

2

O MÉTODO HÍBRIDO DOS ELEMENTOS FINITOS

Este Capítulo tem por finalidade apresentar a formulação do método híbrido dos elementos finitos. Para tanto, parte-se da introdução de conceitos básicos da teoria do potencial e da teoria da elasticidade para problemas dinâmicos, seguidos do conceito de soluções fundamentais.

Em continuação apresenta-se o potencial de Hellinger-Reissner generalizado e a formulação do método híbrido dos elementos finitos para problemas dinâmicos no domínio do tempo.

Finalmente, apresenta-se a formulação geral do método para problemas no domínio da frequência, com uma solução para o problema de autovalores não-lineares relacionado à equação de equilíbrio dinâmica no domínio da frequência, o processo de superposição modal e a obtenção da matriz de rigidez como uma série de frequências.

2.1. Conceitos de Teoria do Potencial

Muitos problemas de engenharia, tais como condução de calor, condução elétrica, campos gravitacionais, campos eletrostáticos, fluxo irrotacional de fluidos ideais, percolação através de um meio poroso, torção de barras prismáticas, são governados por uma mesma equação diferencial, denominada equação quase-harmônica (Zienkiewicz, 1977), por representar problemas que não são puramente transientes e nem harmônicos. Exemplos da equação quase-harmônica são as conhecidas equações de Poisson e de Laplace.

No item 2.1.1 são apresentados o problema de potencial quase-harmônico e a equação de Poisson de forma geral, possibilitando sua aplicação a qualquer um dos exemplos dados acima. Referências em particular serão feitas ao problema de fluxo de calor, de forma a situar as expressões apresentadas com os exemplos a serem mostrados no Capítulo 5. O mesmo será feito no item 2.1.2, o qual apresentará o problema de potencial harmônico e a equação de Helmholtz.

2.1.1. Problema de Potencial quase-harmônico

Em certos problemas, a difusão ou o fluxo de certas quantidades, tais como o calor, é de grande relevância. A taxa de transferência por unidade de área de tais quantidades, \mathbf{q} , pode ser expressa por suas componentes cartesianas como

$$\mathbf{q}^T = [q_x \quad q_y \quad q_z] \quad (2.1.1)$$

Sendo Q a taxa em que a quantidade em questão é gerada por unidade de volume, o equilíbrio ou continuidade necessária para o fluxo em estado permanente é dado por

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = Q \quad \text{ou} \quad \nabla^T \mathbf{q} - Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.1.2)$$

em que Ω é o domínio do problema e

$$\nabla = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.1.3)$$

De forma geral a taxa de fluxo é relacionada ao gradiente de certa quantidade potencial u , que para problemas de fluxo de calor representa a temperatura, sendo \mathbf{q} neste caso o fluxo de calor por unidade de área. Tal relação se expressa de forma geral como

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} q_x \\ q_y \\ q_z \end{array} \right\} = -\mathbf{k} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right\} = -\mathbf{k} \nabla u \quad (2.1.4)$$

onde \mathbf{k} é uma matriz 3x3 (para o caso geral de problemas 3D), geralmente simétrica devido a argumentos de energia. Para problemas de fluxo de calor, \mathbf{k} representa a matriz de condutividade térmica do material.

A equação final de governo para problemas de potencial é obtida pela substituição de (2.1.4) em (2.1.2),

$$\nabla^T (\mathbf{k} \nabla u) + Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.1.5)$$

Na solução de problemas físicos em termos de equações diferenciais, é em geral necessário satisfazer um certo número de condições iniciais ou

condições de contorno. As condições de contorno podem ser: em potencial, em fluxo, proporcionais e mistas.

Condições de contorno apenas em potencial são conhecidas como condições de contorno essenciais ou de Dirichlet. Condições de contorno unicamente em fluxo são conhecidas como condições de contorno naturais ou de Neumann.

As condições de contorno em que o fluxo é proporcional ao potencial, ou seja,

$$q_n = \bar{q} + \alpha u \quad (2.1.6)$$

são também denominadas de condições de contorno de Robin. Na equação (2.1.6) α é um coeficiente de transferência ou radiação, \bar{q} é o valor de densidade de fluxo conhecida e q_n é a componente de fluxo normal à superfície.

Já as condições de contorno mistas são aquelas em que se tem potencial em uma parte do contorno, denominado de Γ_u , ou seja,

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.1.7)$$

e fluxo em certas partes do contorno, denominadas de Γ_q , isto é,

$$q_n = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (2.1.8)$$

onde \bar{u} é o valor de potencial conhecido e q_n , componente de fluxo normal à superfície, é dada por

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = -(\mathbf{k} \nabla u)^T \mathbf{n} \quad (2.1.9)$$

levando em conta que se tenham apenas as condições de contorno mista.

Na equação acima, \mathbf{n} é um vetor de co-senos diretores da normal à superfície:

$$\mathbf{n}^T = [n_x \quad n_y \quad n_z] \quad (2.1.10)$$

No caso de as direções cartesianas (x,y,z) coincidirem com as direções principais do material, ou seja, $k_{xy} = k_{xz} = k_{yz} = 0$, tem-se

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (2.1.11)$$

Dessa forma a equação (2.1.5) fica da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (2.1.12)$$

Se, além disso, o meio em questão for isotrópico e homogêneo, então neste caso a equação (2.1.5) se escreve na forma

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + Q = 0 \quad (2.1.13)$$

em que $k = k_x = k_y = k_z$.

A equação (2.1.13) é conhecida como equação de Poisson. Para o caso de problemas de potencial quase-harmônico sem fonte interna em meio homogêneo e isotrópico, a equação governante se torna a equação de Laplace, ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 u = 0 \quad (2.1.14)$$

2.1.2. Problema de Potencial Harmônico

No item anterior, deduziu-se a equação (2.1.5) para o caso geral de fluxo em estado permanente.

Já para o caso do fluxo variando com o tempo, a equação (2.1.5) sofre uma ligeira alteração, sendo então

$$\nabla^T \mathbf{k} \nabla u + Q = \bar{c} \frac{\partial u}{\partial t} \text{ em } \Omega \quad (2.1.15)$$

Onde $\bar{c} = c\rho$, no caso de problema de fluxo de calor, sendo c o calor específico e ρ a densidade do material em questão.

Para material homogêneo e isotrópico, a equação (2.1.15) assume a expressão

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + Q = \bar{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.16)$$

a partir da equação (2.1.14).

Para o potencial expresso por meio de uma formulação dependente da freqüência, parte-se da separação de variáveis

$$u = u(\omega)\tau(t, \omega) \quad (2.1.17)$$

em que $\tau(t, \omega)$ é definido de tal forma que

$$\frac{\partial \tau(t, \omega)}{\partial t} = -\omega \tau(t, \omega) \quad (2.1.18)$$

e ω é uma quantidade matemática em princípio arbitrária, cuja interpretação física depende do problema em estudo. Com isso, a equação (2.1.16) torna-se

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + Q + \tilde{\kappa}^2 u = 0 \quad (2.1.19)$$

em que $\tilde{\kappa}^2 = \bar{c}\omega/k$ é a constante de separação também denominada de “número de onda”, qualquer que seja o problema em questão.

A equação (2.1.19) é a equação de governo para problemas de potencial harmônico em meio homogêneo e isotrópico e é conhecida como equação de Helmholtz, cuja solução fundamental será apresentada no item 3.1 do Capítulo 3.

2.2. Conceitos de Teoria da Elasticidade

Na teoria da elasticidade, busca-se determinar a distribuição estática ou dinâmica dos deslocamentos e das tensões em uma estrutura submetida a ações externas conhecidas. Para isso deve-se obter uma solução para as equações básicas da elasticidade que satisfaça as condições de contorno impostas, que podem ser em deslocamentos ou em forças. Tais equações são: equações de equilíbrio de forças, equações de compatibilidade entre deformações e deslocamentos e equações constitutivas.

As grandezas relacionadas a essas equações (deslocamentos, forças, deformações e tensões) devem ser descritas em dois sistemas básicos de referência ou de coordenadas. Tem-se um sistema global ou externo, no qual estão representados os deslocamentos absolutos u_i e as forças relacionadas, que podem ser tanto forças de massa f_i , que atuam no domínio Ω do corpo, como as forças de superfície t_i , que atuam no contorno Γ do corpo. Tem-se também um sistema local ou interno, no qual se representam os deslocamentos relativos, ou seja, as deformações ε_{ij} , assim como as tensões σ_{ij} relacionadas.

Nesta e nas próximas seções, os subscritos i e j assumirão os valores 1, 2 ou 3, conforme se referam às coordenadas globais x , y ou z , respectivamente. Um subscrito depois de uma vírgula representa derivada em relação à direção coordenada correspondente. Índices repetidos indicam um somatório de três termos, no caso geral de problemas tridimensionais.

Seja um corpo elástico em equilíbrio, sujeito a pequenos deslocamentos, com condições iniciais em deslocamento e velocidade conhecidas em todo o corpo, que está submetido a forças de massa \bar{f}_i no domínio Ω e forças de superfície \bar{t}_i no contorno Γ_σ e deslocamentos prescritos \bar{u}_i no contorno Γ_u , conforme a fig 2.1.

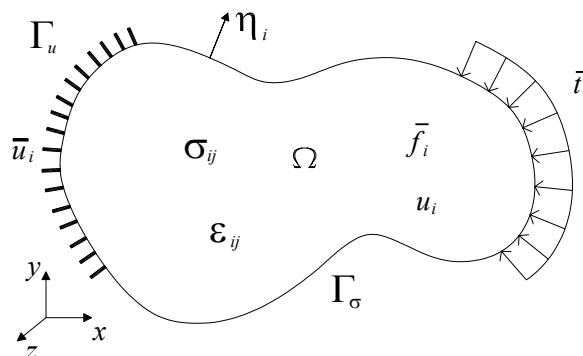


Figura 2.1: Corpo elástico em equilíbrio.

As equações de equilíbrio de forças e tensões relacionadas a este corpo são:

$$\sigma_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.2)$$

$$\bar{t}_i = \sigma_{ji} \eta_j \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.2.3)$$

Elas expressam as transformações entre as forças descritas no sistema global e as tensões descritas no sistema local de coordenadas, incluindo a condição de simetria do tensor das tensões. A grandeza escalar ρ é a densidade de massa do meio e η_j são os co-senos diretores de um elemento de superfície

$d\Gamma$. A derivada no tempo é indicada por pontos, ou seja, $\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$.

As equações de compatibilidade entre deformações e deslocamentos são dadas por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.2.5)$$

Na equação (2.2.4) tem-se a expressão das transformações cinemáticas entre os deslocamentos descritos no sistema global e as deformações no sistema local de coordenadas. Na equação (2.2.5) tem-se a relação de compatibilidade entre os deslocamentos u_i no contorno Γ_u e os deslocamentos prescritos \bar{u}_i .

Por fim, as equações constitutivas que representam as relações entre as tensões e as deformações no corpo elástico são dadas por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.6)$$

C_{ijkl} é a matriz constitutiva do material, a qual, para um material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, se expressa na forma

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.2.7)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento e δ_{ij} é o delta de Kronecker, ou seja:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.2.8)$$

A substituição da equação (2.2.7) em (2.2.6) e a posterior substituição deste resultado em (2.2.1), considerando a equação (2.2.4) e a condição de simetria da matriz constitutiva, C_{ijkl} , fornece a equação conhecida como equação de Navier:

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,ki} - \rho\ddot{u}_i + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.9)$$

que pode ser expressa na forma

$$c_2^2 u_{i,kk} + (c_1^2 - c_2^2) u_{k,ki} - \ddot{u}_i + \frac{\bar{f}_i}{\rho} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.10)$$

As grandezas c_1 e c_2 são a velocidade de propagação de ondas irrotacionais e a velocidade de propagação de ondas de cisalhamento no meio elástico, dadas por

$$c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} \quad (2.2.11)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.2.12)$$

A consideração de que as velocidades e as acelerações são nulas nas equações acima leva à equação da elastostática, para a qual são obviamente válidas todas as transformações anteriores:

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,ki} + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.13)$$

2.3. Soluções Fundamentais

Nesta seção apresenta-se de maneira geral o conceito de soluções fundamentais, de forma a fornecer ao leitor não familiarizado com tal assunto condições de acompanhar o desenvolvimento da formulação do método híbrido de elementos finitos.

Soluções fundamentais são conjuntos de funções de interpolação de campo, em equilíbrio com o fluxo ou a tensão, para problemas de potencial ou elasticidade, respectivamente. Isto é, são funções que satisfazem as equações de equilíbrio do problema, independentemente das condições de contorno.

Os campos de tensões σ_{ij}^f e de deslocamentos u_i^f no domínio Ω , este último a menos de constantes de corpo rígido, podem ser pensados como uma superposição de uma solução particular σ_{ij}^p e uma solução homogênea σ_{ij}^* da equação da elastodinâmica,

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.1)$$

ou seja,

$$\sigma_{ij}^f = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p \quad (2.3.1)$$

$$u_i^f = u_i^* + u_i^p \quad (2.3.2)$$

em que

$$\sigma_{ij,j}^p - \rho \ddot{u}_i^p + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.3)$$

$$\sigma_{ij,j}^* - \rho \ddot{u}_i^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.4)$$

As funções σ_{ij}^* e u_i^* podem ser representadas em termos de parâmetros nodais de força p_m^* , na forma

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* \quad (2.3.5)$$

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (2.3.6)$$

o que, de acordo com a equação (2.3.4), significa que

$$\sigma_{ijm,j}^* - \rho \ddot{u}_{im}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.7)$$

Uma função σ_{ijm}^* que satisfaça a equação (2.3.7) é chamada de solução fundamental e é caracterizada pelo sobrescrito (*).

O campo de deslocamentos u_i^* correspondente ao campo de tensões σ_{ij}^* também pode ser representado em termos de parâmetros nodais de força p_m^* , a menos de constantes de corpo rígido, ou seja,

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* + u_{is}^r r_s \equiv (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) p_m^* \quad (2.3.8)$$

onde u_{im}^* é chamada de solução fundamental em termos de deslocamentos e u_{is}^r é um conjunto de funções arbitrárias de deslocamentos de corpo rígido (Chaves, 2003), que aparecem multiplicadas por parâmetros arbitrários r_s . No termo mais à direita da equação (2.3.8), tais parâmetros de corpo rígido são expressos em termo de parâmetros de força p_m^* , multiplicados por uma matriz de constantes arbitrárias C_{sm} (ver Chaves, 2003). No Apêndice B mostra-se como é feita a avaliação de deslocamentos em pontos do domínio para problemas estáticos considerando deslocamentos de corpo rígido.

As soluções fundamentais podem ser funções singulares ou não-singulares. Soluções fundamentais singulares, quando requeridas a satisfazer certas condições de contorno, são chamadas de funções de Green. Soluções fundamentais singulares gerais são também chamadas de funções de Green de campo livre. Já as soluções fundamentais não-singulares são chamadas de funções de Trefftz pelos pesquisadores que seguiram o trabalho pioneiro de Trefftz (1926).

Na hipótese da utilização de soluções fundamentais singulares para obtenção da solução homogênea da equação (2.2.1), as equações (2.3.4) e (2.3.7) assumem expressão ligeiramente diferente, ou seja,

$$\sigma_{ij,j}^* - \rho \ddot{u}_i^* = -\Delta p_i^* \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.9)$$

$$\sigma_{ijm,j}^* - \rho \ddot{u}_{im}^* = -\Delta_{im} \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.10)$$

em que Δ ou Δ_{im} é uma função singular (delta de Dirac) nula em todo o domínio exceto em uma região Ω_0 arbitrariamente pequena de Ω e que envolve o ponto de aplicação da força p_i^* . Porém as soluções fundamentais singulares não fazem parte do escopo deste trabalho e não mais serão mencionadas daqui para frente, e qualquer citação a soluções fundamentais dirá respeito unicamente as soluções fundamentais não-singulares. Mais detalhes sobre soluções fundamentais singulares podem ser obtidos em De Souza (1992), Chaves (1999) e Brebbia (1978).

2.4.O Princípio de Hamilton

Considere um corpo elástico, como na figura 2.1, no qual as deformações variam continuamente entre os instantes t_0 e t_1 . Os efeitos de tempo a ser considerados são aqueles devidos à inércia de um corpo elástico. Considere ainda que os deslocamentos virtuais δu_i aplicados sobre o corpo elástico variam com o tempo de tal modo que $\delta u_i = 0$ nos limites de integração t_0 e t_1 .

Seja u_i um campo de pequenos deslocamentos, função do tempo t , de tal modo que $\delta u_i = 0$ em Γ_u .

O princípio dos trabalhos virtuais aplicado a este corpo, levando-se em conta as forças dinâmicas, se expressa da seguinte forma, para um certo instante de tempo:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{f}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega \quad (2.4.1)$$

Para um corpo elástico, pode-se expressar

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta U_0 d\Omega = \delta U \quad (2.4.2)$$

como a variação da energia interna de deformação U . Além disso,

$$\int_{\Omega} \bar{f}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma = \delta W = -\delta V \quad (2.4.3)$$

representa a variação do potencial de trabalho W das forças externas.

A parcela $-\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega$ que aparece na equação (2.4.1) representa a variação de energia relacionada às forças dinâmicas, de acordo com o princípio de D'Alembert, que diz que um corpo de massa m desenvolve uma força, denominada de força de inércia proporcional à aceleração da massa e de sentido contrário.

A integração da expressão do princípio dos trabalhos virtuais, equação (2.4.1), no intervalo de tempo (t_0, t_1) , fornece

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega dt \quad (2.4.4)$$

Além disso, a segunda integral do lado direito da igualdade na equação (2.4.4) pode ser relacionada à variação da energia cinética K do corpo, através da seguinte integração por partes:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega dt = \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta u_i d\Omega \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i d\Omega dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i d\Omega dt \quad (2.4.5)$$

visto que $\int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta u_i d\Omega \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$ com base na hipótese de que os deslocamentos virtuais δu_i são nulos nos limites de integração no tempo (t_0, t_1). Portanto, a equação (2.4.4) pode ser escrita como:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt = 0 \quad (2.4.6)$$

onde:

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f}_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (2.4.7)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega \quad (2.4.8)$$

A equação (2.4.6) é conhecida como o princípio de Hamilton e diz que a integral $\int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt$ tem valor estacionário, em um sistema elástico submetido a um carregamento dinâmico conservativo.

2.5.O Potencial de Hellinger-Reissner Generalizado

O potencial de Hellinger-Reissner é um potencial mais geral do que aquele tradicionalmente utilizado no método convencional de elementos finitos, pois ele conta com dois campos, um de tensões σ_i^f no domínio Ω do elemento e outro de deslocamentos \tilde{u}_i no contorno Γ do elemento, diferentemente do potencial utilizado no método convencional, que conta apenas com um campo de deslocamentos, para o domínio e o contorno do elemento.

Com o intuito de se chegar a uma formulação híbrida de elementos finitos, a ser abordada na próxima seção, a equação (2.4.6) apresentada na seção anterior deve ter relaxada a condição de compatibilidade entre deformações e deslocamentos dada pela equação (2.2.4), de forma a se ter uma versão generalizada do princípio de Hamilton (Dumont e Oliveira, 1997).

Abaixo tem-se a equação (2.4.6) reescrita de forma mais conveniente:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f}_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{t}_i u_i d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega \right) dt = 0 \quad (2.4.6)$$

O princípio de Hamilton pode ser generalizado na forma:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}^f) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f}_i \tilde{u}_i d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{t}_i \tilde{u}_i d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i^f \dot{u}_i^f d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_{ij} \left(\varepsilon_{ij}^f - \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_i (u_i^f - \tilde{u}_i) d\Omega \right) dt = 0 \quad (2.5.1)$$

em que se tem um campo de tensões σ_{ij}^f , com conseqüentes deformações ε_{ij}^f e deslocamentos u_i^f , de tal maneira que as equações de equilíbrio dinâmico (2.2.1) e (2.2.2) sejam satisfeitas em Ω como premissa, e um campo de deslocamentos \tilde{u}_i que satisfaça a condição de compatibilidade (2.2.5) em Γ_u . Os multiplicadores de Lagrange λ_{ij} e λ_i são necessários para a inclusão adequada dos dois termos de energia advindos do relaxamento da equação de compatibilidade (2.2.4) assim como do fato de que se têm dois campos de deslocamentos distintos.

Pode-se reconhecer nos multiplicadores de Lagrange da equação (2.5.1) um sentido mecânico: a variável λ_{ij} corresponde a tensões no domínio Ω , enquanto λ_i se refere a forças dinâmicas que agem no domínio Ω do elemento. Além disso, observa-se que a imposição de estacionariedade do potencial da equação (2.5.1) estabelece que as variáveis presentes devem ser relacionadas entre si através das equações (2.2.1)-(2.2.6). Sendo as equações (2.2.1) e

(2.2.2) satisfeitas como premissa (para o campo de tensões no domínio dado como uma série de soluções fundamentais), pode-se atribuir a λ_{ij} o sentido físico mais estrito de tensões σ_{ij}^f , enquanto que λ_i assume sem erro o sentido estrito de forças dinâmicas $-\rho \ddot{u}_i^f$.

Por outro lado, sendo as deformações ε_{ij}^f funções das tensões σ_{ij}^f , deve-se expressar a densidade de energia de deformação U_0 (ver figura 2.2) em termos da densidade de energia de deformação complementar U_0^c , ou seja,

$$\int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}^f) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \varepsilon_{ij}^f d\Omega - \int_{\Omega} U_0^c(\sigma_{ij}^f) d\Omega \quad (2.5.2)$$

Para materiais linearmente elásticos, os valores dos termos $U_0^c(\sigma_{ij}^f)$ e $U_0(\varepsilon_{ij}^f)$ são iguais. A diferença existente consiste na forma conceitual como estas duas parcelas são descritas, conforme ilustra a figura 2.2.

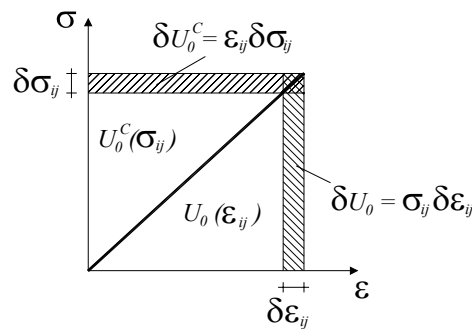


Figura 2.2: Gráfico da energia interna de deformação de um corpo elástico.

Aplicando-se o teorema de Green ao quinto termo de integração da equação (2.5.1), em que se escreve σ_{ij}^f em lugar de λ_{ij} , visto que são equivalentes como mencionado anteriormente, e levando em conta a simetria do tensor σ_{ij}^f , equação (2.2.2), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \left(\varepsilon_{ij}^f - \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \varepsilon_{ij}^f d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \tilde{u}_{i,j} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \varepsilon_{ij}^f d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^f \eta_j \tilde{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^f \tilde{u}_i d\Omega \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

onde η_j é o vetor dos co-senos diretores de um elemento de superfície $d\Gamma$, de acordo com a figura 2.1.

A substituição das equações (2.5.2) e (2.5.3) na equação (2.5.1), escrevendo-se $-\rho \ddot{u}_i^f$ em lugar de λ_i , fornece:

$$\begin{aligned}
-\delta\Pi_R = & \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[U_0^c + (\sigma_{ij}^f + \bar{f}_i)\tilde{u}_i\right]d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\bar{t}_i\tilde{u}_i d\Gamma dt - \\
& - \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma}\sigma_{ij}^f\eta_j\tilde{u}_i d\Gamma dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^f\dot{u}_i^f d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\ddot{u}_i^f(u_i^f - \tilde{u}_i)d\Omega dt = 0
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

que é a expressão mais geral do potencial de Hellinger-Reissner, apresentada de maneira adequada em sua forma estacionária. Nesta expressão têm-se apenas duas variáveis independentes entre si, que são o campo expresso em termos de tensões σ_{ij}^f e deslocamentos u_i^f no domínio Ω , aproximados por soluções fundamentais, e o campo de deslocamentos \tilde{u}_i , que necessitam ser descritos apenas no contorno Γ do corpo, por funções de interpolação como no método de elementos finitos tradicional. A integral de domínio do termo entre colchetes na equação (2.5.4) não será avaliada, pelo fato de U_0^c ser expresso em termos de soluções fundamentais, como se verá na próxima seção, além do fato de se fazer uma transformação da expressão de $\bar{f}_i\tilde{u}_i$, para levar sua integral do domínio para o contorno (não discutido nesta dissertação).

2.6. Formulação do Método Híbrido dos Elementos Finitos

O ponto de partida para a formulação do método híbrido dos elementos finitos é a condição de estacionariedade do Potencial de Hellinger-Reissner, eq. (2.5.4), reescrita abaixo por motivo de conveniência:

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[U_0^c + (\sigma_{ij,j}^f + \bar{f}_i)\tilde{u}_i\right]d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\bar{t}_i\tilde{u}_i d\Gamma dt - \\ & -\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma}\sigma_{ij}^f\eta_j\tilde{u}_i d\Gamma dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^f\dot{u}_i^f d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\ddot{u}_i^f(u_i^f - \tilde{u}_i)d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Nas próximas subseções são feitas transformações no potencial de Hellinger-Reissner de forma a se obter sua expressão matricial e alguns comentários acerca das propriedades físicas das matrizes obtidas.

2.6.1. Particularização da Condição de Estacionariedade do Potencial de Hellinger-Reissner para o Caso de Soluções Fundamentais Não-Singulares

Sobre a equação (2.5.4) faz-se a seguinte transformação, relacionada ao quarto termo de integração do lado direito da primeira igualdade:

$$\begin{aligned} \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\frac{\rho\dot{u}_i^f\dot{u}_i^f}{2}d\Omega dt &= \int_{\Omega}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\rho\delta\dot{u}_i^f{}^2}{2}dtd\Omega = \int_{\Omega}\rho\left(\left[\dot{u}_i^f\delta u_i^f\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\ddot{u}_i^f\delta u_i^f dt\right)d\Omega \\ &= -\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\ddot{u}_i^f\delta u_i^f d\Omega dt = -\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\ddot{u}_i^f u_i^f d\Omega dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\delta\ddot{u}_i^f u_i^f d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Tal transformação fornece a seguinte expressão para a condição de estacionariedade do potencial de Hellinger-Reissner,

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[U_0^c + (\sigma_{ij,j}^f + \bar{f}_i - \rho\ddot{u}_i^f)\tilde{u}_i\right]d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\bar{t}_i\tilde{u}_i d\Gamma dt - \\ & -\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\sigma_{ij}^f\eta_j\tilde{u}_i d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\delta\ddot{u}_i^f u_i^f d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

O desenvolvimento da variação (expressa pelos termos em δ) fornece:

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left(\delta U_0^c + \delta\sigma_{ij,j}^f\tilde{u}_i - \rho\delta\ddot{u}_i^f\tilde{u}_i\right)d\Omega dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij,j}^f + \bar{f}_i - \rho\ddot{u}_i^f\right)\delta\tilde{u}_i d\Omega dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\bar{t}_i\delta\tilde{u}_i d\Gamma dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma}\delta\sigma_{ij}^f\eta_j\tilde{u}_i d\Gamma dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma}\sigma_{ij}^f\eta_j\delta\tilde{u}_i d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\delta\ddot{u}_i^f u_i^f d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Porém, o termo relativo à energia de deformação complementar ainda pode ser desenvolvido da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \delta U_0^c d\Omega dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij}^f u_{i,j}^f d\Omega dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (\delta \sigma_{ij}^f u_i^f)_{,j} d\Omega dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij,j}^f u_i^f d\Omega dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \delta \sigma_{ij}^f \eta_j u_i^f d\Gamma dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij,j}^f u_i^f d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Sua substituição na equação (2.6.3) fornece a equação do potencial de Hellinger-Reissner em sua forma mais adequada à discretização numérica, qual seja:

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_R &= -\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (\delta \sigma_{ij}^f - \rho \delta \ddot{u}_i^f) (u_i^f - \tilde{u}_i) d\Omega dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \delta \sigma_{ij}^f \eta_j (u_i^f - \tilde{u}_i) d\Gamma dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j}^f + \bar{f}_i - \rho \ddot{u}_i^f) \delta \tilde{u}_i d\Omega dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^f \eta_j - \bar{t}_i) \delta \tilde{u}_i d\Gamma dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Entretanto, antes que se faça tal discretização, ainda é possível tornar a equação (2.6.5) mais simples e direta para a discretização numérica.

Tal simplificação se dá através da condição expressa pelas equações (2.3.3) e (2.3.4) que, para solução fundamental não-singular, torna nulos o primeiro e o terceiro termos de integração da equação (2.6.5), fornecendo:

$$-\delta \Pi_R = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \delta \sigma_{ij}^f \eta_j (u_i^f - \tilde{u}_i) d\Gamma dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^f \eta_j - \bar{t}_i) \delta \tilde{u}_i d\Gamma dt = 0 \quad (2.6.6)$$

que é a expressão mais adequada do potencial de Hellinger-Reissner para soluções fundamentais não-singulares.

2.6.2. Discretização da Condição de Estacionariedade do Potencial de Hellinger-Reissner para Soluções Não-Singulares

De acordo com a Seção 2.3, as tensões σ_{ij}^f e os deslocamentos u_i^f no domínio Ω são expressos como

$$\sigma_{ij}^f = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p \quad (2.3.1)$$

$$u_i^f = u_i^* + u_i^p \quad (2.3.2)$$

A substituição destas expressões, equações (2.3.1) e (2.3.2), na equação (2.6.6), fornece:

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_R &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\delta \sigma_{ij}^* + \delta \sigma_{ij}^p) \eta_j (u_i^* + u_i^p - \tilde{u}_i) d\Gamma dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} [(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \eta_j - \bar{t}_i] \delta \tilde{u}_i d\Gamma dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Deve-se aqui lembrar que o termo σ_{ij}^p que aparece na equação (2.3.1) é um termo constante e portanto sua variação $\delta \sigma_{ij}^p$ na equação acima é nula.

A discretização numérica da equação (2.6.7) é feita através das seguintes expressões para as tensões σ_{ij}^* e deslocamentos u_i^* no domínio Ω e os deslocamentos \tilde{u}_i no contorno Γ do elemento, respectivamente,

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* \quad (2.6.8)$$

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (2.6.9)$$

$$\tilde{u}_i = u_{im} d_m \quad (2.6.10)$$

onde p_m^* são parâmetros nodais de força, d_m são parâmetros nodais de deslocamento e u_{im} são funções de interpolação de deslocamentos iguais às utilizadas no método de elementos finitos convencional.

Utilizando-se por fim as expressões dadas pelas equações (2.6.8), (2.6.9) e (2.6.10), a equação (2.6.7) torna-se:

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \delta p_m^* \eta_j (u_{in}^* p_n^* + u_i^p - u_{in} d_n) d\Gamma dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} [(\sigma_{ijm}^* p_m^* + \sigma_{ij}^p) \eta_j - \bar{t}_i] u_{in} \delta d_n d\Gamma dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Então, a nova expressão para a forma estacionária do potencial de Hellinger-Reissner, escrita na forma matricial, passa a ser

$$-\delta\Pi_R = \int_{t_0}^{t_1} [\delta\mathbf{p}^{*T} (\mathbf{F}\mathbf{p}^* - \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{b}) - \delta\mathbf{d}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* + \mathbf{p}^b - \mathbf{p})] dt = 0 \quad (2.6.12)$$

em que as quantidades \mathbf{p}^* e \mathbf{d} são vetores contendo os parâmetros p_m^* e d_m , respectivamente – incógnitas primárias do problema. A matriz \mathbf{F} é a matriz de flexibilidade, simétrica por construção, como pode ser visto na equação (2.6.13) abaixo; \mathbf{H} é uma matriz de transformação cinemática, e \mathbf{b} um vetor de deslocamentos nodais equivalentes às forças de corpo, como mostram as equações (2.6.14) e (2.6.15), a seguir:

$$[\mathbf{F}] \equiv [F_{mn}] = \int_{\Gamma} u_{in}^* \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma \quad (2.6.13)$$

$$[\mathbf{H}^T] \equiv [H_{mn}] = \int_{\Gamma} u_{in} \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma \quad (2.6.14)$$

$$[\mathbf{b}^T] \equiv [b_m] = \int_{\Gamma} u_i^p \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma \quad (2.6.15)$$

As quantidades \mathbf{p}^b e \mathbf{p} que aparecem na equação (2.6.12) são vetores de forças nodais equivalentes relativos às forças de corpo \bar{f}_i e às forças de tração \bar{t}_i , respectivamente, e são definidas como

$$[\mathbf{p}^b] \equiv [p_m^b] = \int_{\Gamma} u_{im} \sigma_{ij}^p \eta_j d\Gamma \quad (2.6.16)$$

$$[\mathbf{p}] \equiv [p_m] = \int_{\Gamma} u_{im} \bar{t}_i d\Gamma \quad (2.6.17)$$

Quanto à matriz \mathbf{b} da equação (2.6.15), é possível escrever

$$\mathbf{b} = \int_{\Gamma} u_i^p \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{in} d_n^b \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma = \mathbf{H} \mathbf{d}^b \quad (2.6.18)$$

em que \mathbf{d}^b contém deslocamentos u_i^p medidos diretamente em pontos nodais do contorno.

Portanto, para um determinado instante de tempo e valores arbitrários de $\delta \mathbf{p}^*$ e $\delta \mathbf{d}$ a equação (2.6.12) decompõe-se em duas novas equações:

$$\mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.6.19)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.6.20)$$

Eliminando-se \mathbf{p}^* nestas equações, tem-se, finalmente,

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.6.21)$$

em que

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{K} \quad (2.6.22)$$

é uma matriz de rigidez positiva semidefinida, que transforma deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ em forças nodais em equilíbrio com o conjunto de forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ definidas no lado direito da equação (2.6.21).

A matriz \mathbf{H} , para o caso de soluções fundamentais não-singulares construídas para um conjunto polinomial completo, é em geral uma matriz retangular, visto que há mais parâmetros de força \mathbf{p}^* do que parâmetros de deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ na equação (2.6.19), isto é $\dim(\mathbf{p}^*) \geq \dim(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ (ver tabelas 3.1 e 3.2, no Capítulo 3), ao contrário do que ocorre no método híbrido de elementos de contorno, onde \mathbf{H} é sempre quadrada.

Para problemas no domínio do tempo com a utilização de soluções fundamentais não-singulares, a matriz \mathbf{F} é não-singular e sua inversa pode ser encontrada diretamente, como indica a equação (2.6.22). Já para problemas estáticos ou de regime permanente, a matriz \mathbf{F} é singular e sua inversa deve ser obtida através do procedimento apresentado no Apêndice A.

2.6.3. Propriedades Físicas Relacionadas às Matrizes \mathbf{H} , \mathbf{F} e \mathbf{K}

Tecer-se-ão aqui alguns comentários acerca das propriedades físicas relacionadas às matrizes \mathbf{H} , \mathbf{F} e \mathbf{K} , as quais dizem respeito às transformações sofridas pelos vetores de deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ e de forças nodais $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ que aparecem na equação (2.6.21).

No sistema externo ou global, os deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ descrevem um campo de deslocamentos compatível em todo o contorno Γ . A estes deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ correspondem as forças nodais $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ energeticamente equivalentes às solicitações externas que atuam no contorno. Os deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ podem assumir valores arbitrários, porém as forças equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ devem ser sempre auto-equilibradas.

No sistema interno ou local, a parcela estática das forças nodais \mathbf{p}^* define um campo de tensões no domínio Ω . A estas forças nodais \mathbf{p}^* correspondem deslocamentos nodais \mathbf{d}^* que podem ser definidos a partir do princípio dos trabalhos virtuais como,

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{F}\mathbf{p}^* \quad (2.6.23)$$

em termos da matriz de flexibilidade \mathbf{F} , previamente definida. Estes deslocamentos nodais equivalentes não existem fisicamente, de modo a serem diretamente mensuráveis, mas são grandezas mecanicamente equivalentes, em termos de trabalhos virtuais, ao campo de deslocamento correspondente às forças aplicadas.

A substituição da equação (2.6.23) na equação (2.6.19) permite concluir que \mathbf{H} é uma matriz de incidência cinemática, que relaciona os deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ do sistema externo com os deslocamentos nodais equivalentes \mathbf{d}^* do sistema interno de coordenadas:

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.6.24)$$

Da equação (2.6.20) advém que a matriz \mathbf{H}^T realiza uma transformação de equilíbrio entre forças nodais \mathbf{p}^* do sistema interno e as forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ do sistema externo de coordenadas, que equivale ao princípio da contragradência.

Já das equações (2.6.21) e (2.6.22), como mencionado acima e ressaltado novamente, tem-se que \mathbf{K} é uma matriz de rigidez, que realiza uma

transformação linear dos deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ em forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{K}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.6.25)$$

2.7. Análise Geral de Problemas Dependentes do Tempo no Domínio da Frequência

Nesta seção faz-se a análise de problema sem amortecimento. Uma abordagem generalizada para problemas com amortecimento viscoso é feita em Dumont (2005a).

2.7.1. Mudança do Domínio do Tempo para o Domínio da Frequência

Com o objetivo de se chegar a uma formulação no domínio da frequência a partir dos desenvolvimentos gerais feitos nos itens anteriores, supõe-se que as funções de tensões σ_{ij}^* , equação (2.6.8), e de deslocamentos u_i^* , equação (2.6.9), no domínio Ω , assim como as funções de deslocamentos \tilde{u}_i no contorno Γ , equação (2.6.10), podem ser expressas por uma separação de variáveis de espaço e de tempo, para uma dada frequência circular de vibração ω :

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^*(\omega) p_m^*(\omega) \tau(t, \omega) \quad \text{em } \Omega \quad (2.7.1)$$

$$u_i^* = u_{im}^*(\omega) p_m^*(\omega) \tau(t, \omega) \quad \text{em } \Omega \quad (2.7.2)$$

$$\tilde{u}_i = u_{im} d_m(\omega) \tau(t, \omega) \quad \text{em } \Gamma \quad (2.7.3)$$

Sendo $\tau(t, \omega)$ definido de tal maneira que,

$$\frac{\partial^2 \tau(t, \omega)}{\partial t^2} = -\omega^2 \tau(t, \omega) \quad (2.7.4)$$

De acordo com o que é exposto na Seção 2.3, as equações (2.7.1) e (2.7.2) são expressões de soluções fundamentais e portanto satisfazem a equação (2.3.7) para uma dada frequência circular ω , ou seja,

$$\sigma_{ij,j}^*(\omega) + \omega^2 \rho u_i^*(\omega) = 0 \quad (2.7.5)$$

Portanto, de acordo com as equações (2.7.1)-(2.7.3), as equações (2.6.19) e (2.6.20) ficam, para uma dada frequência circular ω ,

$$\mathbf{F}(\omega) \mathbf{p}^*(\omega) - \mathbf{H}(\omega) (\mathbf{d}(\omega) - \mathbf{d}^b(\omega)) = 0 \quad (2.7.6)$$

$$\mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{p}^*(\omega) - (\mathbf{p}(\omega) - \mathbf{p}^b(\omega)) = 0 \quad (2.7.7)$$

em que $\mathbf{p}^b(\omega)$, $\mathbf{p}(\omega)$ e $\mathbf{d}^b(\omega)$ são, de acordo com as equações (2.6.16), (2.6.17) e (2.6.18), os componentes harmônicos dos vetores gerais dependentes do tempo \mathbf{p}^b , \mathbf{p} e \mathbf{d}^b , respectivamente. As matrizes $\mathbf{H}(\omega)$ e $\mathbf{F}(\omega)$, nas equações (2.7.6) e (2.7.7), são matrizes não-singulares, e por isso a obtenção de \mathbf{K} , de acordo com a equação (2.6.22), é direta.

As soluções da equação (2.7.5) podem ser expressas adequadamente como

$$\sigma_{ijm}^*(\omega) \leftarrow \sigma_{ijm}^*(0) + \sigma_{ijm}^*(\omega) \quad (2.7.8)$$

$$u_{im}^*(\omega) \leftarrow u_{im}^*(0) + u_{im}^*(\omega) \quad (2.7.9)$$

em que $\sigma_{ijm}^*(0)$ e $u_{im}^*(0)$ correspondem à solução fundamental da parte estática do problema.

Como conseqüência de escrever as soluções fundamentais na forma das equações (2.7.8) e (2.7.9), as matrizes \mathbf{F} e \mathbf{H} , das equações (2.7.6) e (2.7.7), podem ser formalmente representadas como

$$\mathbf{F}(\omega) \leftarrow \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_\omega \quad (2.7.10)$$

$$\mathbf{H}(\omega) \leftarrow \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega \quad (2.7.11)$$

em que os termos \mathbf{F}_0 e \mathbf{H}_0 correspondem às matrizes da formulação estática.

2.7.2. Propriedades Espectrais das Matrizes \mathbf{H}_0 e \mathbf{F}_0

As matrizes \mathbf{F}_0 e \mathbf{H}_0 que aparecem nas equações (2.7.10) e (2.7.11) possuem certas propriedades espectrais que merecem alguns comentários.

Se os deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ corresponderem a movimento de corpo rígido, a parte independente do tempo do vetor de forças nodais equivalentes $(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0^b)$ deve ser nula, o que em termos de trabalhos virtuais significa que

$$\mathbf{W}^T (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0^b) = 0 \quad (2.7.12)$$

em que \mathbf{W} é uma matriz cujas colunas formam uma base ortonormal do espaço dos deslocamentos de corpo rígido, tal que

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (2.7.13)$$

onde, \mathbf{I} é a matriz identidade. A equação (2.7.13) implica

$$\mathbf{W} \mathbf{W}^T = \text{matriz idempotente única} \quad (2.7.14)$$

No caso de um domínio limitado, deslocamentos de corpo rígido, representados pela matriz ortogonal \mathbf{W} , não podem ser transformados em deslocamentos nodais equivalentes \mathbf{d}^* pela parte estática da matriz cinemática, \mathbf{H}_0 , conseqüência da condição de ortogonalidade de $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ ao espaço de deslocamentos de corpo rígido dada pela equação (2.7.12), ou seja,

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (2.7.15)$$

o que significa que há em geral uma matriz \mathbf{V} cujas colunas formam uma base ortogonal do espaço de forças \mathbf{p}^* que correspondem a forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ desequilibradas, referentes a deslocamentos de corpo rígido, ou seja,

$$\mathbf{H}_0^T \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (2.7.16)$$

de tal modo que

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (2.7.17)$$

De fato, a matriz \mathbf{V} é um conjunto de autovetores correspondentes aos autovalores nulos da matriz \mathbf{H}_0^T . Porém, a obtenção de \mathbf{V} através deste procedimento pode encontrar problemas de mau condicionamento. Uma solução para este problema é considerar que, se ambos os conjuntos de deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ e \mathbf{d}^* são fisicamente os mesmos graus de liberdade, então as bases \mathbf{V} e \mathbf{W} são linearmente dependentes. Como conseqüência, há uma base não-normalizada $\tilde{\mathbf{V}}$ cuja normalização produz a base ortonormal \mathbf{V} , que pode ser projetada em \mathbf{W} , na forma

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W} \quad (2.7.18)$$

Então, $\tilde{\mathbf{V}}$ pode ser obtida como solução do sistema

$$(\mathbf{H}^T + \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W} \quad (2.7.19)$$

Como a matriz $(\mathbf{H}^T + \mathbf{W}\mathbf{W}^T)$ é não singular por construção, $\tilde{\mathbf{V}}$ tem solução única na equação acima. Conseqüentemente, a normalização da matriz $\tilde{\mathbf{V}}$ leva à base \mathbf{V} que satisfaz a equação (2.7.16).

Em conseqüência da equação (2.7.16), e de acordo com a equação (2.6.23), conclui-se que

$$\mathbf{F}_0 \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (2.7.20)$$

o que, em outras palavras, significa que a matriz de flexibilidade \mathbf{F}_0 é singular, e o espaço nulo desta matriz é o mesmo da matriz \mathbf{H}_0^T .

As propriedades espectrais dadas pelas equações (2.7.15), (2.7.16) e (2.7.20) são importantes para a correta interpretação da inversa \mathbf{F}_0^{-1} necessária na expressão da matriz de rigidez, equação (2.6.22), no caso de problemas estáticos ou quase-harmônicos.

2.7.3. Desenvolvimento das Matrizes \mathbf{F} e \mathbf{H} em Séries de Frequência

Retornando, após o breve adendo sobre propriedades espectrais das matrizes \mathbf{F}_0 e \mathbf{H}_0 , ao problema de domínio da frequência, nota-se pelas equações (2.7.6) e (2.7.7), que as variáveis envolvidas no problema são funções de uma dada frequência ω . Porém, ao invés de se formular o problema para uma dada frequência, pode-se expressar as soluções fundamentais, equações (2.7.1) e (2.7.2), como uma série de potência de frequências:

$$\sigma_{jk}^* = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sigma_{ijks}^* p_s^* = \left(\sigma_{0jks}^* + \omega^2 \sigma_{1jks}^* + \omega^4 \sigma_{2jks}^* + \cdots + \omega^{2n} \sigma_{njks}^* \right) p_s^* \quad (2.7.21)$$

$$u_j^* = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} u_{ijs}^* p_s^* = \left(u_{0js}^* + \omega^2 u_{1js}^* + \omega^4 u_{2js}^* + \cdots + \omega^{2n} u_{njs}^* \right) p_s^* \quad (2.7.22)$$

Como conseqüência, as matrizes \mathbf{F} e \mathbf{H} , definidas nas equações (2.6.13) e (2.6.14), assim como \mathbf{K} , definida na equação (2.6.22), também se tornam séries de potência de frequências, truncadas com um número arbitrário n de termos:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{F}_i \quad (2.7.23)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{H}_i \quad (2.7.24)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n \omega^{2i} \mathbf{M}_i \quad (2.7.25)$$

onde $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_0$, para $i = 0$, é a matriz de rigidez estática da formulação de elementos discretos e $\mathbf{K}_i = -\mathbf{M}_i$, para $i > 0$, são matrizes aqui denominadas matrizes de massa generalizadas \mathbf{M}_i (Dumont e Oliveira, 2001), que constituem na verdade uma mistura de matrizes de massa e rigidez. A única exceção é a matriz \mathbf{M}_1 , que corresponde à matriz de massa obtida na formulação convencional, a qual é truncada depois de ω^2 .

A obtenção da matriz \mathbf{K} como uma série de potência de frequência passa pela inversão da matriz \mathbf{F} dada também como uma série de potência de frequência, conforme a equação (2.7.23). Na Seção 2.10 é mostrado como é feita tal inversão para o caso particular de matrizes simétricas positivas semi-definidas (Dumont e Oliveira, 2001). Para casos gerais de inversão de matrizes em série de potência ver (Dumont, 2005).

Compondo-se o vetor dependente do tempo, $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$, de deslocamentos nodais, o qual se deseja encontrar, como a série truncada de m termos

$$\mathbf{d} - \mathbf{d}^b \equiv \mathbf{d}(t) - \mathbf{d}^b(t) = \sum_{j=1}^m (d_j - d_j^b) \tau(t, \omega_j) \quad (2.7.26)$$

torna-se possível modelar o comportamento de estruturas sem amortecimento, de acordo com a equação (2.6.25), como:

$$\sum_{j=1}^m \left(\mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n \omega_j^{2i} \mathbf{M}_i \right) (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_j^b) \tau(t, \omega_j) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (2.7.27)$$

que para valores de n igual a 3, por exemplo, resulta em,

$$\sum_{j=1}^m \left(\mathbf{K}_0 - \omega_j^2 \mathbf{M}_1 - \omega_j^4 \mathbf{M}_2 - \omega_j^6 \mathbf{M}_3 \right) (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_j^b) \tau(t, \omega_j) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (2.7.27a)$$

Para elementos de treliça e viga sem amortecimento, Przemieniecki (1968) escreveu a matriz de rigidez efetiva \mathbf{K} da equação (2.7.25) na forma

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 - \omega^4 (\mathbf{M}_2 - \mathbf{K}_2) - \omega^6 (\mathbf{M}_3 - \mathbf{K}_3) + O(\omega^8) \quad (2.7.28)$$

mas alguns autores Voss (1987) também obtiveram

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 (\mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_1) - \omega^4 (\mathbf{M}_2 - \mathbf{K}_2) - \omega^6 (\mathbf{M}_3 - \mathbf{K}_3) + O(\omega^8) \quad (2.7.29)$$

com uma matriz coeficiente \mathbf{K}_2 multiplicando ω^2 , o que não está correto, já que este termo é nulo em qualquer formulação consistente de elementos finitos, o que está coerente com os desenvolvimentos dos livros clássicos sobre dinâmica que mantém os termos até ω^2 : $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 + O(\omega^4)$.

Na equação (2.7.27) os vetores de deslocamentos $(\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_j^b)$ são as incógnitas do problema, a serem determinadas para as forças de domínio e contorno, além de velocidades e deslocamentos nodais iniciais. O número n de matrizes relacionadas à frequência é arbitrário.

A vantagem de tal formulação baseada em série de frequências é que ela proporciona uma melhor satisfação da equação diferencial de equilíbrio dinâmico de tensões, equação (2.2.1), em pontos internos do corpo elástico (Dumont e Oliveira, 1997), o que, para uma mesma discretização do domínio da estrutura, comparada ao método de elementos finitos convencional, fornece resultados com maior precisão numérica.

De acordo com a definição de $\tau(t, \omega)$ na equação (2.7.4), a equação (2.7.27) pode ser escrita alternativamente como,

$$\left(\mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (2.7.30)$$

a qual é um sistema acoplado de equações diferenciais de alta ordem de tempo que faz uso de matrizes obtidas na formulação de frequência.

2.8. Solução para o Problema de Autovalor Não-linear

O problema de autovalores não-linear relacionado à equação (2.7.30) tem a forma

$$\mathbf{K}_0 \Phi - \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i \Phi \Omega^{2i} = \mathbf{0} \quad (2.8.1)$$

onde Ω^2 é uma matriz diagonal com tantos autovalores ω^2 quanto o número de graus de liberdade da estrutura e Φ é uma matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes. Este problema de autovalor não-linear é de difícil tratamento, visto que a convergência numérica não pode ser facilmente assegurada e que erros de arredondamento ocorrem inevitavelmente.

Uma maneira de se tratar este problema adequadamente consiste em transformar a equação (2.8.1) em um problema de autovalor linear, através da utilização de matrizes aumentadas, com o custo de se ter aumentado de n vezes o número de incógnitas do problema.

Assim sendo, o problema de autovalor linear aumentado, relacionado à equação (2.7.30) e correspondente à equação (2.8.1), é

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \cdots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \cdots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \cdots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \cdots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_1^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Omega_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.8.2)$$

em que

$$\Phi_{00} \equiv \Phi, \quad \Omega_0^2 \equiv \Omega^2 \quad \text{e} \quad \Phi_{ij} = \Phi_{0j} \Omega_j^{2i} \quad i=1, \dots, n-1, \quad j=0, \dots, n-1. \quad (2.8.3)$$

Os autovalores e autovetores aumentados que aparecem nas equações (2.8.2) e (2.8.3) são em geral complexos. Entretanto, apenas o cálculo dos subconjuntos reais Ω e Φ é requerido em uma aplicação prática.

Sendo o problema de autovalor aumentado expresso pela equação (2.8.2) linear em Ω_j^2 , os autovetores correspondentes constituem uma base ortogonal, embora ainda não ortonormal. O critério de normalização para estes autovetores é, classicamente,

$$\begin{bmatrix} \Phi_{00}^T & \Phi_{10}^T & \cdots & \Phi_{n-1,0}^T \\ \Phi_{01}^T & \Phi_{11}^T & \cdots & \Phi_{n-1,1}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{0,n-1}^T & \Phi_{1,n-1}^T & \cdots & \Phi_{n-1,n-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \cdots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \cdots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.8.4)$$

A avaliação da submatriz (0,0) do sistema acima, tendo em conta a equação (2.8.3), permite que se perceba que $\Phi_{00} \equiv \Phi$ será uma base ortonormal apenas se

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \Omega^{2j-2i} \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2i-2} = \mathbf{I} \quad (2.8.5)$$

A expressão acima, para n igual a 3, vale

$$\begin{aligned} & \Phi^T \mathbf{M}_1 \Phi + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi + \Omega^4 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi + \\ & \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi \Omega^2 + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^2 + \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^4 = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.8.5a)$$

ou, para um par de autovalor ω_j^2 e autovetor Φ_j ,

$$\Phi_j^T (\mathbf{M}_1 + 2\omega_j^2 \mathbf{M}_2 + 3\omega_j^4 \mathbf{M}_3) \Phi_j = 1 \quad (2.8.5b)$$

Portanto, deve-se apenas trabalhar com Φ de forma que a equação (2.8.5) seja atendida. Os autovetores $\Phi_{00} \equiv \Phi$, quando obtidos através da equação (2.8.2), ainda não estão normalizados de forma a atender à equação (2.8.5). Para isso relaciona-se o autovetor não normalizado, $\tilde{\Phi}$, com o normalizado por meio de uma matriz diagonal Λ ,

$$\Phi = \tilde{\Phi} \Lambda \quad (2.8.6)$$

que pode ser encontrada através da substituição da equação (2.8.6) em (2.8.5), resultando

$$\Lambda = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \Omega^{2j-2i} \tilde{\Phi}^T \mathbf{M}_j \tilde{\Phi} \Omega^{2i-2} \right)^{-1/2} \quad (2.8.7)$$

A expressão acima, para $n = 3$ e um par de autovalor ω_j^2 e autovetor Φ_j , vale

$$\lambda = \left(\tilde{\Phi}_j^T (\mathbf{M}_1 + 2\omega_j^2 \mathbf{M}_2 + 3\omega_j^4 \mathbf{M}_3) \tilde{\Phi}_j \right)^{-1/2} \quad (2.8.7a)$$

Além disso, pode-se expressar que, desde que a equação (2.8.4) assegure a normalização dos vetores, então, da equação (2.8.2),

$$\begin{pmatrix} \Phi_{00}^T & \Phi_{10}^T & \cdots & \Phi_{n-1,0}^T \\ \Phi_{01}^T & \Phi_{11}^T & \cdots & \Phi_{n-1,1}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{0,n-1}^T & \Phi_{1,n-1}^T & \cdots & \Phi_{n-1,n-1}^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.8.8)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \cdots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \cdots & \Phi_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_0^2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_1^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Omega_{n-1}^2 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista a equação (2.8.3), pode-se calcular a submatriz (0,0) do sistema acima, a qual, juntamente com a equação (2.8.5), constrói a partir da equação (2.8.2) a expressão

$$\left(\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \Omega^{2i} \Phi^T \mathbf{M}_{j+i} \Phi \Omega^{2j} \right) - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \Omega^{2j} \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2i-2} \right) \Omega^2 = 0 \quad (2.8.8)$$

ou, como consequência de os autovetores Φ serem ortonormais,

$$\left(\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \Omega^{2i} \Phi^T \mathbf{M}_{j+i} \Phi \Omega^{2j} \right) = \Omega^2 \quad (2.8.9)$$

A expressão da equação acima, para n igual a 3, vale

$$\left(\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi \Omega^2 + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^4 + \Omega^4 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^2 \right) = \Omega^2 \quad (2.8.9a)$$

ou, para um par de autovalor ω_j^2 e autovetor Φ_j ,

$$\Phi_j^T (\mathbf{K}_0 + \omega_j^4 \mathbf{M}_2 + 2\omega_j^6 \mathbf{M}_3) \Phi_j = \omega_j^2 \quad (2.8.9b)$$

2.9. Uso de um Processo de Superposição Modal

2.9.1. Processo de Superposição Modal

Apesar de toda a complexidade envolvida na solução da equação (2.7.30), reescrita abaixo,

$$\left(\mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (2.7.30)$$

é possível utilizar-se de um processo de superposição modal na solução deste sistema de equações diferenciais parciais de alta ordem.

Independentemente da suposição feita sobre a forma do vetor de deslocamentos dependentes do tempo $(\mathbf{d}(t) - \mathbf{d}^b(t))$, pode-se introduzir um conjunto de deslocamentos auxiliares $\mathbf{d}_{(i)}(t)$, em que o subscrito entre parênteses indica que eles constituem um conjunto, tal que

$$\mathbf{d}_{(i)} = (-1)^i \frac{\partial^{2i}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)}{\partial t^{2i}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9.1)$$

Portanto, de acordo com a equação (2.9.1), a equação (2.7.30) pode ser reescrita como um sistema aumentado,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_{(1)} \\ \mathbf{d}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(n-1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \ddots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\mathbf{d}}^b \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(1)} \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(2)} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(n-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.9.2)$$

em que os dois pontos sobre os elementos do vetor que multiplica a segunda matriz aumentada representa a segunda derivada em relação ao tempo.

Então, partindo-se da equação (2.9.1), pode-se aproximar os deslocamentos dependentes do tempo $(\mathbf{d}(t) - \mathbf{d}^b(t))$ e $\mathbf{d}_{(i)}(t)$ como uma soma finita de contribuições dos vetores aumentados (normalizados) Φ_{i0} , introduzidos como a primeira coluna da matriz de autovetores aumentados na equação (2.9.2), multiplicados por um conjunto de vetores de amplitudes $\eta_j \equiv \eta_j(t)$, os quais serão as novas incógnitas do problema:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(n-1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \Omega^2 \\ \vdots \\ \Phi \Omega^{2n-2} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) \quad (2.9.3)$$

De acordo com a equação (2.9.3), a equação (2.9.2) se torna

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \Omega^2 \\ \vdots \\ \Phi \Omega^{2n-2} \end{bmatrix} (\eta - \eta^b)_+ \quad (2.9.4)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \Omega^2 \\ \vdots \\ \Phi \Omega^{2n-2} \end{bmatrix} (\ddot{\eta} - \ddot{\eta}^b) = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Finalmente, pré-multiplicando-se esta equação por $\Phi_{i_0}^T$, levando-se em conta a equação (2.9.3) e considerando que os autovetores são normalizados de acordo com a equação (2.9.4), tal que a equação (2.8.8) seja satisfeita, chega-se a uma expressão muito simples para a submatriz (0,0) do sistema aumentado de equações:

$$\Omega^2 (\eta - \eta^b)_+ \ddot{\eta} - \ddot{\eta}^b = \Phi^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (2.9.5)$$

que equivale à equação (2.7.30). Porém, a equação (2.9.5) é um sistema desacoplado de equações diferenciais parciais de segunda ordem, com tantas equações diferenciais quanto o número de autovetores de interesse a serem considerados e que pode ser facilmente integrada por meio de métodos de integração padrões.

Esta equação é equivalente a

$$\Omega^2 \eta + \ddot{\eta} = \Phi^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) + \Phi^T \left(\mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) \mathbf{d}^b \quad (2.9.6)$$

A expressão da equação (2.9.5), para problemas que não consideram as forças de domínio, é

$$\Omega^2 \eta + \ddot{\eta} = \Phi^T \mathbf{p} \quad (2.9.7)$$

A expressão equivalente à equação (2.9.5) para problemas de potencial é

$$\Omega^2 (\eta - \eta^b)_+ \dot{\eta} - \dot{\eta}^b = \Phi^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (2.9.8)$$

um sistema desacoplado de equações diferenciais parciais de primeira ordem, análogo ao sistema da equação (2.9.5).

2.9.2. Consideração de Velocidades e Deslocamentos Iniciais

Para condições iniciais não-homogêneas, é necessário expressar $\boldsymbol{\eta}(t = t_0)$ e $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t = t_0)$ como funções dos deslocamentos $\mathbf{d}(t = t_0)$ e velocidades $\dot{\mathbf{d}}(t = t_0)$ nodais iniciais. Com esse intuito, tem-se que solucionar o sistema geralmente retangular da equação (2.9.3) em termos das incógnitas $(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b)$. O desenvolvimento a seguir está em (Dumont e Oliveira, 2001).

Pré-multiplicando-se ambos os lados da equação (2.9.3) pela matriz de rigidez aumentada da equação (2.9.2) e, subseqüentemente, pré-multiplicando-se a equação resultante por $\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^T$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T & \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\Phi}^T & \dots & \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \boldsymbol{\Phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_{(1)} \\ \mathbf{d}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(n-1)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}^2 (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) \quad (2.9.9)$$

já que os autovalores satisfazem a equação (2.8.9).

Desprezando-se os efeitos de forças de corpo, por motivo de conveniência, porém sem perda de generalidade, ler-se-á na equação acima o vetor de deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ como \mathbf{d} e o vetor de amplitudes $(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b)$ como $\boldsymbol{\eta}$.

Então, em continuação fazem-se os produtos matriciais, considerando a equação (2.9.1), obtendo-se,

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Omega}^{-2} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{\Omega}^{2i-2} \boldsymbol{\Phi}^T \sum_{j=1}^{n-i} (-1)^j \mathbf{M}_{j+i} \frac{\partial^{2j} \mathbf{d}}{\partial t^{2j}} \quad (2.9.10)$$

Entretanto, esta equação só é aplicável se \mathbf{d} e todas as suas $2n-1$ derivadas forem conhecidas no início do intervalo. Como em geral apenas os deslocamentos e as velocidades são conhecidas, deve-se obter uma solução alternativa.

Substituindo-se os valores de $\mathbf{d}_{(i)}(t)$, para $i > 0$, na equação (2.9.9), por suas expressões dadas pela equação (2.9.3), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T & \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\Phi}^T & \dots & \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \boldsymbol{\Phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta} \quad (2.9.11)$$

Então, executando todas as operações matriciais indicadas pela equação (2.9.11), resulta que

$$[\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi] \boldsymbol{\eta} = \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} \quad (2.9.12)$$

já que, de acordo com a equação (2.8.9), as séries de produtos de matrizes multiplicando $\boldsymbol{\eta}$ simplificam para o termo em colchetes. Por fim, pode-se concluir sem suposições a mais que, se a equação (2.9.3) é válida, então

$$\boldsymbol{\eta} = [\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} \quad (2.9.13)$$

também é válida e, conseqüentemente,

$$\boldsymbol{\eta}(t = t_0) = [\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d}(t = t_0) \quad (2.9.14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t = t_0) = [\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \dot{\mathbf{d}}(t = t_0) \quad (2.9.15)$$

que são as relações desejadas para expressar as condições iniciais nodais de um problema transiente, para Φ e Ω relacionados aos modos e freqüências de deformação elástica pura, respectivamente. Por outro lado, para os modos Φ_{rig} e freqüências $\Omega_{rig} \equiv 0$ relacionados aos deslocamentos de corpo rígido, tem-se:

$$\boldsymbol{\eta}_{rig} = \Phi_{rig}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{d} \quad (2.9.16)$$

O conjunto de equações diferenciais de tempo de segunda ordem desacoplado, equação (2.9.5), junto com as equações (2.9.13) e (2.9.16) para a consideração de deslocamentos iniciais, é a transformação da equação (2.7.30) para a solução de uma ampla gama de problemas dependentes do tempo por meio de uma superposição nodal e com base na formulação em freqüência.

Note que se poderia ter escrito a seguinte seqüência de equações:

$$\mathbf{d} = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (2.9.17)$$

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{d} = \mathbf{K}_0 \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (2.9.18)$$

$$\Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} = \Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (2.9.19)$$

chegando assim à equação (2.9.13) por meio de um processo muito simples. Entretanto, pré-multiplicar a segunda das equações acima pela matriz Φ^T , a qual pode em geral ser retangular (se apenas alguns modos de deformação são de interesse), requer uma justificativa, a qual apenas ocorre no contexto do procedimento que terminou de ser traçado: o uso das propriedades ortogonais expressas pela equação (2.8.9). Além disso, note que a inversão do produto de matrizes simétrico indicado na equação (2.9.13) é inevitável no contexto dessa formulação não-linear dependente da freqüência.

2.9.3. Consideração de Deslocamentos Nodais Forçados

Quando parte dos deslocamentos nodais são funções de tempo conhecidas, procede-se exatamente como na análise dinâmica convencional (Przemieniecki, 1968) e (Chaves, 2003), reescrevendo-se a equação (2.7.30) em termos de submatrizes,

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^{pp} & \mathbf{K}_0^{pf} \\ \mathbf{K}_0^{fp} & \mathbf{K}_0^{ff} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^n (-1)^i \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i^{pp} & \mathbf{M}_i^{pf} \\ \mathbf{M}_i^{fp} & \mathbf{M}_i^{ff} \end{bmatrix} \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) \begin{Bmatrix} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^p \\ (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)^p \\ (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)^f \end{Bmatrix} \quad (2.9.20)$$

em que os subscritos p e f referem-se a subconjuntos de deslocamentos nodais prescritos e livres, respectivamente. O segundo conjunto de submatrizes da equação acima pode ser dado explicitamente como:

$$\left(\mathbf{K}_0^{ff} - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i^{ff} \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^f = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)^f - \left(\mathbf{K}_0^{fp} - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i^{fp} \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^p \quad (2.9.21)$$

Desde que todas as quantidades do lado direito da equação (2.9.21) são funções de tempo conhecidas, esta equação é formalmente equivalente à equação (2.7.30), para o propósito do processo de superposição modal usado para se chegar à equação (2.9.5). Uma vez que os deslocamentos \mathbf{d}^f são obtidos, depois da transformação da equação (2.9.21) em um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem desacoplado, as forças de reação dependentes do tempo relacionadas aos nós prescritos podem ser calculadas usando-se o primeiro conjunto da equação (2.9.20) de submatrizes. Uma palavra de cautela é necessária no que concerne à implementação numérica da equação (2.9.21) (Chaves, 2003), já que as altas ordens de derivação no lado direito da equação (2.9.21) podem conduzir a resultados não confiáveis se $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^p$ não é uma expressão fechada de tempo, mas ao invés, uma aproximação em série.

2.9.4. Avaliação dos Resultados em Pontos Internos

Em formulações harmônicas, os parâmetros de força $\mathbf{p}^*(\omega)$ são obtidos, conforme a equação (2.7.6), por,

$$\mathbf{p}^*(\omega) = \mathbf{S}(\omega)(\mathbf{d}(\omega) - \mathbf{d}^b(\omega)) \quad (2.9.22)$$

onde $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{F}^{-1}(\omega)\mathbf{H}(\omega)$. Para as séries de potências de frequências introduzidas na subseção 2.7.3, de acordo com as equações (2.7.21)-(2.7.25), a equação acima é trocada por,

$$\mathbf{p}^*(\omega) \approx \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{S}_i (\mathbf{d}(\omega) - \mathbf{d}^b(\omega)) \quad (2.9.23)$$

com

$$\sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{S}_i = \left(\sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{F}_i \right)^{-1} \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{H}_i \quad (2.9.24)$$

De acordo com a equação (2.7.22), os deslocamentos em pontos internos podem ser expressos como,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \omega_j^{2i} u_i^* \mathbf{p}^* \equiv \sum_{i=0}^n u_i^* \boldsymbol{\Omega}^{2i} \mathbf{p}^* \quad (2.9.25)$$

Em que, substituindo-se \mathbf{p}^* por sua expressão dada pela equação (2.9.23) e considerando-se a expressão de $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ dada pela equação (2.9.3), tem-se:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \mathbf{u}_j^* \mathbf{S}_{i-j} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^{2i} (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) \quad (2.9.26)$$

que para $n = 3$, fornece:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & \left[\mathbf{u}_0^* \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\Phi} + (\mathbf{u}_0^* \mathbf{S}_1 + \mathbf{u}_1^* \mathbf{S}_0) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 + (\mathbf{u}_0^* \mathbf{S}_2 + \mathbf{u}_1^* \mathbf{S}_1 + \mathbf{u}_2^* \mathbf{S}_0) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^4 + \right. \\ & \left. + (\mathbf{u}_0^* \mathbf{S}_3 + \mathbf{u}_1^* \mathbf{S}_2 + \mathbf{u}_2^* \mathbf{S}_1 + \mathbf{u}_3^* \mathbf{S}_0) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^6 \right] \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (2.9.26a)$$

Para a avaliação adequada da expressão acima, para o caso particular de problemas estáticos ou de regime permanente (para os quais se deve considerar a parcela relativa a deslocamentos de corpo rígido, que aparece na equação (2.3.8)), o leitor encontrará mais detalhes no Apêndice B.

Particularmente no que concerne à inversão de matrizes em série de frequência, o leitor terá mais detalhes, de forma completamente geral, em Dumont (2005). No item a seguir é feita uma particularização do problema de inversão de matrizes em séries de frequência para os casos de matrizes simétricas, positivas semidefinidas.

2.10. Obtenção da Matriz de Rigidez como uma Série de Freqüências

O caminho para se obter a matriz de rigidez \mathbf{K} como uma série de potência de freqüência (Dumont e Oliveira, 2001), de acordo com a equação (2.7.25), passa pela inversão da matriz de flexibilidade \mathbf{F} , como indicado na equação (2.6.22). Esta inversão pode se dar de duas formas, conforme a natureza dos limites do domínio, que podem ser: domínio infinito e domínio finito.

No caso de domínio infinito, a matriz \mathbf{F}_0 correspondente à parte estática da formulação em freqüência, como indicado na equação (2.7.10), é não-singular tornando assim o processo de obtenção da inversa de \mathbf{F} simples e direto, como é mostrado abaixo.

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{X}_i \quad (2.10.1)$$

em que

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{F}_0^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_i = -\mathbf{X}_0 \sum_{j=1}^i \mathbf{F}_i \mathbf{X}_{i-j}, \quad i = 1 \dots n \quad (2.10.2)$$

é a inversa de \mathbf{F} , tal que

$$\mathbf{X}\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{X} = \mathbf{I} + O(\omega^{2n+2}) \quad (2.10.3)$$

(As equações (2.10.1)-(2.10.3) aplicam-se de maneira análoga para a inversão de uma matriz de rigidez dependente da freqüência).

Já para domínios finitos, a matriz \mathbf{F}_0 é singular, como indicado pela equação (2.7.20), e por isso o cálculo da matriz inversa de \mathbf{F} que satisfaça a equação (2.10.3) deixa de ser feito da forma simples e direta como anteriormente e requer o uso avançado da teoria de matrizes inversas generalizadas (Ben-Israel e Greville, 1980; Zielke, 1970; Schulz, 1933, Dumont, 2005).

O processo de inversão de \mathbf{F} para o caso de domínios finitos se dá da seguinte forma: a matriz \mathbf{X} , da equação (2.10.1), passa a ser expressa como,

$$\mathbf{X} = \sum_{i=-1}^n \omega^{2i} \mathbf{X}_i \quad (2.10.4)$$

onde se percebe o aparecimento de um termo adicional, $\omega^{-2} \mathbf{X}_{-1}$, em que

$$\mathbf{X}_{-1} = \mathbf{V} \left(\mathbf{V}^T \mathbf{F}_1 \mathbf{V} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \quad (2.10.5)$$

A matriz \mathbf{F}_1 que aparece na equação acima é não-singular, visto que ela é fisicamente relacionada à primeira matriz de massa do corpo elástico, mas poderia ser singular (Dumont, 2005). Introduzindo-se uma matriz auxiliar \mathbf{Y}

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) \quad (2.10.6)$$

pode-se demonstrar que a matriz coeficiente \mathbf{X}_0 da equação (2.10.4) é expressa como

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{Y}(\mathbf{Y}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{Y} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{Y}^T - \mathbf{X}_{-1} \mathbf{F}_2 \mathbf{X}_{-1} \quad (2.10.7)$$

Quanto aos termos restantes, eles podem ser obtidos de maneira recorrente:

$$\mathbf{X}_i = -\mathbf{X}_0 \sum_{j=1}^{i+1} \mathbf{F}_j \mathbf{X}_{i-j} - \mathbf{X}_{-1} \sum_{j=1}^{i+1} \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{X}_{i-j}, \quad i = 1 \dots n \quad (2.10.8)$$

Embora haja uma potência negativa da frequência na equação (2.10.4), o produto matricial

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sum_{j=-1}^i \mathbf{X}_j \mathbf{H}_{i-j} \equiv \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{S}_i \quad (2.10.9)$$

requerido em ambas as expressões de \mathbf{p}^* na equação (2.6.12), como uma função de \mathbf{d} , e como um passo intermediário no cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} , não contém o termo $\omega^{-2} \mathbf{X}_{-1}$, já que

$$\mathbf{H}_0^T \mathbf{X}_{-1} = \mathbf{0} \quad (2.10.10)$$

de acordo com as equações (2.7.16) e (2.10.5).

Portanto, finalmente, pode-se expressar a matriz de rigidez \mathbf{K} como a série de potência,

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sum_{j=0}^i \mathbf{H}_j^T \mathbf{S}_j \quad (2.10.11)$$

ou, conforme a equação (2.7.25),

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sum_{j=0}^i \mathbf{H}_j^T \mathbf{S}_j = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n \omega^{2i} \mathbf{M}_i \quad (2.10.12)$$

onde $\mathbf{K}_i = -\mathbf{M}_i$ para $i > 0$.

O processo de obtenção da inversa da matriz \mathbf{F}_0 para o cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K}_0 para o caso particular de problemas de elastostática é dado diretamente pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T [\mathbf{F} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H} \quad (2.10.13)$$

O Apêndice A no final deste trabalho mostra como é obtida a expressão dada pela equação (2.10.13). Uma apresentação geral do processo de inversão de matrizes em série de potência é feita em Dumont (2005).