

3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS NÃO-SINGULARES

Este Capítulo apresenta as soluções fundamentais não-singulares, também conhecidas como funções T completas que nada mais são do que soluções homogêneas regulares da equação diferencial do problema, aplicadas no presente trabalho a problemas no domínio da frequência.

O nome de funções T completas vem sendo usado em homenagem ao seu criador Trefftz. O termo *completas* tem a ver com um polinômio completo. Tais soluções são aqui apresentadas, tanto para o caso de problemas de potencial como para problemas de elasticidade, num contexto independente e mais geral do que se pode obter na literatura (Qin, 2003).

Inicialmente são abordadas as soluções fundamentais para os casos de problemas de potencial quase-harmônicos e harmônicos, Seção 3.1. Em seguida são apresentadas as soluções fundamentais para os casos estáticos e dinâmicos de elasticidade, este último no domínio da frequência, Seção 3.2. E finalmente, são abordados os casos de espaços nulos relacionados à parte estática das soluções fundamentais, Seção 3.3.

Neste trabalho interessam apenas as soluções fundamentais não-singulares, as quais passarão a ser chamadas a partir deste ponto apenas de soluções fundamentais. Os desenvolvimentos aqui feitos são fortemente influenciados pelas apostilas e notas de aulas do curso de Método Híbrido de Elementos de Contorno ministrado na PUC-Rio pelo professor Dumont. Uma exposição resumida do que será aqui apresentado pode ser encontrada em (Dumont e Prazeres, 2004, 2005).

3.1. Problemas de Potencial

Nesta seção, diferentemente do que se fez na Seção 2.1, será priorizado o uso da notação indicial e todas as equações aqui utilizadas, mesmo aquelas já apresentadas na Seção 2.1, serão reescritas com uma nova numeração, com o intuito de facilitar o acompanhamento das deduções.

3.1.1. Problemas de Potencial Quase-harmônicos

A equação diferencial de equilíbrio para problemas de potencial quase-harmônicos (Zienkiewicz) é a equação de Poisson (para problemas com fonte interna) ou a equação de Laplace, como apresentado na Seção 2.1. Seja então a equação de Laplace, equação (2.1.14), reescrita abaixo em notação indicial:

$$u_{,ii} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1.1)$$

A questão de se achar a solução fundamental da equação (3.1.1) envolve encontrar um campo potencial u_0^* que a satisfaça.

A função u_0^* pode ser expressa como

$$u_0^* = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.1.2)$$

para problema 2D, em coordenadas polares. Portanto, a equação (3.1.1) se expressa

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_r g + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} = 0 \quad (3.1.3)$$

em que os subscritos denotam derivadas parciais. Esta equação pode ser subdivida em duas equações,

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r - \frac{m^2}{r^2}f = 0 \quad (3.1.4)$$

$$g_{\theta\theta} = -m^2g \quad (3.1.5)$$

em que m é uma constante de separação, de valor qualquer, a princípio.

A solução geral da equação (3.1.5) é

$$g = C_1 \cos(m\theta) + C_2 \sin(m\theta) \quad (3.1.6)$$

em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Como se requer que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{\theta}(-\pi) &= g_{\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

verifica-se que m tem que ser um número inteiro, positivo ou negativo.

A solução geral da equação (3.1.4) é uma combinação linear qualquer das funções r^m e r^{-m} . No entanto, como somente interessam soluções que resultem em polinômios, toma-se apenas a primeira das soluções, com o que se obtém a expressão de u_0^* , de acordo com a equação (3.1.2):

$$u_0^* = r^m (C_1 \cos(m\theta) + C_2 \sin(m\theta)) \quad (3.1.8)$$

A expressão correspondente em coordenadas cartesianas se obtém fazendo

$$x = r \cos(\theta) \text{ e } y = r \sin(\theta) \quad (3.1.9)$$

Para corresponder a soluções que devem ser não-singulares e únicas, m deve ser um inteiro positivo. Note que haverá apenas uma solução possível para $m=0$ e duas soluções para cada valor subsequente de m , o que corresponde a $2n+1$ soluções compreendidas por polinômios completos de grau n em coordenadas cartesianas.

Para ilustrar o que foi dito até então, o conjunto de tais termos polinomiais para $n=3$ é dado abaixo para o vetor u_{0s}^* , em que s está relacionado ao grau de liberdade de p_s^* ,

$$\begin{aligned} u_{0s}^* &= \langle 1 \mid r \cos \theta \quad r \sin \theta \mid r^2 \cos 2\theta \quad r^2 \sin 2\theta \mid r^3 \cos 3\theta \quad r^3 \sin 3\theta \rangle \\ &\equiv \langle 1 \mid x \quad y \mid xy \quad -x^2 + y^2 \mid -3xy^2 + x^3 \quad -3yx^2 + y^3 \rangle \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Pode-se demonstrar que para o caso de problemas 3D a expressão de u_0^* , em coordenadas esféricas (r, θ, φ) , corresponde a:

$$u_0^* = r^m L_\ell^m(\cos \theta) (C_1 \sin \ell \theta + C_2 \cos \ell \theta) \quad (3.1.11)$$

em que

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \text{ e } z = r \cos(\theta) \quad (3.1.12)$$

e $L_\ell^m(\cos \theta)$ é a função associada de Legendre de primeira ordem, com argumento $\cos \theta$, na verdade uma função trigonométrica de θ calculada no contexto de “harmônicos esféricos”

(<http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html>). $L_\ell^m = L_\ell^m(\cos \theta)$ existe apenas para $\ell \leq m$. Então, para todo $m \geq 0$ existem $2m+1$ soluções compreendidas na equação (3.1.11) e, como resultado, o conjunto de possíveis polinômios em coordenadas cartesianas até o grau n corresponde a $(n+1)^2$.

Para $n = 3$, por exemplo, obtém-se um vetor u_{0s}^* com 16 soluções fundamentais:

$$\begin{aligned} u_{0s}^* &= \langle 1 \mid r L_0^1 \quad r L_1^1 \sin \varphi \quad r L_1^1 \cos \varphi \mid r^2 L_0^2 \quad r^2 L_1^2 \sin \varphi \quad r^2 L_1^2 \cos \varphi \quad r^2 L_2^2 \sin 2\varphi \quad r^2 L_2^2 \cos 2\varphi \mid \\ &\quad r^3 L_0^3 \quad r^3 L_1^3 \sin \varphi \quad r^3 L_1^3 \cos \varphi \quad r^3 L_2^3 \sin 2\varphi \quad r^3 L_2^3 \cos 2\varphi \quad r^3 L_3^3 \sin 3\varphi \quad r^3 L_3^3 \cos 3\varphi \rangle \\ &\equiv \langle 1 \mid x \quad y \quad z \mid xy \quad -x^2 + y^2 \quad xz \quad yz \quad -x^2 + z^2 \mid \\ &\quad x^3 - 3xy^2 \quad -3x^2y + y^3 \quad xyz \quad y^2z - x^2z \quad xz^2 - xy^2 \quad -x^2y + yz^2 \quad -3x^2z + z^3 \rangle \end{aligned}$$

$$(3.1.13)$$

Na Tabela abaixo é feito um resumo dos elementos 2D e 3D mais simples para problemas de potencial. Nela são apresentados o número de graus de liberdade interno (dimensão de \mathbf{p}^*) de cada elemento e a dimensão e o posto das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{F} relacionadas. O valor n apresentado na segunda linha da tabela é o grau da função polinomial u_{0s}^* .

Tabela 3.1: Resumo de elementos 2D e 3D para problemas de potencial.

Dimensão	2D				3D			
n	1	2	3	4	1	2	3	4
$\dim(\mathbf{p}^*)$	$2n+1$				$(n+1)^2$			
	3	5	7	9	4	9	16	25
Elemento	T3	Q4	T6	Q8	Te4	H8	Te10	H20
Dimensão de \mathbf{H}	3x3	5x4	7x6	9x8	4x4	9x8	16x10	25x20
Posto de \mathbf{H}	2	3	5	7	3	7	9	19
Dimensão de \mathbf{F}	3x3	5x5	7x7	9x9	4x4	9x9	16x16	25x25
Posto de \mathbf{F}	2	4	6	8	3	8	15	24

Ilustrações dos elementos T6 (triângulo de 6 nós), Q8 (quadrilátero de 8 nós), Te10 (tetraedro de 10 nós) e H20 (hexaedro de 20 nós) são apresentadas nas Figuras 3.1 e 3.2 da Subseção 3.3.1. Delas também podem ser obtidas as formas dos elementos T3 (triângulo de 3 nós), Q4 (quadrilátero), tetraedro de 4 nós e H8 (hexaedro de 8 nós) através da desconsideração dos nós nos meios das faces ou arestas, nos elementos 2D e 3D, respectivamente.

3.1.2. Problemas de Potencial Harmônicos

A equação de governo do problema de potencial harmônico foi apresentada na Seção 2.1.2, equação (2.1.17), e é apresentada aqui novamente em notação indicial, sem consideração de fonte interna, ou seja,

$$u_{,ii} + \tilde{k}^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1.14)$$

A questão de se achar a solução fundamental da equação (3.1.14) envolve encontrar um campo potencial u^* que a satisfaça.

Novamente, assim como feito para a função u_0^* na Seção anterior, a função u^* pode ser expressa como

$$u^* = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.1.15)$$

Portanto, em coordenadas polares, a equação (3.1.14) se expressa como

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_rg + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} + k^2fg = 0 \quad (3.1.16)$$

em que os subscritos denotam derivadas parciais. Por seu lado, esta equação pode ser subdivida em duas,

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)f = 0 \quad (3.1.17)$$

$$g_{\theta\theta} = -m^2g \quad (3.1.18)$$

em que m é uma constante de separação, de valor qualquer a princípio.

A solução geral da equação (3.1.18) é:

$$g = C_1 \sin(m\theta) + C_2 \cos(m\theta) \quad (3.1.19)$$

em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Como se requer que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{\theta}(-\pi) &= g_{\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

verifica-se que m tem que ser um número inteiro, positivo ou negativo.

A solução geral da equação (3.1.17) é uma combinação linear qualquer das funções de Bessel $J_m(\tilde{k}r)$ e $Y_m(\tilde{k}r)$, de primeira e segunda espécie e ordem m , com argumento $\tilde{k}r$. Como somente interessam soluções que resultem em polinômios, toma-se apenas a primeira das soluções, com o que se obtém a expressão de u^* , de acordo com a equação (3.1.15):

$$u^* = (C_1 \sin(m\theta) + C_2 \cos(m\theta))J_m(\tilde{k}r) \quad (3.1.21)$$

Uma maneira mais adequada de escrever a solução u^* dada na equação (3.1.21) é:

$$u^* = \left(2/\tilde{k}\right)^m m! J_m(\tilde{k}r)(C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta) \quad (3.1.22)$$

em que o termo que multiplica $J_m(\tilde{k}r)$ é escolhido de tal maneira que $\lim_{\tilde{k} \rightarrow 0} u^* = u_0^*$ para u_0^* dado na equação (3.1.8). Como conseqüência, pode-se expressar o vetor u_s^* de $2n+1$ soluções fundamentais na forma de u_{0s}^* na equação (3.1.10), apenas trocando r^m por $\left(2/\tilde{k}\right)^m m! J_m(\tilde{k}r)$, considerando n o grau do polinômio completo que se obtém quando $\tilde{k} \rightarrow 0$.

A solução geral não-singular da equação de Helmholtz, equação (3.1.14), para problemas 3D em coordenadas esféricas, é

$$u^* = \frac{(2m+1)!\sqrt{\pi}}{m!(2\tilde{k})^m} J_{m+1/2}(\tilde{k}r) L_\ell^m(\cos\theta)(C_1 \sin \ell\theta + C_2 \cos \ell\theta) \quad (3.1.23)$$

com um fator multiplicando a função de Bessel de tal maneira que a equação (3.1.11) seja obtida como o caso limite de $\tilde{k} \rightarrow 0$. As funções de Bessel de ordem $m+1/2$ são na verdade funções trigonométricas. Como ocorrido para o caso 2D, pode-se expressar o vetor u_s^* das soluções fundamentais com $(n+1)^2$ termos usando u_{0s}^* definido na equação (3.1.13) com $\frac{(2m+1)!\sqrt{\pi}}{m!(2\tilde{k})^m} J_{m+1/2}(\tilde{k}r)$ no lugar de r^m .

3.2. Problemas de Elasticidade

3.2.1. Elastostática

A equação diferencial de equilíbrio da elastostática, apresentada na equação (2.2.13), é reescrita abaixo por motivo de conveniência, sem a consideração de forças de corpo e levando em conta o que foi exposto na Seção 2.3, no Capítulo 2, ficando então

$$u_{im,jj}^* + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{jm,ji}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.1)$$

Uma solução do problema proposto pode ser obtida considerando-se que o campo de deslocamentos u_{im}^* possa ser expresso em termos de uma função potencial Φ_{im} (função de Marguerre) na forma

$$u_{0im}^* = \Phi_{im,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,ik} \quad (3.2.2)$$

sendo

$$u_{0jm,ji}^* = \Phi_{jm,kkji} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,jkji} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \Phi_{jm,kkji} \quad (3.2.3)$$

$$u_{0im,jj}^* = \Phi_{im,kkjj} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,ikjj} \quad (3.2.4)$$

a equação (3.2.1) resulta em

$$\Phi_{im,kkjj} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2(\nabla^2 \Phi_{im}) = 0 \quad (3.2.5)$$

onde se considera que

$$\Phi_{im} = \Phi_0 \delta_{im} \quad (3.2.6)$$

em que o índice 0 na função Φ_0 se refere à solução estática e δ_{im} é um delta de Kronecker generalizado, onde o índice i corresponde às direções coordenadas x , y e z para o caso geral de problemas 3D e o índice m varia de 1 até o número de graus de liberdade do problema.

Assim, uma solução simples pode ser formulada num sistema polar de coordenadas, para problemas bidimensionais, ou num sistema esférico de coordenadas, para problemas tridimensionais.

A solução pode ser obtida pelo produto de uma função do raio r e uma função do ângulo θ , para problemas bidimensionais.

Seja o duplo sistema de equações diferenciais, obtido a partir da equação (3.2.5), e considerando a equação (3.2.6),

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi_0 = 0 \\ \nabla^2 \Phi_0 = \Psi_0 \end{cases} \quad (3.2.7)$$

em que o índice 0 na função Ψ_0 tem o mesmo significado de se referir ao problema estático com mencionado acima. Quanto aos subscritos *im*, que aparecem nas equações (3.2.5) e (3.2.6), são omitidos na equação acima apenas por simplicidade de notação.

A função Ψ_0 pode ser expressa como o produto de duas funções,

$$\Psi_0 = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.2.8)$$

Portanto, em coordenadas polares, a primeira das equações (3.2.7) se expressa

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_r g + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} = 0 \quad (3.2.9)$$

em que os subscritos denotam derivadas parciais. Por seu lado, esta equação pode ser subdivida em duas equações,

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r - \frac{m^2}{r^2}f = 0 \quad (3.2.10)$$

$$g_{\theta\theta} = -m^2g \quad (3.2.11)$$

em que m é uma constante de separação, de valor qualquer, a princípio. Note que esse procedimento é igual ao procedimento utilizado na seção anterior (Seção 3.1).

Assim como na Seção 3.2 a solução geral da equação (3.2.11) tem a forma

$$g = C_{1m}\text{sen}(m\theta) + C_{2m}\text{cos}(m\theta) \quad (3.2.12)$$

em que C_{1m} e C_{2m} são constantes arbitrárias.

Também aqui, assim como na seção anterior, se requer que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{\theta}(-\pi) &= g_{\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

em que se verifica que m tem que ser um número inteiro, positivo ou negativo.

Como já se sabe, a solução geral da equação (3.2.10) é uma combinação linear qualquer das funções r^m e r^{-m} . E, como somente interessam soluções que resultem em polinômios, apenas a primeira das soluções é válida, e portanto a expressão de Ψ_0 , de acordo com a equação (3.2.8) fica

$$\Psi_0 = r^m(C_{1m}\text{sen}(m\theta) + C_{2m}\text{cos}(m\theta)) \quad (3.2.14)$$

Para a solução da segunda das equações (3.2.7), supõe-se também que Φ_0 possa ser expressa por

$$\Phi_0 = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.2.15)$$

em que f e g são funções a determinar (diferentes das funções obtidas acima), de acordo com a equação

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_rg + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} = (C_{1m}\sin(m\theta) + C_{2m}\cos(m\theta))r^m \quad (3.2.16)$$

A solução homogênea desta equação tem a mesma expressão de Ψ , na equação (3.2.14), com outras constantes de integração. Uma solução particular desta equação pode ser obtida se se escrever

$$f_{rr}^p + \frac{1}{r}f_r^p + \frac{1}{r^2}f^p \frac{g_{\theta\theta}}{g} = \frac{1}{g}(C_{1m}\sin(m\theta) + C_{2m}\cos(m\theta))r^m \quad (3.2.17)$$

Ficando evidente, então, que se pode supor para g a mesma expressão da equação (3.2.12), resultando para f^p a equação

$$f_{rr}^p + \frac{1}{r}f_r^p - \frac{m^2}{r^2}f^p = r^m \quad (3.2.18)$$

cuja solução é

$$f^p = \frac{r^{m+2}}{4(m+1)} \quad (3.2.19)$$

e, portanto, tem-se a solução geral da equação (3.2.7):

$$\Phi_0 = (C_{1n}\sin(n\theta) + C_{2n}\cos(n\theta))r^n + \frac{r^{m+2}}{4(m+1)}(C_{3m}\sin(m\theta) + C_{4m}\cos(m\theta)) \quad (3.2.20)$$

em que n e m são números inteiros positivos quaisquer. Esta função pode compor qualquer solução da função potencial geral Φ_{im} , conforme a proposição do problema. A equação acima pode ser expressa, de maneira mais simples, como

$$\Phi_0 = r^n [C_{1n}\sin(n\theta) + C_{2n}\cos(n\theta) + C_{3n}\sin((n-2)\theta) + C_{4n}\cos((n-2)\theta)] \quad (3.2.21)$$

A função Φ_0 pode ser dada em termos da função u_0^* da equação (3.2.8) ou da equação (3.2.11) para problemas 2D ou 3D, respectivamente, ficando

$$\Phi_0 = r^2 u_0^* \quad (3.2.22)$$

Sendo assim a expressão de u_{0im}^* da equação (3.2.2) que é função de Φ_0 , que por sua vez é função de u_0^* , é

$$u_{0im}^* = r^2 \Phi_{0im,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} r^2 \Phi_{0km,ik}^* \quad (3.2.23)$$

Para efeito de ilustração, as soluções u_{0is}^* como desenvolvimento da equação (3.2.2), em que s se refere ao grau de liberdade de p_s^* , para os casos bi e tridimensionais são, respectivamente:

$$u_{0is}^* = \frac{1}{1-\nu} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3-4\nu & 0 & (5-8\nu)x & -y & (7-8\nu)y & -x & \dots \\ 0 & 3-4\nu & -y & (7-8\nu)x & -x & (5-8\nu)y & \dots \end{array} \right] \quad (3.2.24)$$

$$u_{0is}^* = \frac{1}{1-\nu} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 5-6\nu & 0 & 0 & (7-10\nu)x & -y & -z & (9-10\nu)y \\ 0 & 5-6\nu & 0 & -y & (9-10\nu)x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 5-6\nu & -z & 0 & (9-10\nu)x & 0 \\ -x & 0 & (9-10\nu)z & 0 & -x & \dots \\ (7-10\nu)y & -z & 0 & (9-10\nu)z & -y & \dots \\ -z & (9-10\nu)y & -x & -y & (7-10\nu)z & \dots \end{array} \right] \quad (3.2.25)$$

O número de solução compreendidas pelo índice s dos deslocamentos u_{0is}^* corresponde a um polinômio completo de grau n , ou seja, $2(2n+1)$ para problemas 2D e $3(n+1)^2$ para problemas 3D.

Na tabela abaixo é feito um resumo dos elementos 2D e 3D mais simples para problemas de elasticidade. Nela são apresentados o número de graus de liberdade interno (dimensão de p^*) de cada elemento e a dimensão e o posto das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{F} relacionadas.

Tabela 3.2: Resumo de elementos 2D e 3D para problemas de elasticidade.

Dimensão	2D				3D			
n	1	2	3	4	1	2	3	4
$\dim(p^*)$	$2(2n+1)$				$3(n+1)^2$			
	6	10	14	18	12	27	48	75
Elemento	CST	Q4	T6	Q8	Te4	H8	Te10	H20
Dimensão de \mathbf{H}	6x6	10x8	14x12	18x16	12x12	27x24	48x30	75x60
Posto de \mathbf{H}	3	5	9	13	6	18	24	54
Dimensão de \mathbf{F}	6x6	10x10	14x14	18x18	12x12	27x27	48x48	75x75
Posto de \mathbf{F}	3	7	11	15	6	21	42	69

Nas figuras a seguir são ilustrados os elementos T6 (triângulo de 6 nós), Q8 (quadrilátero de 8 nós), Te10 (tetraedro de 10 nós) e H20 (hexaedro de 20 nós), aos quais se referem a tabela acima e a tabela 3.1.

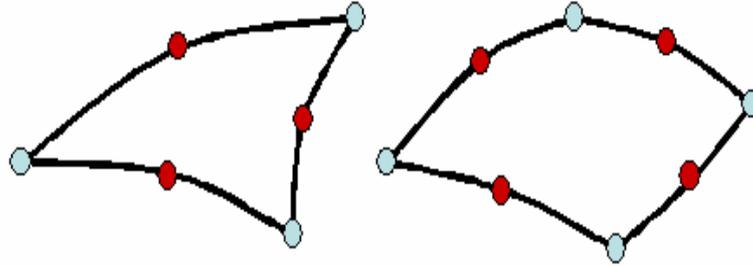


Figura 3.1: Elementos 2D – T6 e Q8.

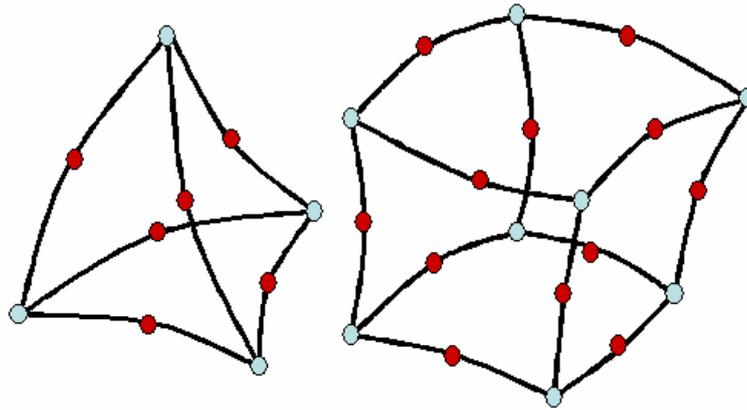


Figura 3.2: Elementos 3D – Tetraedro de 10 nós e H20.

3.2.2. Elastodinâmica

A equação diferencial de equilíbrio da elastodinâmica, equação (2.2.1), é reescrita abaixo sem a consideração de forças de corpo:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.26)$$

Foi demonstrado na Seção 2.2, Capítulo 2, que a aplicação da lei de Hooke à equação (3.2.26) leva a

$$G u_{i,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,ki} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.27)$$

que nada mais é que a equação diferencial da elastodinâmica em termos de deslocamentos.

Para que se possa ter uma formulação no domínio da frequência, supôs-se que estes deslocamentos possam ser expressos como o produto de duas funções, como exposto na Seção 2.6, equação (2.7.2), em que $\tau(t, \omega)$ satisfaz a equação (2.7.4) e dessa forma u_{im}^* deve satisfazer a equação diferencial

$$G u_{im,jj}^* + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{jm,ji}^* + \rho \omega^2 u_{im}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.28)$$

Que pode ser expressa da seguinte forma, em analogia com o que foi feito na Seção 2.2:

$$c_2^2 u_{im,jj}^* + (c_1^2 - c_2^2) u_{jm,ji}^* + \omega^2 u_{im}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.29)$$

Uma solução para a equação acima pode ser obtida a partir da substituição

$$u_{im}^* = \Phi_{im,kk} + k_1^2 \Phi_{im} - \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \Phi_{km,ik} \quad (3.2.30)$$

em que $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ e $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$. Então,

$$u_{jm,ji}^* = \Phi_{jm,ji} + \frac{k_1^2}{k_2^2} \Phi_{km,jkji} \quad (3.2.31)$$

$$u_{im,jj}^* = \Phi_{im,kkjj} + k_1^2 \Phi_{im,jj} - \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \Phi_{km,ikjj} \quad (3.2.32)$$

Portanto, a equação de equilíbrio se expressa como

$$\Phi_{im,kkjj} + k_1^2 \Phi_{im,jj} + k_2^2 \Phi_{im,jj} + k_1^2 k_2^2 \Phi_{im} = 0 \quad (3.2.33)$$

que pode ser posta na forma

$$\left(\nabla^2 + k_1^2\right) \left(\nabla^2 + k_2^2\right) \Phi_{im} = 0 \quad (3.2.34)$$

onde se considera, por simplicidade, que

$$\Phi_{im} = \Phi \delta_{im} \quad (3.2.35)$$

É válido mencionar que, para problema estáticos, em que $\omega = 0$, $k_1 = k_2 = 0$

$$\text{e } \frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{(1-2\nu)}{(2-2\nu)}.$$

A partir da equação (3.2.34) e considerando a equação (3.2.35), pode-se formular o seguinte duplo sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_1^2)\Psi = 0 \\ (\nabla^2 + k_2^2)\Phi = \Psi \end{cases} \quad (3.2.36)$$

para cada termo da função potencial Φ_{im} .

A função Ψ pode ser expressa como

$$\Psi = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.2.37)$$

Portanto, em coordenadas polares, a primeira das equações (3.2.36) se expressa como

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_rg + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} + k_1^2fg = 0 \quad (3.2.38)$$

em que os subscritos denotam derivadas parciais. Por seu lado, esta equação pode ser subdivida em duas equações,

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \left(k_1^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)f = 0 \quad (3.2.39)$$

$$g_{\theta\theta} = -m^2g \quad (3.2.40)$$

em que m é uma constante de separação, de valor qualquer a princípio.

A solução geral da equação (3.2.40) é:

$$g = C_{1m}\text{sen}(m\theta) + C_{2m}\text{cos}(m\theta) \quad (3.2.41)$$

em que C_{1m} e C_{2m} são constantes arbitrárias. Como se requer que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{\theta}(-\pi) &= g_{\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

verifica-se que m tem que ser um número inteiro, positivo ou negativo.

A solução geral da equação (3.2.39) é uma combinação linear qualquer das funções $J_m(k_1r)$ e $Y_m(k_1r)$, que são de ordem m . Como somente interessam soluções que resultem em polinômios, toma-se apenas a primeira das soluções, com o que se obtém a expressão de Ψ , de acordo com a equação (3.2.37):

$$\Psi = (C_{1m}\text{sen}(m\theta) + C_{2m}\text{cos}(m\theta))J_m(k_1r) \quad (3.2.43)$$

Como se pode perceber, a equação (3.2.36) é simétrica em relação às funções Ψ e Φ , o que permite dizer que sua solução é uma combinação do resultado obtido acima para a função Ψ , de forma a se terem 4 constantes de integração e duas funções de Bessel de primeira ordem com argumentos k_1 e k_2 . Portanto, a solução geral da equação (3.2.36), adequadamente escrita, é

$$\begin{aligned} \Phi = & (C_{1n} \sin(n\theta) + C_{2n} \cos(n\theta)) \left(\frac{J_n(k_1 r)}{k_1^n} + \frac{J_n(k_2 r)}{k_2^n} \right) + \\ & + \frac{C_{3m} \sin(m\theta) + C_{4m} \cos(m\theta)}{k_1^2 - k_2^2} \left(\frac{J_m(k_1 r)}{k_1^m} - \frac{J_m(k_2 r)}{k_2^m} \right) \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

de modo a se obter Φ_0 da equação (3.2.21) para $\omega \rightarrow 0$.

É possível escrever a função Φ em termos da função potencial u_0^* encontrada na Seção 3.1 do Capítulo 3 na forma

$$\Phi = \frac{(J_d(k_1 r)/k_1^d - J_d(k_2 r)/k_2^d) 2^{d+2} (d+1)!}{r^d (k_2^2 - k_1^2)} u_0^* \quad (3.2.45)$$

para problemas 2D, ou

$$\Phi = \frac{(J_{d+1/2}(k_1 r)/k_1^{d+1/2} - J_{d+1/2}(k_2 r)/k_2^{d+1/2}) \sqrt{\pi} (2d+3)!}{r^{d+1/2} (k_2^2 - k_1^2) 2^{d+1/2} (d+1)!} u_0^* \quad (3.2.46)$$

para problemas 3D, em que d é o grau do polinômio u_0^* em coordenadas cartesianas. As funções de Bessel de ordem $m + \frac{1}{2}$ são na verdade funções trigonométricas. Os fatores multiplicadores nas equações (3.2.45) e (3.2.46) são escolhidos de tal maneira que a expressão de Φ para $\omega \rightarrow 0$ se torna igual a equação (3.2.21).

Seja $\dim(u_{0s}^*)$ a dimensão do vetor de soluções potenciais da Seção 3.2, a qual é $2n+1$ para problemas 2D e $(n+1)^2$ para problema 3D, onde n é o grau do polinômio completo que se está usando. Seja ainda D uma constante igual a 2 ou 3, para problemas 2D ou 3D, respectivamente. Então, para u_0^* expandido como o vetor u_{0s}^* da equação (3.2.10) ou (3.2.13), pode-se expressar um vetor de funções Φ_ℓ nas equações (3.2.45) ou (3.2.46) e, considerando-se a solução geral Φ_{is} na forma $\Phi_{is} = \Phi \delta_{is}$, compõe-se uma matriz de soluções $u_{is}^* \equiv u_{i(D\ell+k-D)}^*$ da equação diferencial (3.2.28) ou (3.2.29) fazendo-se uso da equação (3.2.30) na forma

$$u_{i(D\ell+k-D)}^* = (\Phi_{\ell, jj} + k_1^2 \Phi_\ell) \delta_{ik} + (k_1^2/k_2^2 - 1) \Phi_{\ell, ik} \quad i=1..D, k=1..D, \ell=1..\dim(u_0^*) \quad (3.2.47)$$

O número de soluções compreendidas pelo índice $s \equiv D\ell + k - D$ dos deslocamentos u_{is}^* corresponde a um polinômio completo de grau n , assim como no caso estático, ou seja, $2(2n+1)$ para problemas 2D e $3(n+1)^2$ para problemas 3D.

3.3. Espaços Nulos Relacionados à Parte Estática das Soluções Fundamentais Não-Singulares

A implementação no domínio da frequência das soluções fundamentais deduzidas nas seções anteriores resulta em matrizes \mathbf{F} e \mathbf{H} de posto cheio, como é apresentado na Seção 2.7. Entretanto, as matrizes \mathbf{F}_0 e \mathbf{H}_0 do caso estático têm espaços nulos, como foi indicado nas equações (2.7.15), (2.7.16) e (2.7.20). A matriz \mathbf{W} de potencial constante ou deslocamentos de corpo rígido é construída de maneira direta (apesar de dependente de modos no caso de elasticidade, devido a rotações de corpo rígido), como dada abaixo para um modelo discretizado com nnp coordenadas de pontos nodais (x_s, y_s, z_s) .

$$\tilde{\mathbf{W}} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (3.3.1)$$

para problemas de potencial tanto 2D quanto 3D, ou

$$\tilde{\mathbf{W}} = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & & & \\ \hline y_1 & -x_1 & y_2 & -x_2 & \dots & y_{nnp} & -x_{nnp} & & & \end{array} \right]^T \quad (3.3.2)$$

para problemas de elasticidade 2D, ou ainda

$$\tilde{\mathbf{W}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & -z_1 & y_1 & 0 & -z_2 & y_2 & \dots & 0 & -z_{nnp} & y_{nnp} & \\ z_1 & 0 & -x_1 & z_2 & 0 & -x_2 & \dots & z_{nnp} & 0 & -x_{nnp} & \\ -y_1 & x_1 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 & \dots & -y_{nnp} & x_{nnp} & 0 & \end{array} \right]^T \quad (3.3.3)$$

para problemas de elasticidade 3D. Nas equações (3.3.1)-(3.3.3), uma matriz não-ortogonal $\tilde{\mathbf{W}}$ está sendo representada ao invés de \mathbf{W} , por motivo de simplicidade. \mathbf{W} é obtida por ortogonalização de $\tilde{\mathbf{W}}$, tal que $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}$. As equações (3.3.1)-(3.3.3) são válidas também para materiais não-homogêneos.

A base ortogonal representada por $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$ nas equações (2.7.16) e (2.7.20) é, em caso de material homogêneo,

$$\mathbf{V} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (3.3.4)$$

para problemas de potencial tanto 2D quanto 3D, e

$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & \dots & 0 & & \end{array} \right]^T \quad (3.3.5)$$

para casos de elasticidade 2D, ou

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.3.6)$$

para casos de elasticidade 3D.

As séries de produtos $u_{0s}^* V_s$ para \mathbf{V} dado na equação (3.3.4) e u_{0s}^* dado em (3.1.10) ou em (3.1.13) correspondem a potencial constante puro (dando assim fluxo zero). Também, as séries de produtos $u_{0is}^* V_{sj}$ para \mathbf{V} dado nas equações (3.3.5) ou (3.3.6) e u_{0is}^* dado pelas respectivas equações (3.2.24) e (3.2.25) correspondem a deslocamentos de corpo rígido puros. Abaixo é mostrado, a título de ilustração, como ficam tais produtos para potencial e elasticidade 2D, respectivamente.

$$u_{0s}^* V_s = \left\langle 1 \mid x \quad y \mid xy \quad -x^2 + y^2 \mid -3xy^2 + x^3 \quad y^3 - 3yx^2 \quad \dots \right\rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = 1 \quad (3.3.7)$$

$$u_{0is}^* V_{sj} = \frac{1}{1-\nu} \begin{bmatrix} 3-4\nu & 0 & (5-8\nu)x & -y & (7-8\nu)y & -x & \dots \\ 0 & 3-4\nu & -y & (7-8\nu)x & -x & (5-8\nu)y & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3-4\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{-8(1-\nu)y}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3-4\nu}{1-\nu} & \frac{8(1-\nu)x}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

Para materiais não-homogêneos, entretanto, as equações (3.3.4)-(3.3.6) valem apenas aproximadamente. Um modelo dependente mais preciso da base \mathbf{V} deve ser obtido como um espaço nulo aproximado de \mathbf{F}_0 na equação (2.7.20).