

4

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA CONDUÇÃO DE CALOR EM MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Neste Capítulo são obtidas as soluções fundamentais não-singulares para problemas de condução de calor, 2D e 3D, em materiais cujas propriedades variam (materiais com gradação funcional, ou FGM, na sigla em inglês) em uma das direções, de acordo com três diferentes padrões, no contexto de uma formulação híbrida de elementos finitos para análise no domínio da frequência, assim como é feito nos capítulos anteriores. O presente desenvolvimento conta exclusivamente com funções de variáveis reais tanto para problemas 2D quanto 3D.

Cheng (1984) já havia feito um desenvolvimento similar ao presente trabalho, aplicado a fluxo em estado permanente em materiais heterogêneos e isotrópicos, baseado em um desenvolvimento teórico de Georghitza (1969). O problema de condução de calor em meio não-homogêneo no contexto de uma formulação de integrais de contorno foi também tratado de maneira extensiva por Divo e Kassab (2003). Todavia, os desenvolvimentos feitos aqui foram executados de maneira independente e de acordo com uma abordagem que possibilita a total compreensão das possibilidades de variação do material (Dumont e Chaves, 2003).

4.1. Equação de Governo

Considera-se o problema de condução de calor dependente do tempo, com as propriedades do material variando com a direção z , de acordo com a figura 4.1 (Dumont e Chaves, 2003). Ainda de acordo com a figura 4.1, o problema é descrito em termos das coordenadas globais (X,Y,Z) e se está procurando uma solução fundamental referida às coordenadas locais (x,y,z) . Como ilustrado na figura 4.1, \bar{Z} é a coordenada global Z de um certo valor de referência \bar{k} para $k(z)$ e \bar{c} para $c(z)$ correspondendo a \bar{z} em coordenadas locais (x,y,z) .

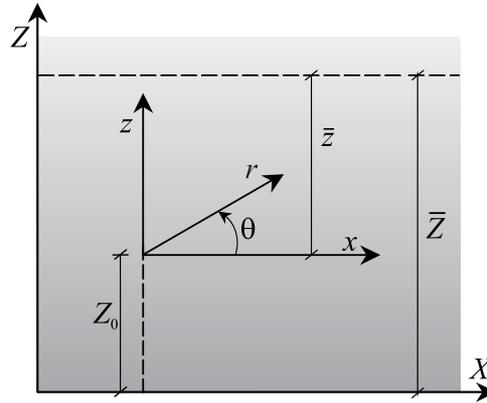


Figura 4.1: Sistema de coordenadas para descrição de um FGM com propriedades \bar{k} e \bar{c} definidas em $Z = \bar{Z}$ (coordenada global), a qual é equivalente a $z = \bar{z}$ (coordenada local).

4.1.1. Problema Isotrópico

Para problema isotrópico, a equação de fluxo, para o potencial $u^* \equiv u^*(x, y, z)$, é

$$q_i = -k(z)u^*_{,i} \quad (4.1.1)$$

onde $k(z) = \bar{k}f(z)$ é a condutividade térmica do material. Na ausência de fontes de corpo, a equação de equilíbrio de fluxo do problema para calor específico $c(z) = \bar{c}f(z)$ se escreve, em notação indicial,

$$q_{i,i} = -c(z) \frac{\partial u^*}{\partial t} \quad (4.1.2)$$

Assim, da substituição da equação (4.1.1) em (4.1.2) tem-se:

$$ku^*_{,ii} + k_{,z}u^*_{,z} = c \frac{\partial u^*}{\partial t} \quad (4.1.3)$$

ou, em uma formulação no domínio da frequência, para $\tilde{k}^2 = \frac{\bar{c}\omega}{k}$, de acordo com a notação das equações (3.1.22) e (3.1.23):

$$u^*_{,ii} + \frac{k_{,z}}{k}u^*_{,z} = -\tilde{k}^2 u^* \quad (4.1.4)$$

4.1.2. Problema Ortotrópico

As equações de fluxo para materiais ortotrópicos com graduação funcional são:

$$q_x = -\tilde{k}_x(z)u_{,x}^* \equiv -\bar{k}k_x(z)u_{,x}^* \equiv -\bar{k}k_x u_{,x}^* \quad (4.1.5a)$$

$$q_y = -\tilde{k}_y(z)u_{,y}^* \equiv -\bar{k}k_y(z)u_{,y}^* \equiv -\bar{k}k_y u_{,y}^* \quad (4.1.5b)$$

$$q_z = -\tilde{k}_z(z)u_{,z}^* \equiv -\bar{k}k_z(z)u_{,z}^* \equiv -\bar{k}k_z u_{,z}^* \quad (4.1.5c)$$

com \bar{k} definido na Seção 4.1.1 em certos valores de referência para a condutividade em coordenadas \bar{Z} , de acordo com a figura 4.1. $k_x(z) \equiv k_x$ e $k_y(z) \equiv k_y$ são em princípio funções arbitrárias de $z = Z - Z_0$, como na figura 4.1. $k_z(z) \equiv k$, no qual o subscrito foi abolido, por simplicidade, será obtido como famílias de funções, para FGM's ortotrópicos. Nas equações (4.1.5), é requerido que $k_x(\bar{z}) = k_y(\bar{z}) = k_z(\bar{z}) = 1$.

Além do mais, a equação de equilíbrio pode ser expressa como

$$q_{i,i} = -\tilde{c}(z) \frac{\partial u^*}{\partial t} \equiv -\bar{c}c(z) \frac{\partial u^*}{\partial t} \equiv -\bar{c}c \frac{\partial u^*}{\partial t} \quad (4.1.6)$$

com \bar{c} definido na Seção 4.1.1 e $c(z) \equiv c$ sendo a variação de calor específico a ser obtida no contexto de famílias de funções que não são necessariamente coincidentes com k , contrário ao procedimento da Seção 4.1.1.

Escreve-se, por conveniência, a equação (4.1.6) mais uma vez como

$$\frac{q_{i,i}}{\bar{c}c} = -\frac{\bar{c}}{\bar{k}} \frac{\partial u^*}{\partial t} \quad (4.1.7)$$

da qual segue a equação de Helmholtz para uma formulação no domínio da frequência, como na equação (4.1.4), embora ainda em termos de fluxos:

$$\frac{q_{i,i}}{\bar{c}c} = \frac{\bar{c}\omega}{\bar{k}} u^* \equiv \tilde{k}^2 u^* \quad (4.1.8)$$

em que $u^* \equiv u^*(x, y, z)$ é uma função dependente apenas das coordenadas espaciais.

Com o intuito de se chegar a uma expressão da equação (4.1.8) que seja adequada à manipulação, tão parecida quanto possível à equação (4.1.4), introduz-se a seguinte transformação de coordenadas (Dumont e Chaves, 2004) entre o sistema cartesiano original (x, y, z) e um sistema auxiliar (x', y', z') :

$$x = \sqrt{\frac{k_x}{c}} x' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = \sqrt{\frac{c}{k_x}} \quad (4.1.9)$$

$$y = \sqrt{\frac{k_y}{c}} y' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \sqrt{\frac{c}{k_y}} \quad (4.1.10)$$

$$z = \int_0^{z'} \sqrt{\frac{\bar{k}}{c}} dz' + Const. \rightarrow \frac{\partial z'}{\partial z} = \sqrt{\frac{c}{\bar{k}}} \quad t = \int_0^{t'} \bar{c}/\bar{k} dt' \quad (4.1.11)$$

Supõe-se, desde que de outra forma poderia se torna extremamente complicado para se chegar a soluções simples, que o sistema auxiliar de coordenadas (x',y',z') tem a mesma origem que (x,y,z) . Então, a constante indicada nas equações (4.1.9)-(4.1.11) tem que ser calculada de tal maneira que $z = 0$ quando $z' = 0$. De acordo com a transformação introduzida, as seguintes expressões de fluxo e suas derivadas primeiras são obtidas:

$$q_x = -\bar{k}k_x u^*_{,x'} \sqrt{\frac{c}{k_x}} \rightarrow q_{x,x} = -\bar{k}k_x u^*_{,x'x'} \frac{c}{k_x} = -\bar{k}c u^*_{,x'x'} \quad (4.1.12)$$

$$q_y = -\bar{k}k_y u^*_{,y'} \sqrt{\frac{c}{k_y}} \rightarrow q_{y,y} = -\bar{k}k_y u^*_{,y'y'} \frac{c}{k_y} = -\bar{k}c u^*_{,y'y'} \quad (4.1.13)$$

$$q_z = -\bar{k}k_z u^*_{,z'} \sqrt{\frac{c}{k_z}} = -\bar{k}u^*_{,z'} \sqrt{ck_z} \rightarrow \quad (4.1.14)$$

$$q_{z,z} = -\bar{k}c u^*_{,z'z'} - \frac{1}{2} \bar{k}u^*_{,z'} \frac{1}{\sqrt{ck_z}} (ck_z)_{,z'} \sqrt{\frac{c}{k_z}} = -\bar{k}c u^*_{,z'z'} - \frac{(ck_z)_{,z'}}{2k_z} \bar{k}u^*_{,z'}$$

e, após algumas manipulações, chega-se à equação de Helmholtz (Dumont e Chaves, 2004)

$$u^*_{,x'x'} + u^*_{,y'y'} + u^*_{,z'z'} + \frac{(ck_z)_{,z'}}{2k_z} u^*_{,z'} = -\tilde{k}^2 u^* \quad (4.1.15)$$

em que o número de onda é simplesmente $\tilde{k}^2 = \omega$.

4.2. Solução da Equação de Governo para Problemas 2D e 3D

Tendo em vista que o problema isotrópico é um caso particular do problema ortotrópico, o desenvolvimento apresentado a seguir é feito diretamente para o caso de problema ortotrópico, cuja equação de governo é dada pela equação (4.1.15). Particularizações referentes ao problema isotrópico podem ser feitas diretamente do desenvolvimento feito para o problema ortotrópico, como será mostrado mais à frente.

Procura-se uma solução $u^* \equiv u^*(x, y, z)$ que satisfaça a equação (4.1.15), tanto para problemas 2D quanto para problemas 3D. Tal solução pode ser expressa da seguinte maneira:

$$u^* = h(x', y', z', \tilde{k})p(z') \quad (4.2.1)$$

para o caso geral de problemas 3D.

Então as derivadas de u^* que aparecem na equação (4.1.15) expressam-se da seguinte forma:

$$u^*_{,x'x'} = h_{,x'x'} p \quad (4.2.2a)$$

$$u^*_{,y'y'} = h_{,y'y'} p \quad (4.2.2b)$$

$$u^*_{,z'} = h_{,z'} p + hp_{,z'} \quad (4.2.2c)$$

$$u^*_{,z'z'} = h_{,z'z'} p + 2h_{,z'} p_{,z'} + hp_{,z'z'} \quad (4.2.2d)$$

e suas substituições na referida equação, eq. (4.1.15), resultam em:

$$h_{,ii} + h_{,z'} \left(\frac{(kc)_{,z'}}{2kc} + 2 \frac{p_{,z'}}{p} \right) + h \left(\frac{p_{,z'z'}}{p} + \frac{(kc)_{,z'} p_{,z'}}{2kc p} \right) = -\tilde{k}^2 h \quad (4.2.3)$$

Para que haja consistência da equação (4.2.3), os seguintes termos, expressos como função da variável z , devem ser constantes, ou seja,

$$\left(\frac{p_{,z'z'}}{p} + \frac{(kc)_{,z'} p_{,z'}}{2kc p} \right) = \pm \beta^2 = const. \quad (4.2.4)$$

$$\left(\frac{(kc)_{,z'}}{2kc} + 2 \frac{p_{,z'}}{p} \right) = \lambda = const. \quad (4.2.5)$$

As equações do caso particular do problema isotrópico podem ser obtidas pela substituição das coordenadas (x', y', z') por (x, y, z) diretamente nas equações acima. Todas as equações anteriores são válidas para o caso 2D, bastando para tanto suprimir a coordenada y' das equações, em que teríamos como eixo coordenado para o caso 2D o eixo (x', z') .

Seis casos particulares podem ser contemplados, em princípio, com o objetivo de se chegar a padrões de variação para as propriedades $k(z')$ e $c(z')$ do

material, já que a primeira constante β pode ser negativa, positiva ou igual a zero e a segunda constante λ pode ser igual a zero ou diferente de zero. Porém, as soluções para $\lambda \neq 0$ correspondem a padrões de variação de $k(z)$, no caso de problemas isotrópicos, e de $k(z')$, para problemas ortotrópicos, que são fisicamente inviáveis.

Então, para $\lambda = 0$ na equação (4.2.5), a equação (4.2.3) torna-se:

$$h_{,ii} + \psi^2 h = 0 \quad (4.2.6)$$

onde $\psi = \sqrt{\tilde{k}^2 \pm \beta^2}$ e β é um parâmetro do material a ser obtido a partir de testes experimentais, a partir dos desenvolvimentos feitos a seguir.

A solução geral da equação (4.1.15) para o caso geral de problemas ortotrópicos é obtida na forma do produto de funções apresentado na equação (4.2.1), ou colocado de forma mais conveniente,

$$u^* \rightarrow h(r', \psi) p(z') \quad (4.2.7)$$

onde $h(r', \psi)$ é a mesma função $u^*(r', \psi)$ dada nas equações (3.1.22) e (3.1.23), para problemas 2D e 3D, respectivamente, em que $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ substitui r e ψ substitui \tilde{k} .

Os três diferentes tipos de soluções para as expressões de $p(z')$, $k(z')$ e $c(z')$ como funções da difusividade térmica, correspondendo a $\lambda = 0$, são apresentados na tabela 4.2 da Seção 4.3 para problemas ortotrópicos. Na subseção a seguir serão apresentados os padrões de variação para os casos de problema isotrópico e logo em seguida, na Subseção 4.2.2, é feita uma generalização dos padrões de variação para problemas ortotrópicos.

4.2.1. Problema Isotrópico

Para os casos de padrão de variação de problema isotrópico apresentados nesta seção, é necessário que se faça a substituição das coordenadas (x', y', z') por (x, y, z) e de $\frac{(kc)_{,z'}}{2kc}$ por $\frac{k_{,z}}{k}$ nas equações apresentadas anteriormente, onde se supõe que c seja constante, embora não seja necessário.

4.2.1.1. Solução Exponencial

Neste padrão de gradação funcional, as hipóteses adotadas são $\beta^2 < 0$ e $\lambda = 0$. Tais hipóteses levam ao padrão de gradação mais freqüentemente sugerido na literatura de materiais com gradação funcional.

Reescrevendo as equações (4.2.4) e (4.2.5) na forma do sistema de equações diferenciais, de acordo com as substituições necessárias mencionadas acima,

$$\frac{p_{,zz}}{p} + \frac{k_{,z}}{k} \frac{p_{,z}}{p} = -\beta^2 \quad (4.2.8)$$

$$\frac{k_{,z}}{k} + 2 \frac{p_{,z}}{p} = 0 \quad (4.2.9)$$

tem-se a seguinte solução geral (Dumont e Chaves, 2003):

$$k = k_0 e^{-2\beta z} (\alpha e^{2\beta z} + 1)^2 \quad \text{com} \quad k_0 = \bar{k} e^{2\beta \bar{z}} (\alpha e^{2\beta \bar{z}} + 1)^{-2} \quad (4.2.10)$$

$$p = p_0 e^{\beta z} (\alpha e^{2\beta z} + 1)^{-1} \quad \text{com} \quad p_0 = k_0^{-1} e^{\beta z_0} (\alpha e^{2\beta z_0} + 1)^{-1} \quad (4.2.11)$$

em termos das constantes do material α , β , as quais serão obtidas experimentalmente. A constante k_0 é expressa de tal maneira que $k(\bar{z}) = \bar{k}$, o parâmetro físico de referência. Além disso, $k(z)$ é intencionalmente expressa como uma função de $Z \equiv z + Z_0$, de forma a se ter sempre a mesma descrição material desconsiderando-se a coordenada local de referência, de acordo com a figura (4.1). Este conceito de invariância à translação é requisito básico, no caso de soluções fundamentais singulares (Dumont e Chaves, 2003), mas não no caso de soluções fundamentais não-singulares, que são as únicas de interesse neste trabalho. No entanto, mantém-se esta condição, já que não afeta os resultados dos desenvolvimentos feitos aqui.

A figura 4.2 (Dumont e Chaves, 2003) mostra dois gráficos de alguns padrões de variação de $k(z)$, dados pela equação (4.2.10), para o caso exponencial, para alguns valores de α e β . No primeiro gráfico o valor de $\beta = 1,5$ está fixo e α varia de 0,0 a 0,22. No segundo fixa-se o valor de $\alpha = 0,2$, variando β de 0,0 a 1,6.

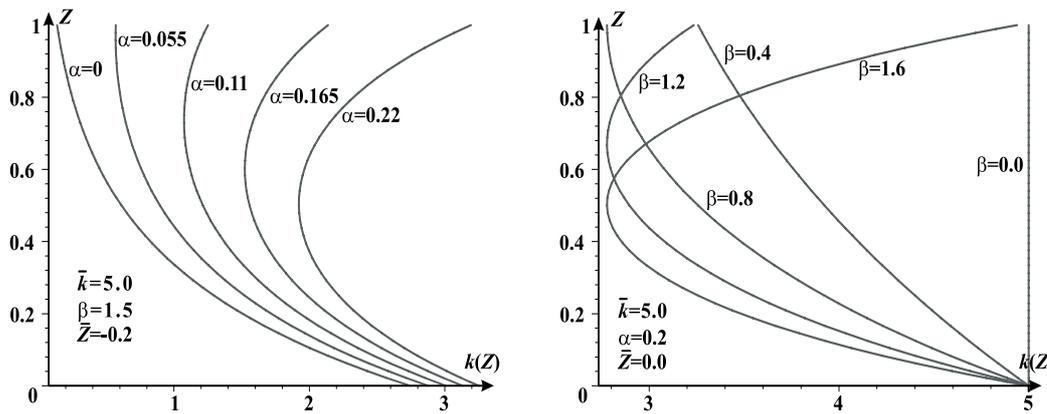


Figura 4.2: Padrões de variação ilustrativos da função exponencial $k(z)$.

Ao invés das equações (4.2.10) e (4.2.11), pode-se escrever a solução mais restritiva das equações (4.2.8) e (4.2.9), correspondendo a $\alpha = 0$:

$$k = \bar{k} e^{2\beta(\bar{Z}-Z)} \quad (4.2.12)$$

$$p = \bar{k}^{-1} e^{\beta(Z+Z_0-2\bar{Z})} \quad (4.2.13)$$

Este é o caso de material com gradação exponencial encontrado na literatura. As equações (4.2.10) e (4.2.11) permitem mais flexibilidade no padrão de variação de $k(z)$.

4.2.1.2. Solução Quadrática

Este padrão de variação adota a hipótese mais simples $\beta = \lambda = 0$, levando ao seguinte sistema de equações diferenciais, já considerando as substituições necessárias mencionadas no início desta subseção,

$$\frac{p_{,zz}}{p} + \frac{k_{,z}}{k} \frac{p_{,z}}{p} = 0 \quad (4.2.14)$$

$$\frac{k_{,z}}{k} + 2 \frac{p_{,z}}{p} = 0 \quad (4.2.15)$$

cuja solução geral (Dumont e Chaves, 2003) é dada por

$$k = k_0 (\alpha Z + 1)^2 \quad \text{com} \quad k_0 = \bar{k} (\alpha \bar{Z} + 1)^{-2} \quad (4.2.16)$$

$$p = p_0 (\alpha Z + 1)^{-1} \quad \text{com} \quad p_0 = k_0^{-1} (\alpha Z_0 + 1)^{-1} \quad (4.2.17)$$

em termos da constante do material α , obtida experimentalmente. A constante de referência \bar{k} é expressa de tal forma que $k(\bar{z}) = \bar{k}$. Assim como no primeiro caso, $k(z)$ é expressa explicitamente como uma função de $Z \equiv z + Z_0$, em forma a se ter sempre a mesma descrição material desprezando-se a coordenada local de referência. O parâmetro p_0 é avaliado de acordo com os mesmos tipos de

considerações que dizem respeito às equações (4.2.10) e (4.2.11) no primeiro caso.

A propriedade material $k(z)$ varia como um polinômio do segundo grau, o qual representa aproximadamente e é uma alternativa para a função exponencial do primeiro caso. Note que $\alpha Z + 1 \neq 0$ é requerido, neste caso.

A figura 4.3 (Dumont e Chaves, 2003) mostra o gráfico de alguns padrões de variação de $k(z)$, dado pela equação (4.2.16), para o caso polinomial, para alguns valores de α .

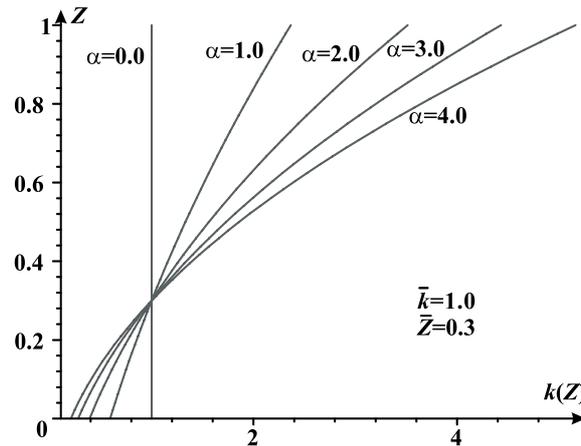


Figura 4.3: Padrões de variação ilustrativos da função quadrática $k(z)$, para alguns valores de α .

4.2.1.3. Solução Trigonométrica

Para este padrão de variação, as hipóteses adotadas são $\beta^2 > 0$ e $\lambda = 0$. As quais levam às equações (4.2.4) e (4.2.5) a serem reescritas na forma do sistema de equações diferenciais, de acordo com as necessárias substituições mencionadas no início desta subseção,

$$\frac{p_{,zz}}{p} + \frac{k_{,z}}{k} \frac{p_{,z}}{p} = \beta^2 \quad (4.2.18)$$

$$\frac{k_{,z}}{k} + 2 \frac{p_{,z}}{p} = 0 \quad (4.2.19)$$

para o qual a solução geral (Dumont e Chaves, 2003) é dada por

$$k = k_0 (\alpha \sin(\beta Z) + \cos(\beta Z))^2 \quad \text{com} \quad k_0 = \bar{k} (\alpha \sin(\beta \bar{Z}) + \cos(\beta \bar{Z}))^{-2} \quad (4.2.20)$$

$$p = p_0 (\alpha \sin(\beta Z) + \cos(\beta Z))^{-1} \quad \text{com} \quad p_0 = k_0^{-1} (\alpha \sin(\beta Z_0) + \cos(\beta Z_0))^{-1} \quad (4.2.21)$$

em termos das constantes materiais α , β e um valor de referência \bar{k} . A propriedade material $k(z)$ varia de acordo com uma curva que não pode ser aproximada pela função exponencial do primeiro caso, conduzindo assim a uma

descrição de um padrão material completamente diferente. O parâmetro p_0 é avaliado de acordo com os mesmos tipos de considerações que dizem respeito às equações (4.2.10) e (4.2.11), no primeiro caso. Observe que uma translação de coordenadas também é possível neste modelo material, em vista de que as constantes α e β foram ajustadas de forma a expressar $k(z)$ como uma função de $Z \equiv z + Z_0$.

A figura 4.4 (Dumont e Chaves, 2003) mostra o gráfico de alguns padrões de variação de $k(z)$, dado pela equação (4.2.20), para o caso trigonométrico, para alguns valores de α e β . No primeiro gráfico o valor de $\beta = 1,5$ está fixo e α varia de 1,0 a 1,8. No segundo fixa-se o valor de $\alpha = 1,0$, variando β de 0 a 1,6

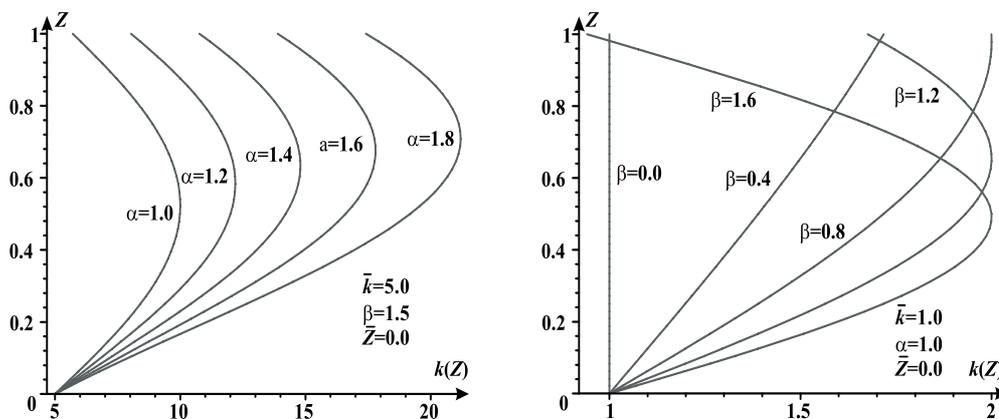


Figura 4.4: Padrões de variação ilustrativos da função trigonométrica $k(z)$, para alguns valores de α e β .

4.2.2. Problema Ortotrópico

Como conseqüência de o processo de obtenção das equações (4.2.4) e (4.2.5) ser o mesmo para materiais isotrópicos e ortotrópicos, como já mencionado no início da Seção 4.2, as soluções delineadas na Subseção 4.2.1 são imediatamente aplicáveis, não apenas em termos das constantes básicas β e λ que se podem escolher para se chegar a expressões viáveis das funções incógnitas z' , de acordo com

$$\frac{p_{,z'z'}}{p} + \frac{(kc)_{,z'}}{2kc} \frac{p_{,z'}}{p} = \pm \beta^2, \quad \frac{(kc)_{,z'}}{2kc} + 2 \frac{p_{,z'}}{p} = \lambda \quad (4.2.24)$$

mas também em termos das soluções de $p(z')$, as quais têm a mesma expressão de $p(z)$, exceto pela constante embutida, a qual deve ser reinterpretada, haja vista que se está trabalhando em um espaço transformado.

Dada a expressão de $p \equiv p(z')$, é possível executar a transformação de coordenadas entre Z e z' , de acordo com as equações (4.1.9)-(4.1.11) (Dumont e Chaves, 2004):

$$z = \int \sqrt{\frac{k(z')}{c(z')}} dz' + Const. = \sqrt{C_1} \int \frac{z'^{\lambda} dz'}{p(z')^2 c(z')} + Const. \quad (4.2.25)$$

$$z' = \int \sqrt{\frac{c(Z)}{k(Z)}} dZ + Const. = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \int \frac{p(Z)^2 c(Z)}{Z^{\lambda}} dZ + Const. \quad (4.2.26)$$

É importante lembrar que as constantes de integração nas equações acima devem ser calculadas de tal maneira que $Z = Z_0$ quando $z' = 0$ (e particularizada para $\lambda = 0$).

Diferentemente do que foi feito na seção anterior, para material isotrópico, na presente formulação os padrões de variação para a condutividade $k(Z)$ e o calor específico $c(Z)$ não são obtidos diretamente, haja vista que as transformações de coordenadas entre Z e z' , dadas nas equações (4.2.25) e (4.2.26), e as expressões explícitas de $p(z')$ e $c(z')$ são interdependentes.

De acordo com a segunda das equações (4.2.24) obtém-se

$$k(z')c(z') = C_1 \frac{z'^{2\lambda}}{p(z')^4} \quad (4.2.27)$$

Adiante, a substituição de kc na primeira das equações (4.2.24), para a expressão de $p \equiv p(z')$, fornece:

$$\frac{p_{,z'z'}}{p} + \frac{\lambda p_{,z'}}{z' p} - \frac{2(p_{,z'})^2}{p^2} = \pm \beta^2 \quad (4.2.28)$$

Um procedimento que parece funcionar (Dumont e Chaves, 2004, 2005) começa com uma presumida família de relações entre a condutividade e o calor específico dada pela relação $c(z)/k(z)$, conduzindo assim a uma expressão de z' a partir da equação (4.2.26). Em um segundo passo, calcula-se $p(z')$ na equação (4.2.28), executando-se a transformação de coordenadas para expressar $p(z)$ e finalmente usa-se alguma heurística para inferir qual família de funções $k(z)$ e $c(z)$ satisfaz tanto o produto $k(z)c(z)$ na equação (4.2.27) quanto a relação inicialmente presumida $c(z)/k(z)$ (sempre tendo $\lambda = 0$). Nos itens a seguir é mostrado o desenvolvimento que leva às expressões de $k(z)$ e $c(z)$.

4.2.2.1. Hipótese a respeito da relação entre condutividade e calor específico

Inicia-se com a hipótese

$$\sqrt{\frac{c(z)}{k(z)}} = f(z) \equiv f(z + Z_0) \quad (4.2.29)$$

tal que, por definição, como introduzido nas equações (4.1.5),

$$f(\bar{Z}) = 1, \quad k(\bar{z}) = c(\bar{z}) = 1 \quad (4.2.30)$$

4.2.2.2. Cálculo da coordenada transformada z' a partir da equação (4.2.26)

A seguir, obtém-se z' a partir da equação (4.2.26), cuidando para que $f(Z)$ seja integrável e tal que $z' = 0$ quanto $z = 0$.

4.2.2.3. Cálculo da função $p(z')$ como uma solução da equação (4.2.28) em termos dos parâmetros α e β

Então, é possível expressar $p(z')$ como uma solução da equação (4.2.28), em termos dos parâmetros α e β , como mostra a tabela 4.2 na seção seguinte, escrita de forma geral como

$$p = p_0 P(\alpha, \beta, Z) \equiv p_0 P \quad (4.2.31)$$

onde a constante p_0 é obtida de tal forma que

$$k(Z_0)p(Z_0) = 1 \quad (4.2.32)$$

de acordo com o desenvolvimento feito na Seção 4.2 para material isotrópico.

4.2.2.4. Cálculo das funções para condutividade e calor específico

Partindo das equações (4.2.29) e (4.2.27) e usando a notação da equação (4.2.31), segue que

$$k = \frac{\sqrt{C_1}}{f(p_0 P)^2}, \quad c = \frac{\sqrt{C_1} f}{(p_0 P)^2} \quad (4.2.33)$$

Calculando as constantes $\sqrt{C_1}$ e p_0 das equações (4.2.30) e (4.2.32)

$$\sqrt{C_1} = \left(f(Z_0) \frac{P(Z_0)}{P(\bar{Z})} \right)^2, \quad P_0 = f(Z_0) \frac{P(Z_0)}{P(\bar{Z})^2} \quad (4.2.34)$$

obtêm-se as expressões finais da condutividade e do calor específico

$$k = \frac{1}{f(Z)} \left(\frac{P(\bar{Z})}{P(Z)} \right)^2, \quad c = f(Z) \left(\frac{P(\bar{Z})}{P(Z)} \right)^2 \quad (4.2.35)$$

Estas expressões em termos das funções presumidas $f(Z)$, como na equação (4.2.29), e dos parâmetros α e β , devem ser checadas em relação aos

parâmetros reais do material com gradação funcional, obtidos em laboratório, com ajustes feitos de forma iterativa até uma concordância satisfatória entre o experimento e o modelo.

Além disso, na obtenção da expressão de $p(z')$ na equação (4.2.31),

$$p = f(Z_0) \frac{P(Z_0)}{P(\bar{Z})^2} P(Z) \quad (4.2.36)$$

pode-se também fazer uso do seguinte produto na implementação numérica:

$$kp = \frac{f(Z_0)P(Z_0)}{f(Z)P(Z)} \quad (4.2.37)$$

4.3. Resumo das expressões obtidas na Seção 4.2

Nas tabelas a seguir é feito um resumo das equações desenvolvidas na Seção 4.2 para as funções $p(z)$ e $k(z)$ para problemas isotrópicos e as funções $p(z')$, $k_z(z')$ e $c(z')$ para problemas ortotrópicos em termos das suposições feitas para a constante β tendo $\lambda = 0$.

A tabela 4.1 apresenta as expressões de $p(z)$ e $k(z)$ de acordo com a hipótese adotada para β na equação (4.2.4) adaptada para problema isotrópico, conforme é explicado na Subseção 4.2.1.

Tabela 4.1: Resumo das soluções $p(z)$ e $k(z)$ para os padrões de variação adotados.

	Funções $k(z)$ e $p(z)$
$\beta = 0$ (Quadrática)	$k = k_0(\alpha Z + 1)^2$, $k_0 = \bar{k}(\alpha \bar{Z} + 1)^{-2}$ $p = p_0(\alpha Z + 1)^{-1}$, $p_0 = k_0^{-1}(\alpha Z_0 + 1)^{-1}$
$+\beta^2$ (Trigonométrica)	$k = k_0(\alpha \text{sen}(\beta Z) + \cos(\beta Z))^2$, $k_0 = \bar{k}(\alpha \text{sen}(\beta \bar{Z}) + \cos(\beta \bar{Z}))^{-2}$ $p = p_0(\alpha \text{sen}(\beta Z) + \cos(\beta Z))^{-1}$, $p_0 = k_0^{-1}(\alpha \text{sen}(\beta Z_0) + \cos(\beta Z_0))^{-1}$
$-\beta^2$ (Exponencial)	$k = k_0 e^{-2\beta Z} (\alpha e^{2\beta Z} + 1)^2$, $k_0 = \bar{k} e^{2\beta \bar{Z}} (\alpha e^{2\beta \bar{Z}} + 1)^{-2}$ $p = p_0 e^{\beta Z} (\alpha e^{2\beta Z} + 1)^{-1}$, $p_0 = k_0^{-1} e^{\beta Z_0} (\alpha e^{2\beta Z_0} + 1)^{-1}$

A tabela 4.2 apresenta um resumo das soluções $p(z')$, $k_z(z')$ e $c(z')$ em função da difusividade térmica $a(z') = k_z(z')/c(z')$, de acordo com as hipóteses adotadas para β na equação (4.2.4).

Tabela 4.2: Resumo das soluções $p(z')$, $k_z(z')$ e $c(z')$ para os padrões de variação adotados de difusividade térmica $a(z') = k_z(z')/c(z')$.

$z' = \int_{z_0}^z \frac{dZ}{\sqrt{a(Z)}}$	$\beta = 0$ (Quadrática)	$p = \frac{(\alpha \bar{z}' + 1)^2 \sqrt{a_0}}{(\alpha z' + 1)}$	$k_z = \frac{p(\bar{z}')^2}{p(z')^2} \sqrt{a(Z)}$ $c = \frac{p(\bar{z}')^2}{p(z')^2} \frac{1}{\sqrt{a(Z)}}$
	$+\beta^2$ (Trigonométrica)	$p = \frac{(\alpha \text{sen}(\beta \bar{z}') + \cos(\beta \bar{z}'))^2 \sqrt{a_0}}{(\alpha \text{sen}(\beta z') + \cos(\beta z'))}$	
	$-\beta^2$ (Exponencial)	$p = \frac{e^{\beta z'} (\alpha (e^{2\beta \bar{z}'} - 1) + 1)^2 \sqrt{a_0}}{e^{2\beta z'} (\alpha (e^{2\beta z'} - 1) + 1)}$	