

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1. Colocação do Problema

Na engenharia, assim como em outras áreas do conhecimento, muitas vezes é necessário dividir um problema grande em problemas menores, de tal forma que a solução somada de cada um dos problemas menores leva à solução do problema maior como um todo.

Essa forma de pensar, aliada ao avanço dos computadores, levou ao desenvolvimento do mundialmente difundido método dos elementos finitos, que consiste, de forma simplificada, em se dividir o domínio do problema em subdomínios ou sub-regiões de geometria simples, conforme é mostrado na figura abaixo.

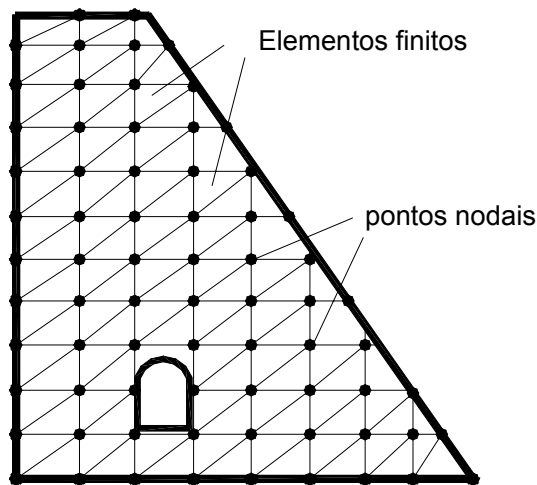


Figura 1.1: Malha de elementos finitos - problema plano.

O método dos elementos finitos é um método numérico aproximado para a solução de problemas de meios contínuos, descritos por meio de equações diferenciais, para determinadas condições de contorno e condições iniciais, pela subdivisão do domínio em subdomínios. Falar de elementos finitos é falar de uma forma bastante genérica, já que existem vários métodos de elementos finitos, dentre os quais, o método da rigidez direta ou método dos deslocamentos é o mais difundido.

Já em 1969, Theodore H. H. Pian e Pin Tong escreveram um artigo que formulava vários métodos de elementos finitos baseados em diversos princípios variacionais. Neste mesmo artigo eles classificaram os vários métodos de elementos finitos em quatro categorias principais, quais sejam: métodos de compatibilidade, métodos de equilíbrio, métodos híbridos e métodos mistos.

Mais recentemente, em contrapartida ao método dos elementos finitos que, como já foi dito, consiste basicamente em se discretizar o domínio, surgiu o método dos elementos de contorno, que grosso modo consiste em um método de discretização do contorno do problema e serve basicamente para solução das mesmas equações diferenciais de que trata o método dos elementos finitos.

O método dos elementos de contorno trouxe junto consigo a vantagem de tratar integrais apenas de contorno e a facilidade de representar as mais variadas formas. Porém, diferentemente do método dos elementos finitos, o método dos elementos de contorno tradicional não tem uma base variacional.

Foi então, com o intuito de se dar um embasamento variacional ao método dos elementos de contorno que, em 1987, Dumont, baseado nos trabalhos desenvolvidos por Reissner e Pian, formulou o método híbrido dos elementos de contorno.

Junto com o método híbrido dos elementos de contorno, Dumont e seus colaboradores desenvolveram várias ferramentas matemáticas, que possibilitaram o desenvolvimento do método híbrido dos elementos finitos na forma como é apresentado neste trabalho. Dentre tais ferramentas, é válido citar o procedimento completamente geral para a obtenção de matrizes inversas generalizadas (Dumont e Oliveira, 2001; Dumont, 2005) obtidas como uma série de potência a partir de matrizes  $\Lambda$  generalizadas e o procedimento avançado de superposição modal (Dumont e Oliveira, 2001).

No que se segue no decorrer do desenvolvimento deste trabalho, serão apresentados conceitos e formulações que servem tanto para o método híbrido dos elementos finitos quanto para o método híbrido de elementos de contorno, com uma diferença básica: as soluções fundamentais aqui utilizadas são não-singulares, diferentemente das soluções fundamentais utilizadas em contorno, o que torna o método híbrido dos elementos finitos mais fácil e simples de se trabalhar que os métodos de contorno em geral, devido à ausência da singularidade, além de mais preciso que o método de elementos finitos convencional devido à utilização no domínio de soluções que satisfazem exatamente à equação diferencial de governo do problema.

## 1.2.Revisão Bibliográfica

Como ponto de partida das pesquisas que levaram ao desenvolvimento do método híbrido de elementos finitos pode-se citar o artigo de Hellinger (1914), que motivou Reissner (1950) a estabelecer o potencial conhecido por potencial de Hellinger-Reissner, aparentemente o primeiro de uma série de notáveis realizações neste campo (Hu, 1955; Washizu, 1955).

Como continuação dos desenvolvimentos no campo variacional na mecânica do contínuo, deve-se mencionar Pian (1964), o qual propôs a primeira de novas metodologias sistemáticas de implementação computacional, que abriu uma nova área de aplicações ao emergente método de elementos finitos. Também foi Pian (1983) quem primeiro utilizou o nome “elementos finitos híbridos”, para designar elementos que mantêm equilíbrio ou compatibilidade em seu domínio e satisfazem compatibilidade ou equilíbrio, respectivamente, ao longo do contorno do elemento.

Ainda a respeito dos desenvolvimentos feitos no campo variacional, deve-se mencionar Trefftz (1926), que, aparentemente sem ter conhecimento do trabalho de Hellinger de 1914, escreveu com várias décadas de avanço um artigo clássico cobrindo o mesmo assunto estudado por Reissner e propondo a mesma metodologia que foi batizada como Potencial de Hellinger-Reissner.

O artigo de Trefftz permaneceu parcialmente esquecido por várias décadas até que Jirousek o trouxe à linha de frente das aplicações computacionais com uma série de artigos (Jirousek e Leon, 1977). O trabalho de Jirousek desencadeou um grande número de desenvolvimentos neste campo, que são agora conhecidos como “métodos de Trefftz”, embora muitas dessas formulações não sejam completamente relacionadas à proposição original de Trefftz (Qin, 2003).

No que diz respeito ao método de elementos finitos, Gupta (1973, 1976, 1978, 1979, 1984) e Paz (1975), entre outros (Voss, 1987), desenvolveram famílias de elementos para os mais diversos problemas no campo da análise de vibrações livres, influenciados por Przemieniecki (1968), que introduziu o conceito de matrizes de massa e rigidez dependentes da frequência para elementos de barra e de viga. Estes elementos foram denominados “dinâmicos”, talvez inapropriadamente, já que só foram usados para problemas de vibração livre.

Mais tarde, Dumont e Oliveira (1993, 1997, 2001) e Dumont e Chaves (2003), em continuação aos desenvolvimentos feitos a partir do potencial de

Hellinger-Reissner, os quais geraram o método híbrido de elementos de contorno (Dumont, 1987, 1989), generalizaram o método para a análise de problemas dinâmicos completamente gerais, no domínio da frequência, para qualquer tipo de carregamento nodal e de deslocamentos iniciais, inspirados em Przemieniecki, mas independentemente dos trabalhos de Gupta e Paz.

É então, a partir destes desenvolvimentos e das ferramentas adquiridas ao longo de quase duas décadas de desenvolvimento do método híbrido dos elementos de contorno, que surge a proposta do método híbrido de elementos finitos do presente trabalho, que generaliza o potencial de Hellinger-Reissner para aplicações de elementos finitos dinâmicos, com soluções fundamentais mais genéricas que as de Trefftz e fazendo uso de uma técnica avançada de superposição modal (Dumont e Oliveira, 1997, 2001).

### 1.3. Objetivos

O intuito deste trabalho é o de desenvolver uma família de elementos finitos híbridos como alternativa aos elementos finitos convencionais, tanto para a análise estática quanto para a análise dinâmica em domínios 2D e 3D.

Como objetivos específicos, citam-se:

- A obtenção de elementos finitos mais precisos, se comparados aos elementos finitos do método dos deslocamentos.
- A obtenção de elementos apropriados à análise dinâmica no domínio da frequência.
- A obtenção de elementos apropriados à resolução de problemas de materiais com gradação funcional.
- A consolidação do ferramental matemático desenvolvido junto ao método híbrido dos elementos de contorno, de forma completamente geral, na aplicação ao método híbrido de elementos finitos.
- A implementação de um programa didático de elementos finitos híbridos para a análise 2D e 3D de problemas de potencial e de elasticidade.
- A implementação de um programa didático de elementos finitos híbridos unidimensionais para a análise dinâmica de estruturas aporticadas e em especial estruturas de cabos de linhas de transmissão

## 1.4. Organização do Texto

O Capítulo 2 está dividido em dez seções, organizadas de forma a apresentar desde os conceitos básicos aos conceitos mais avançados da formulação do método híbrido dos elementos finitos. Nas duas primeiras seções são apresentados os conceitos básicos da teoria do potencial e da elasticidade, Seções 2.1 e 2.2, respectivamente. Na Seção 2.3 é apresentado o conceito de solução fundamental não-singular de forma completamente geral e na Seção 2.4 é apresentado o princípio de Hamilton.

Na Seção 2.5 apresenta-se o potencial de Hellinger-Reissner de forma completamente geral para problemas dependentes do tempo e na Seção 2.6 é apresentada a formulação do método híbrido de elementos finitos, com base no potencial de Hellinger-Reissner generalizado.

Na Seção 2.7 apresenta-se uma análise completamente geral de problemas dependentes do tempo para uma formulação em frequência que leva a um problema de autovalores não-linear, cuja solução é dada na Seção 2.8. A Seção 2.9 apresenta o processo de superposição modal avançada, a consideração de deslocamentos e velocidades iniciais e a obtenção de deslocamento em pontos internos.

Fechando o Capítulo 2, a Seção 2.10 apresenta o processo de obtenção da matriz de rigidez como uma série de frequências, de acordo com o que é exposto na Seção 2.6.

O Capítulo 3 está dividido em três seções. Nas duas primeiras seções é abordado de forma mais detalhada o conceito de soluções fundamentais não-singulares, tanto para problemas de potencial, Seção 3.1, quanto de elasticidade, Seção 3.2. Na Seção 3.3 são apresentados os espaços nulos relacionados à parte estática das soluções fundamentais não-singulares para problemas de potencial e elasticidade 2D e 3D.

O Capítulo 4 apresenta o problema de condução de calor em materiais com gradação funcional (FGM na sigla em inglês), no contexto de uma formulação híbrida de elementos finitos, com a utilização de soluções fundamentais não-singulares. A apresentação se dá em duas etapas. Na primeira etapa, apresenta-se a equação de governo do problema de condução de calor, Seção 4.1. Na segunda etapa, Seção 4.2, apresentam-se as soluções da equação de governo do problema. Na Seção 4.3, são apresentadas duas tabelas contendo um resumo das principais equações desenvolvidas na Seção 4.2 para problemas isotrópicos e ortotrópicos.

O Capítulo 5 apresenta um estudo de elementos finitos unidimensionais (elementos de treliça e viga) com o método híbrido de elementos finitos, seções 5.1 a 5.3, e aborda de maneira geral o problema da análise de cabos flexíveis, Seção 5.4. O intuito deste capítulo é apresentar a formulação de elementos finitos híbridos unidimensionais de forma a possibilitar sua implementação em um programa de análise dinâmica de estruturas apertadas adequado à análise de trechos de linhas de transmissão. A motivação deste capítulo é o estudo feito pelo Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia – NiCAE, que é coordenado pelo professor Remo Magalhães de Souza, do Departamento de Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Pará em convênio com a Eletronorte/UFPa, com a participação do autor e do orientador desta dissertação.

O Capítulo 6 aborda alguns exemplos numéricos simples relacionados aos assuntos estudados nos capítulos anteriores, tanto para os casos de potencial como os de elasticidade, de forma a possibilitar a validação do método híbrido dos elementos finitos, assim como avaliar sua precisão numérica.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta alguns comentários e reflexões sobre as possíveis conclusões a respeito das vantagens e desvantagens do método, assim como algumas sugestões de desenvolvimentos e melhoramentos que possam vir a ser feitos em um estudo futuro.

No final deste trabalho encontram-se ainda três apêndices. Os dois primeiros contêm alguns esclarecimentos que se fazem necessários para os casos particulares de obtenção da matriz de rigidez e de avaliação de deslocamentos em pontos internos do elemento para problemas de elastostática (ou, potencial em regime permanente), Apêndices A e B, respectivamente. O Apêndice C traz um breve resumo do método híbrido simplificado de elementos finitos, o qual oferece um ganho de tempo significativo no processo de obtenção da matriz de rigidez, se comparado ao método híbrido de elementos finitos (apresentado neste trabalho).

Todos os desenvolvimentos feitos neste trabalho são baseados e fortemente influenciados pelas apostilas, notas de aulas e artigos utilizados durante o curso de método híbrido de elementos de contorno desenvolvido e ministrado pelo professor Dumont, desde 1987, na PUC-Rio.