} \\ \frac{d^2 \mathbf{w}_1^*}{dx^2} & \frac{d^2 \mathbf{w}_2^*}{dx^2} & \frac{d^2 \mathbf{w}_3^*}{dx^2} & \frac{d^2 \mathbf{w}_4^*}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (5.2.10)$$

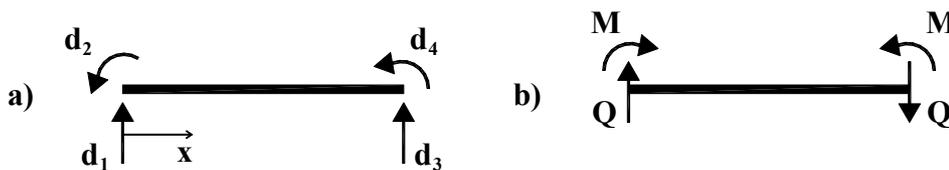


Figura 5.3: a) sistema de coordenadas para a matriz de rigidez; b) convenção de esforços para viga.

Por outro lado, usando a primeira das figuras 5.3 para a definição das grandezas do sistema externo de coordenadas e a segunda para a convenção de momentos fletores e esforços cortantes positivos, pode-se descrever para os deslocamentos e rotações nas extremidades do elemento, definidas como os contornos Γ_1 e Γ_2 , assim como para as matrizes η com os co-senos diretores:

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{dw}{dx} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d}; \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (5.2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{dw}{dx} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d}; \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (5.2.12)$$

A matriz \mathbf{H} de transformação cinemática entre os sistemas \mathbf{d} e \mathbf{p}^* se expressa, de acordo com a equação (2.6.14), como

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=0} \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=\ell} \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{N}_2 \quad (5.2.13)$$

Escrevendo, por simplicidade, $C = \cosh k\ell$, $c = \cos k\ell$, $S = \sinh k\ell$, $s = \sen k\ell$, tem-se:

$$\mathbf{H} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2(c-C) & k(S-s) \\ -2 & 0 & C+c & -(S+s)/k \\ 0 & 0 & -k^3(S+s) & k^2(C-c) \\ 0 & 2 & k(S-s) & -C-c \end{bmatrix} \quad (5.2.14)$$

Pode-se verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{H} = 2EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

A matriz de flexibilidade no sistema interno \mathbf{p}^* se expressa, de acordo com a equação (2.6.13), como

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=0} \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{u}^{*T} \Big|_{x=0} + \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=\ell} \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{u}^{*T} \Big|_{x=\ell} \quad (5.2.16)$$

ou,

$$\mathbf{F} = -2EI \begin{bmatrix} k(Cs - Sc) & 0 & k^2 Ss & -1 + Cc \\ 0 & (Sc - Cs)/k^3 & 1 - Cc & -Sc/k^2 \\ k^2 Ss & 1 - Cc & k^3 (Sc + Cs) & 0 \\ -1 + Cc & -Ss/k^2 & 0 & -(Sc + Cs)/k \end{bmatrix} \quad (5.2.17)$$

Pode-se verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{F} = -2EI\ell \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\ell^3/3 & 0 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.2.18)$$

Após a avaliação da inversa \mathbf{F}^{-1} , realiza-se o produto $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$, conforme equação (2.6.22), obtendo-se

$$\mathbf{K} = \frac{EI k}{1 - Cc} \begin{bmatrix} k^2(Sc + Cs) & kSs & -k^2(S + s) & k(C - c) \\ kSs & Cs - Sc & k(c - C) & S - s \\ -k^2(S + s) & k(c - C) & k^2(Sc + Cs) & -kSs \\ k(C - c) & S - s & -kSs & Cs - Sc \end{bmatrix} \quad (5.2.19)$$

Pode-se verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (5.2.20)$$

Dada a equação (5.2.19), pode-se expressar a expansão em série de potência de frequência da matriz de rigidez efetiva do elemento de viga, como:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} - \frac{m\ell}{35} \omega^2 \begin{bmatrix} 13 & \frac{11\ell}{6} & \frac{9}{2} & -\frac{13\ell}{12} \\ \frac{11\ell}{6} & \frac{\ell^2}{2} & \frac{13\ell}{2} & -\frac{\ell^2}{12} \\ \frac{9}{2} & \frac{13\ell}{3} & 12 & \frac{4}{3} \\ \frac{13\ell}{12} & \frac{\ell^2}{4} & 13 & -\frac{11\ell}{6} \end{bmatrix} - \frac{m^2 \ell^5}{161700EI} \omega^4 \begin{bmatrix} 59 & \frac{223\ell}{18} & \frac{1279}{24} & -\frac{1681\ell}{144} \\ \frac{223\ell}{18} & \frac{71\ell^2}{71} & \frac{1681\ell}{24} & -\frac{1097\ell^2}{144} \\ \frac{1279}{24} & \frac{1681\ell}{71} & 59 & -\frac{432}{223\ell} \\ \frac{24}{1681\ell} & \frac{144}{1097\ell^2} & \frac{223\ell}{71\ell^2} & \frac{18}{27} \end{bmatrix} - \frac{m^3 \ell^9}{E^2 I^2} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{551}{794593800} & \frac{3547\ell}{23837814000} & \frac{5801}{8475667200} & -\frac{112631\ell}{762810048000} \\ \frac{3547\ell}{23837814000} & \frac{127\ell^2}{3972969000} & \frac{112631\ell}{762810048000} & -\frac{899\ell^2}{28252224000} \\ \frac{5801}{8475667200} & \frac{112631\ell}{762810048000} & \frac{551}{794593800} & -\frac{3547\ell}{23837814000} \\ -\frac{112631\ell}{762810048000} & -\frac{899\ell^2}{28252224000} & -\frac{3547\ell}{23837814000} & \frac{127\ell^2}{3972969000} \end{bmatrix} + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.2.21)$$

A combinação das matrizes de rigidez efetiva dadas pelas equações (5.1.15) e (5.2.19), obtidas para os sistemas de coordenadas indicados pelas figuras 5.2a e 5.4a, respectivamente, permite escrever a matriz de rigidez efetiva de um elemento de viga de Bernoulli-Euler em um sistema de coordenadas locais com 6 graus de liberdade (de acordo com a figura 5.4a) na forma:

$$\mathbf{K} = \frac{EI k}{1 - Cc} \begin{bmatrix} \frac{k' EA c' (1 - Cc)}{s'} & \frac{EI k}{EI k} & 0 & 0 & -\frac{k' EA (1 - Cc)}{s'} & 0 & 0 \\ 0 & k^2 (Sc + Cs) & kSs & 0 & 0 & -k^2 (S + s) & k(C - c) \\ 0 & kSs & Cs - Sc & 0 & 0 & k(c - C) & S - s \\ -\frac{k' EA (1 - Cc)}{s'} & 0 & 0 & \frac{k' EA c' (1 - Cc)}{s'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 (S + s) & k(c - C) & 0 & 0 & k^2 (Sc + Cs) & -kSs \\ 0 & k(C - c) & S - s & 0 & 0 & -kSs & Cs - Sc \end{bmatrix} \quad (5.2.22)$$

onde: $c' = \cos k' x$, $s' = \sin k' x$ e $k' = \sqrt{\frac{\rho}{E}(\omega^2 + 2i\zeta\omega)}$.

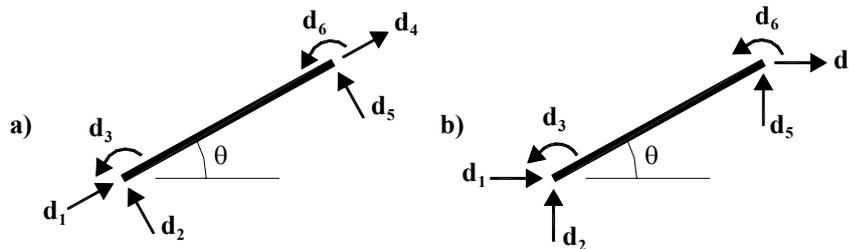


Figura 5.4: a) sistema de coordenadas locais e; b) sistema de coordenadas globais de um elemento de viga com 6 graus de liberdade.

A matriz de rigidez expressa pela equação (5.2.22) corresponde ao sistema local indicado pela figura (5.4a). Porém, em geral se quer trabalhar com uma matriz de rigidez de um elemento de viga que corresponda ao sistema de coordenadas da figura 5.4b. Para tanto é necessário utilizar-se de uma matriz de transformação (ver Apêndice D) que transforme os deslocamentos do sistema da figura 5.4b para o sistema da figura 5.4a. Tal matriz de transformação é:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.23)$$

A relação que expressa a transformação da matriz de rigidez do elemento de viga no sistema local, equação (5.2.22), para a matriz de rigidez no sistema global do elemento, através da utilização da matriz de transformação \mathbf{T} , equação (5.2.23), é expressa como:

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{M}_3 \mathbf{T} + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.2.24)$$

onde \mathbf{K}^g é a matriz de rigidez do elemento de viga para o sistema de coordenadas indicado pela figura 5.4b.

A expressão mais à direita da equação (5.2.24) expressa a transformação das matrizes de rigidez e massa generalizada do sistema local para o sistema

global do elemento, nela percebe-se que tal transformação pode ser realizada após o desenvolvimento em série da matriz de rigidez efetiva, dada pela equação (5.2.22).

A matriz de rigidez da equação (5.2.22) é também o ponto de partida para se obter a matriz de rigidez efetiva de um elemento de treliça em um sistema de coordenadas locais com 4 graus de liberdade, conforme ilustra a figura 5.5. Para tanto é necessário que se faça uma condensação dinâmica (ver Apêndice F) dos graus de liberdade 3 e 6 da figura 5.4a.

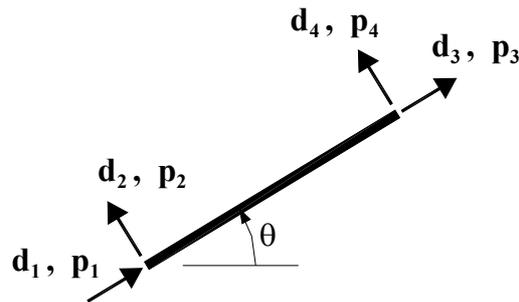


Figura 5.5: sistema de coordenadas locais de um elemento de treliça no plano.

Depois de feita a condensação dinâmica dos referidos graus de liberdade, obtêm-se a seguinte matriz de rigidez para um elemento de treliça plana (de acordo com a figura 5.5):

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho \ell^2}{6E} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\rho^2 \ell^4}{45E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^2}{21} & 0 & \frac{31\lambda^2}{336} \\ \frac{7}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{31\lambda^2}{336} & 0 & \frac{2\lambda^2}{21} \end{bmatrix} \\ - \frac{\rho^3 \ell^6}{45E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & 0 & \frac{31}{336} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^4}{2079} & 0 & \frac{73\lambda^4}{76032} \\ \frac{31}{336} & 0 & \frac{2}{21} & 0 \\ 0 & \frac{73\lambda^4}{76032} & 0 & \frac{2\lambda^4}{2079} \end{bmatrix} + \mathbf{O}(\omega^8) \end{array} \right) \quad (5.2.25)$$

onde: $\lambda = \frac{\ell}{r}$ é o índice de esbeltez da barra, em que $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ é o raio de giração.

Pode-se concluir da equação (5.2.25) que, num elemento de treliça, a influência da rigidez a flexão é tão maior quanto maior for o índice de esbeltez da barra, ou seja, quanto maior for o comprimento da barra, maior será a influência de EI no

deslocamento transversal da barra, aproximando o comportamento da treliça ao comportamento de uma viga.

O mesmo tipo de transformação expressa pela equação (5.2.24) pode ser aplicado à equação (5.2.25), em que a matriz de transformação \mathbf{T} passa a ser expressa como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.1.22)$$

e permite transformar a matriz de rigidez da equação (5.2.25), correspondente ao sistema de coordenadas da figura 5.5, para a matriz de rigidez de um elemento de treliça no sistema global dado pela figura 5.6.

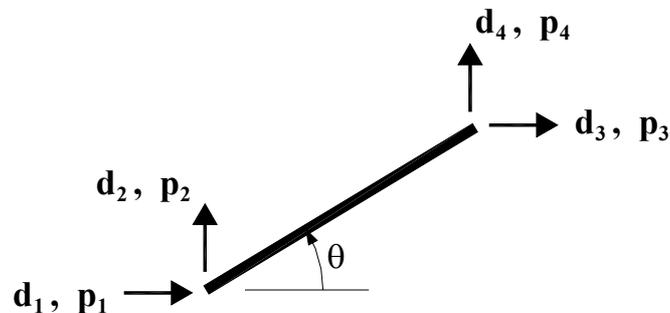


Figura 5.6: sistema de coordenadas globais para um elemento de treliça plana.

No Apêndice D são dados mais detalhes sobre a obtenção das matrizes de transformação entre sistemas de coordenadas distintos para elementos de treliça e viga no plano.

5.3. Formulação de um Elemento de Viga – Viga de Timoshenko

Nesta formulação de viga, considera-se tanto a deformação por cisalhamento quanto a inércia de rotação. Não será mostrada nesta seção, por questão de espaço, a expansão em série de frequência da matriz de rigidez efetiva do elemento de viga de Timoshenko. Porém, através do desenvolvimento apresentado a seguir, o leitor será capaz de efetuar tal expansão em série, de forma análoga ao que é feito na seção anterior.

5.3.1. Formulação do Problema

Em decorrência da deformação por cisalhamento, a rotação $\psi(x,t)$ de uma seção transversal, sobre a qual o momento fletor realiza trabalho,

$$M = EI \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (5.3.1)$$

e a derivada da elástica $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ diferem entre si de uma parcela $\gamma_0(x,t)$:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \psi + \gamma_0 \quad (5.3.2)$$

devido à deformação causada pelo esforço cortante,

$$Q = GA\kappa\gamma_0 \quad (5.3.3)$$

onde κ é um fator de forma que leva em conta a forma da seção transversal. A equação (5.3.2) expressa a compatibilidade de deformações de uma seção da viga, para momento fletor M e esforço cortante Q obtidos segundo as equações constitutivas (5.3.1) e (5.3.3).

Um elemento infinitesimal da viga está em equilíbrio segundo as equações:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} + q - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5.3.4)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow Q - \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.3.5)$$

Considerando o carregamento transversal $q \equiv 0$, tem-se das equações (5.3.1) a (5.3.5):

$$GA\kappa \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5.3.6)$$

$$GA\kappa \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.3.7)$$

Fazendo

$$y(x,t) = y^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.3.8)$$

$$\psi(x,t) = \psi^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.3.9)$$

têm-se as equações (5.3.6) e (5.3.7) na forma transformada:

$$GA\kappa \left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + (m\omega^2 + 2i\omega\zeta m)y^* = 0 \quad (5.3.10)$$

$$GA\kappa \left(\frac{\partial y^*}{\partial x} - \psi^* \right) + EI \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{mI}{A} \omega^2 \psi = 0 \quad (5.3.11)$$

Nestas equações, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia, m é a densidade específica (por unidade de comprimento), $c = 2\zeta\rho$ é o amortecimento viscoso, definido por unidade de comprimento e κ é o fator de forma para deformação de uma seção por esforço cortante.

Eliminando $\psi^*(x)$ nas equações (5.3.10) e (5.3.11) tem-se a equação

$$\frac{\partial^4 y^*(x)}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 y^*(x)}{\partial x^2} - k^4 y^*(x) = 0 \quad (5.3.12)$$

onde

$$k^4 = \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{mI\omega^2}{GA^2\kappa} \right) (m\omega^2 + 2i\zeta\omega - w) \quad (5.3.13)$$

$$T = \frac{1}{EI} \left[\frac{mI}{A} \omega^2 + \frac{EI}{GA\kappa} (m\omega^2 + 2i\zeta\omega - w) \right] \quad (5.3.14)$$

A solução da equação (5.3.12) é expressa convenientemente na forma

$$y^*(x) = C_1 \frac{\sin k_1 x + \sinh k_2 x}{k} + C_2 \frac{\sin k_1 x - \sinh k_2 x}{k^3} + C_3 (\cos k_1 x + \cosh k_2 x) + C_4 \frac{\cos k_1 x - \cosh k_2 x}{k^2} \quad (5.3.15)$$

onde

$$k_1 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{T^2}{4}} + \frac{T}{2}} \quad (5.3.16)$$

$$k_2 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{T^2}{4}} - \frac{T}{2}} \quad (5.3.17)$$

Analogamente, obtém-se da equação (5.3.10) a expressão de $\psi^*(x)$:

$$\psi^*(x) = C_1 \frac{K_2 \cos k_1 x + K_1 \cosh k_2 x}{k} + C_2 \frac{K_2 \cos k_1 x - K_1 \cosh k_2 x}{k^3} + C_3 (-K_2 \sin k_1 x + K_1 \sinh k_2 x) + C_4 \frac{-K_2 \sin k_1 x - K_1 \sinh k_2 x}{k^2} \quad (5.3.18)$$

onde

$$K_1 = \frac{k_1^2 - \frac{m\omega^2}{EA}}{k_2} \quad (5.3.19)$$

$$K_2 = \frac{k_2^2 + \frac{m\omega^2}{EA}}{k_1} \quad (5.3.20)$$

As expressões de $y^*(x)$ e $\psi^*(x)$ nas equações (5.3.15) e (5.3.18) foram obtidas de tal modo que

$$\lim_{k \rightarrow 0} y^*(x) = 2C_3 + 2C_1x - C_4x^2 - C_2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{EIx}{2GA\kappa} \right) \quad (5.3.21)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \psi^*(x) = 2C_1 - 2C_4x - C_2 \left(x^2 - \frac{3EI}{2GA\kappa} \right) \quad (5.3.22)$$

5.3.2. Obtenção da Matriz de Rigidez

O campo de deslocamentos transversais $y^*(x)$ e as rotações $\psi^*(x)$ podem ser expressos na forma

$$y^* = \left\langle \frac{\text{sen}k_1x + \text{senh}k_2x}{k} \quad \frac{\text{sen}k_1x - \text{senh}k_2x}{k^3} \quad \cos k_1x + \cosh k_2x \quad \frac{\cos k_1x - \cosh k_2x}{k^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix}$$

$$\equiv \langle y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^* \quad y_4^* \rangle \mathbf{p}^* \equiv \mathbf{y}^* \mathbf{p}^* \quad (5.3.23)$$

$$\psi^* = \left\langle \frac{K_2 \cos k_1x + K_1 \cosh k_2x}{k} \quad \frac{K_2 \cos k_1x - K_1 \cosh k_2x}{k^3} \right. \\ \left. - K_2 \text{sen}k_1x + K_1 \text{senh}k_2x \quad \frac{-K_2 \text{sen}k_1x - K_1 \text{senh}k_2x}{k^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \quad (5.3.24)$$

$$\equiv \langle \psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^* \rangle \mathbf{p}^* \equiv \boldsymbol{\psi}^* \mathbf{p}^*$$

em função de quatro parâmetros de força, numa formulação híbrida de elementos finitos. Os parâmetros \mathbf{p}^* não têm necessariamente um sentido físico definido, embora se pudesse fazer alguma atribuição a partir dos limites das equações (5.3.21) e (5.3.22). Para efeito de estabelecimento das equações que governam o problema da viga, escreve-se, com a mesma notação usada para o elemento de treliça,

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* & y_3^* & y_4^* \\ \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (5.3.25)$$

Conseqüentemente, obtém-se para os esforços seccionais, segundo as equações (5.3.1) e (5.3.3):

$$\begin{Bmatrix} Q^* \\ M^* \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{d^2 \psi_1^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_1^* & \frac{d^2 \psi_2^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_2^* & \frac{d^2 \psi_3^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_3^* & \frac{d^2 \psi_4^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_4^* \\ \frac{d\psi_1^*}{dx} & \frac{d\psi_2^*}{dx} & \frac{d\psi_3^*}{dx} & \frac{d\psi_4^*}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (5.3.26)$$

De acordo com a seção anterior pode-se, usando a primeira das figuras 5.4 para a definição das grandezas do sistema externo de coordenadas e a segunda para a convenção de momentos fletores e esforços cortantes positivos, descrever para os deslocamentos e rotações nas extremidades do elemento, definidas como os contornos Γ_1 e Γ_2 , e para as matrizes $\boldsymbol{\eta}$ dos co-senos,

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d}; \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad em \Gamma_1 \quad (5.3.27)$$

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d}; \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad em \Gamma_2 \quad (5.3.28)$$

Desta forma, a matriz \mathbf{H} de transformação cinemática entre os sistemas \mathbf{d} e \mathbf{p}^* se expressa como

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=0} \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=\ell} \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{N}_2 \quad (5.3.29)$$

e a matriz de flexibilidade no sistema interno \mathbf{p}^* se expressa na forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=0} \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{u}^{*T} \Big|_{x=0} + \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=\ell} \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{u}^{*T} \Big|_{x=\ell} \quad (5.3.30)$$

Portanto, após a avaliação da inversa \mathbf{F}^{-1} , é possível realizar-se o produto $\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$, obtendo-se assim a matriz de rigidez \mathbf{K} do elemento de viga de Timosheko, de acordo com a equação (2.6.22).

5.4. Matriz de rigidez geométrica efetiva para elementos de treliça 2D

Para o estudo de cabos flexíveis através de elementos de treliça é necessário que se introduza na análise a matriz de rigidez geométrica, que leva em conta a influência da não-linearidade geométrica e permite a simulação do efeito do esforço de tração no cabo.

Na figura 5.7a é mostrado o sistema de coordenadas conveniente ao estudo do efeito de uma força de tração T sobre um elemento de treliça, e a figura 5.7b ilustra a configuração da força T no elemento.

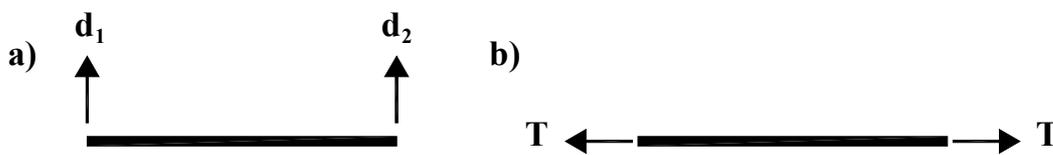


Figura 5.7: a) sistema de coordenadas para obtenção da matriz de rigidez geométrica de um elemento de treliça; b) configuração dos esforços de tração no elemento.

5.4.1. Formulação do Problema

A equação diferencial do problema em questão, sem a consideração de amortecimento, é a equação conhecida como equação da corda vibrante:

$$T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.4.1)$$

onde T é a força de tração no elemento e $m = \rho A$ é a massa por unidade de comprimento do elemento.

Supõe-se que o deslocamento transversal $v(x,t)$ possa ser definido em termos de uma separação de variáveis de espaço $0 \leq x \leq \ell$ e tempo $t \geq 0$, como:

$$v(x,t) = v^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.4.2)$$

em que $e^{-i\omega t}$ é a função $\tau(t,\omega)$ definida na equação (2.7.4). Portanto, a nova expressão para a equação (5.4.1) passa a ser expressa como

$$T \frac{\partial^2 v^*(x)}{\partial x^2} + m\omega^2 v^*(x) = 0 \quad (5.4.3)$$

ou ainda, de forma mais simples,

$$\frac{\partial^2 v^*(x)}{\partial x^2} + k^2 v^*(x) = 0 \quad (5.4.4)$$

em que

$$k^2 = \frac{m}{T} \omega^2 \quad (5.4.5)$$

5.4.2. Obtenção da Matriz de Rigidez Geométrica

Como se pode notar, a equação (5.4.4) tem a mesma forma da equação (5.1.4), e portanto, sua solução é análoga à solução apresentada na Seção 5.1, lembrando-se que k está definido pela equação (5.4.5) e não mas pela equação (5.1.5).

Então, seguindo-se o desenvolvimento feito na Seção 5.1 chega-se à expressão da matriz de rigidez geométrica de elemento um elemento de treliça, que se expressa como

$$\mathbf{K}_{geo} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \frac{kT}{\text{sen } k\ell} \begin{bmatrix} \cos k\ell & -1 \\ -1 & \cos k\ell \end{bmatrix} \quad (5.4.6)$$

Desenvolvendo-se em série de frequência em ω a expressão da matriz de rigidez geométrica acima, tem-se:

$$\mathbf{K}_{geo} = \frac{T}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{T} \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{3} & \frac{\ell^2}{6} \\ \frac{\ell^2}{6} & \frac{\ell^2}{3} \end{bmatrix} - \frac{m^2}{T^2} \omega^4 \begin{bmatrix} \frac{\ell^4}{45} & \frac{7\ell^4}{360} \\ \frac{7\ell^4}{360} & \frac{\ell^4}{45} \end{bmatrix} - \frac{m^3}{T^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{2\ell^6}{945} & \frac{31\ell^6}{15120} \\ \frac{31\ell^6}{15120} & \frac{2\ell^6}{945} \end{bmatrix} + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.4.7)$$

Deve-se lembrar que a matriz de rigidez geométrica dada pelas equações (5.4.6) e (5.4.7) diz respeito aos graus de liberdade d_1 e d_2 mostrados na figura 5.5a, os quais são perpendiculares aos graus de liberdade d_1 e d_2 mostrados na figura 5.2a.

A matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_{geo} dada pela equação (5.4.7) deve ser adicionada à matriz de rigidez elástica dada pela equação (5.2.25), levando em conta sua contribuição no grau de liberdade correspondente (comparar figuras 5.7a e 5.5). ou seja,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_{geo} \quad (5.4.8)$$

onde \mathbf{K}_E é a matriz de rigidez elástica dada pela equação (5.2.25). Desta forma obtem-se a matriz de rigidez efetiva de um elemento de treliça que leva em conta os efeitos da formulação das equações de equilíbrio para a configuração deformada (o que é bastante apropriado para o estudo de cabos).

Dada de maneira Explícita, a equação (5.4.8) expressa-se da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{T}{EA} & 0 & -\frac{T}{EA} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{T}{EA} & 0 & \frac{T}{EA} \end{bmatrix} - \frac{\rho \ell^2}{6E} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right. \\
 - \frac{\rho^2 \ell^4}{45E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^2}{21} + \frac{AE}{T} & 0 & \frac{31\lambda^2}{336} + \frac{7AE}{8T} \\ \frac{7}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{31\lambda^2}{336} + \frac{7AE}{8T} & 0 & \frac{2\lambda^2}{21} + \frac{AE}{T} \end{bmatrix} \\
 \left. - \frac{\rho^3 \ell^6}{45E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & 0 & \frac{31}{336} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^4}{2079} + \frac{2A^2E^2}{21T^2} & 0 & \frac{73\lambda^4}{76032} + \frac{31A^2E^2}{336T^2} \\ \frac{31}{336} & 0 & \frac{2}{21} & 0 \\ 0 & \frac{73\lambda^4}{76032} + \frac{31A^2E^2}{336T^2} & 0 & \frac{2\lambda^4}{2079} + \frac{2A^2E^2}{21T^2} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.4.9)$$

(comparar com a equação (5.2.25)).

Um estudo mais elaborado deste Capítulo está sendo preparado para publicação (Dumont e Prazeres, 2006).