

## 4 Soluções analíticas para o modelo proposto

Este capítulo visa a obtenção de soluções analíticas para o modelo proposto para vários casos particulares.

### 4.1. Meio poroso com único tamanho de poro

Nesta seção, a injeção de uma suspensão com uma dada distribuição de tamanho de partículas em um meio poroso com um único tamanho de poro  $r_p'$  é considerada:

$$H(r_p, X, T) = h(X, T) \delta(r_p - r_p') \quad (4.1)$$

A Figura 8a mostra a distribuição de tamanho de poros (função delta de Dirac) em  $T = 0$  e a distribuição de partículas em suspensão na face de injeção ( $X=0$ ).

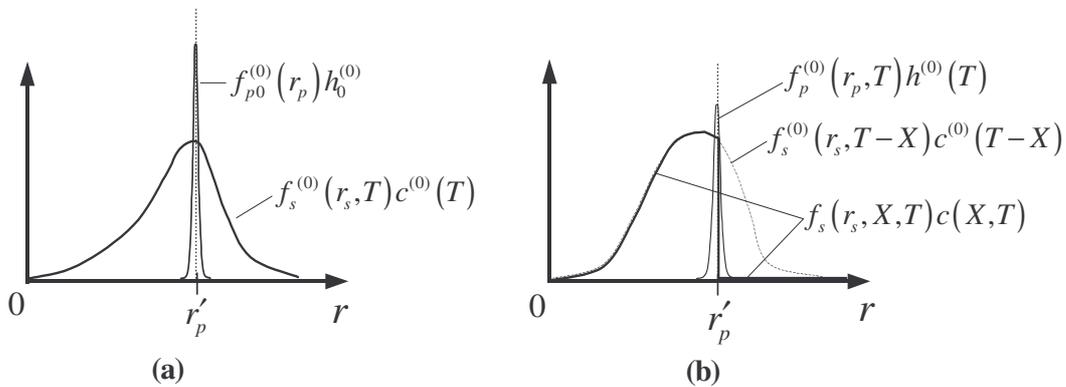


Figura 8: Distribuições de poros e de partículas em suspensão em um meio com tamanho único de poros. (a) condições iniciais e de contorno para as distribuições de concentração de poros e de partículas em suspensão. (b) distribuição de concentração de partículas para qualquer  $X$  e  $T$  (curva sólida) e para  $X = 0$  (curva pontilhada); distribuição de concentração de poros na face de entrada do meio poroso para  $T > 0$ .

#### 4.1.1. Solução analítica

Para o transporte de partículas pequenas ( $r_s < r_p'$ ), as fórmulas (3.15) e (3.20) mostram que  $\alpha = \gamma = 1$ ; ou seja, todos os poros são acessíveis para partículas pequenas, e não há redução de fluxo de partículas.

Substituindo a distribuição de tamanho de poros (4.1) na eq. (3.30) resulta no seguinte sistema para o transporte de partículas pequenas:

$$\begin{cases} \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial T} + \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

A solução da primeira equação do sistema (4.2), sob as condições iniciais e de contorno (3.32), é uma onda viajante:

$$C(r_s, X, T) = \begin{cases} C^{(0)}(r_s, T - X) , & \text{se } X < T \\ 0 , & \text{se } X > T \end{cases} \quad (4.3)$$

Portanto, partículas menores que o raio dos poros são transportadas com a velocidade do fluido carreador sem serem capturadas. Não existem partículas em suspensão na frente do choque de concentração. O perfil da distribuição de partículas atrás da frente de deslocamento se move com velocidade unitária ao longo do meio poroso. O perfil da concentração injetada  $C^{(0)}(r_s, T)$  é repetida com um atraso igual a  $X$ .

Considerando as condições iniciais (3.32), e resolvendo a segunda eq. (4.2) conclui-se que não ocorre captura de partículas pequenas ( $r_s < r_p'$ ), ou seja, para qualquer  $T \geq 0$ :

$$\Sigma(r_s, X, T) = 0 . \quad (4.4)$$

Portanto, como esperado, as partículas pequenas não obstruem os poros.

Para a injeção de partículas grandes ( $r_s > r_p'$ ), a partir das eqs. (3.15) e (3.20), conclui-se que  $\alpha = \gamma = 0$ ; ou seja, nenhum poro é acessível para partículas grandes e não há fluxo de partículas grandes.

Substituindo a eq. (4.1) na eq. (3.30), resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} = \phi C(r_s, X, T) \lambda(r_s, r_p') \\ \frac{\partial h(X, T)}{\partial T} = -\phi \int_{r_p'}^{\infty} \lambda(r_s, r_p') C(r_s, X, T) dr_s \end{cases} \quad (4.5)$$

Das condições iniciais (3.32) e da primeira eq. (4.5), tem-se que:

$$\Sigma(r_s, X, T) = 0, \quad (4.6)$$

ou seja, as partículas grandes não são capturadas no interior do meio poroso.

Da primeira eq. (3.37), a concentração de partículas capturadas na seção de entrada ( $X = 0$ ) do meio poroso é calculada:

$$\Sigma^{(0)}(r_s, T) = \lambda(r_s, r_p') \phi \int_0^T C^{(0)}(r_s, T) dT. \quad (4.7)$$

Portando, como esperado, todas as partículas grandes são capturadas na face de entrada ( $X = 0$ ) do meio poroso.

Lembrando que foi assumido que não existem partículas em suspensão no interior do meio poroso antes da injeção (condição inicial (3.32)), da primeira e segunda eqs. (4.5) segue que:

$$C(r_s, X, T) = 0 : X > 0, \quad (4.8)$$

ou seja, nenhuma partícula grande ( $r_s > r_p'$ ) entra no meio poroso.

Substituindo a solução (4.8) na terceira eq. (4.5) e resolvendo a equação diferencial ordinária, considerando as condições iniciais e de contorno (3.32), tem-se que:

$$h(X, T) = h_0(X) : X > 0, \quad (4.9)$$

ou seja, o número de poros no interior do meio poroso não muda durante a injeção.

Considerando (4.8) e substituindo (4.7) em (3.10), a acumulação de partículas grandes na entrada do meio poroso é calculada:

$$\sigma^{(0)}(T) = \phi \int_{r_p}^{\infty} \lambda(r_s, r_p) \int_0^T C^{(0)}(r_s, \tau) d\tau dr_s. \quad (4.10)$$

A equação para a concentração de poros na seção de entrada do meio poroso é obtida substituindo (4.10) em (3.36):

$$h^{(0)}(T) = h_0^{(0)} - \sigma^{(0)}(T). \quad (4.11)$$

A fórmula (4.11) reflete o fato de que cada partícula pode obstruir apenas um poro e vice-versa.

Para o caso de um meio poroso com poros de tamanho único (4.1), a solução do sistema (3.30), sujeito as condições iniciais e de contorno (3.32), é dado pelas fórmulas (4.3), (4.4), (4.6)-(4.11).

As linhas 1 e 2 na Figura 9 mostram a concentração de partículas na saída ( $X = 1$ ) do meio poroso para o caso em que a densidade de concentração injetada é constante. A linha 1 representa a concentração de partículas pequenas, que é igual a zero até a injeção de um volume poroso ( $T = 1$ ). Após a chegada das partículas pequenas na seção de saída do meio poroso ( $X = 1$ ), a densidade concentração de partículas em  $X = 1$  se iguala a densidade de concentração injetada. Ou seja, não há captura de partículas pequenas. A linha 2 na Figura 9 mostra que as partículas grandes nunca chegam na saída do meio poroso. Este efeito foi observado em testes laboratoriais (Massei et al, 2002), onde a exclusão pelo tamanho era o mecanismo de captura dominante.

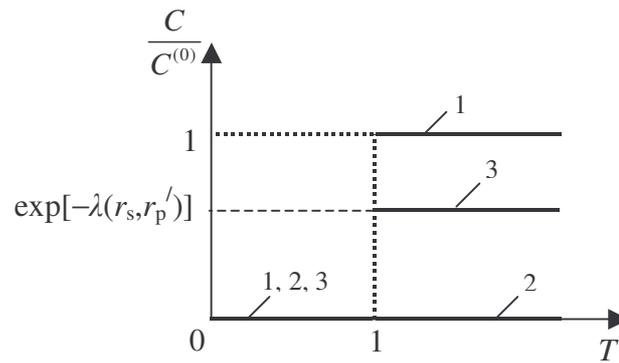


Figura 9: Curvas para o tempo de chegada (“breakthrough time”) para diferentes tamanhos de partículas (em  $X = 1$ ): (1) - para partículas menores que  $r_p'$  (de acordo com o modelo proposto); (2) - para partículas maiores que  $r_p'$  (de acordo com o modelo proposto); (3) - para partículas maiores que  $r_p'$  (ignorando os fatores de acessibilidade e de redução de fluxo).

É importante salientar que, em um meio poroso com poros de tamanho único, as partículas grandes são capturadas (4.8) e as pequenas são transportadas sem captura (4.3). Portanto, a filtração profunda (onde existe uma penetração média para cada tamanho de partícula) não ocorre neste caso. O comprimento de penetração é zero para partículas grandes, e infinito para partículas pequenas.

Na Figura 8 é apresentado um esboço da solução. A densidade de concentração inicial de poros e a densidade de concentração para partículas injetadas são mostradas na Figura 8a. A dinâmica das densidades de concentração de partículas em suspensão  $C(r_s, X, T)$  e de poros  $H(r_p, X, T)$  são mostradas na Figura 8b. Comparando as curvas pontilhada e contínua para partículas pequenas ( $r_s < r_p'$ ), conclui-se que a forma da densidade de partículas é repetida com uma demora que é igual a  $X$ , que corresponde ao comportamento de uma onda viajante (4.3). A linha contínua na Figura 8b mostra que a densidade de concentração para partículas grandes ( $r_s > r_p'$ ) é igual a zero para qualquer  $X > 0$ . A Figura 8 mostra que a distribuição de tamanho de poros permanece uma função delta de Dirac e que a concentração total de poros na seção de entrada do meio poroso diminui com o tempo, como sugerido pela fórmula (4.11).

#### 4.1.2. Dados experimentais

Tufenkji et al (2004) injetaram uma suspensão com uma concentração constante ( $C^{(0)} = 10^7$  partículas / ml), e com partículas de diâmetro igual a  $4.1\mu\text{m}$ , em um meio poroso constituído de grãos esféricos de diâmetro igual a  $0.23\text{mm}$  (ou seja, poros de tamanhos iguais a aproximadamente  $35\mu\text{m}$  (Herzig et al., 1970)) Neste caso, o coeficiente de acessibilidade  $\gamma$  e de redução de fluxo  $\alpha$  são iguais à 1 (ver eqs. (3.15) e (3.20)). Uma imagem de microscopia eletrônica (aumento de  $200\times$ ) dos grãos é mostrada na Figura 10. Além disso, foram medidos o comprimento do meio poroso ( $L = 7.1\text{ cm}$ ), a porosidade ( $\phi = 0.36$ ) e a velocidade de injeção ( $U = 0.042\text{ cm/s}$ ).

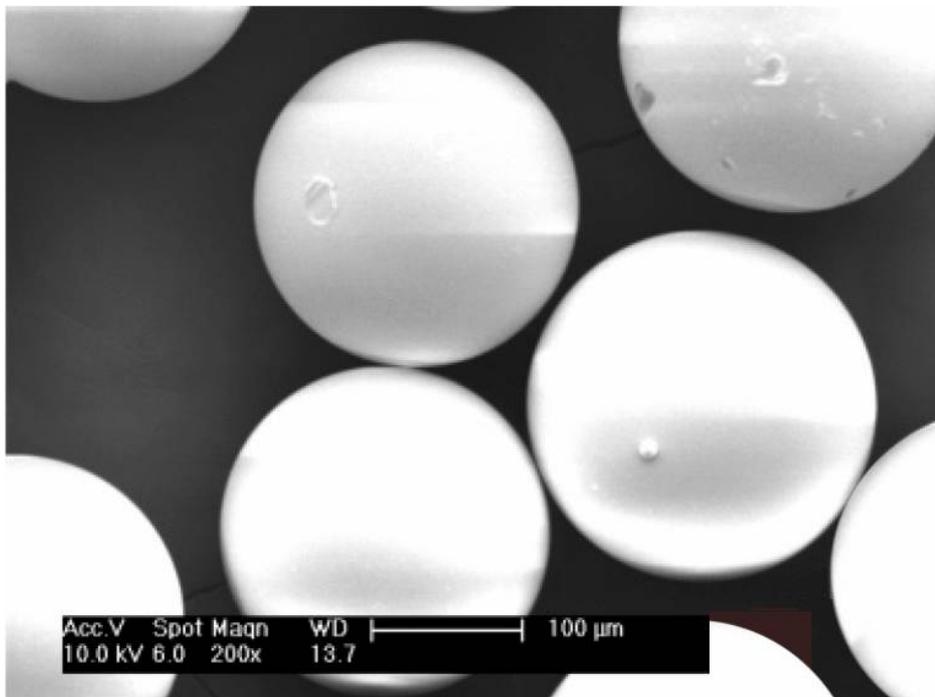


Figura 10: Imagem de microscopia eletrônica (aumento de  $200\times$ ) das esferas que constituem o meio poroso (Tufenkji et al., 2004).

Nesse experimento, a solução foi preparada com água deionizada. Neste caso, a repulsão eletrostática entre as partículas em suspensão e os grãos do meio poroso é grande o suficiente para que a deposição seja desprezível. Segundo Tufenkji et al. (2004), a exclusão pelo tamanho foi o mecanismo de captura dominante nesse experimento.

A Figura 11 mostra o ajuste dos dados experimentais obtidos por Tufenkji et al. (2004). Neste caso, as partículas são pequenas ( $r_s < r_p$ ). Portanto,  $\alpha = \gamma = 1$  e a solução é dada pela eq. (4.3), onde a concentração injetada é constante ( $C^{(0)} = 10^7$  partículas/ml). A Figura 9 (linha 1) mostra um esboço da solução (4.3).

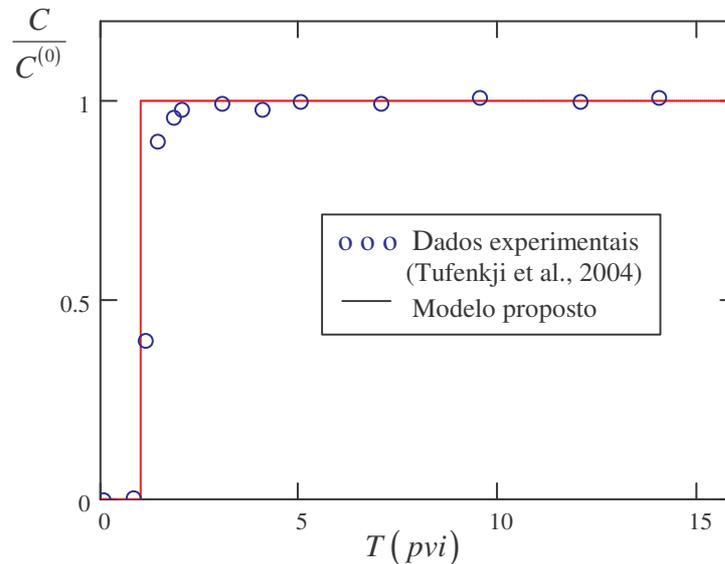


Figura 11: Concentração de partículas em suspensão na saída ( $X=1$ ) do meio poroso (Tufenkji et al., 2004).

É bom salientar que a pequena diferença verificada entre o ajuste e os dados experimentais para tempos próximos de 1  $pvi$  é devido à dispersão do meio poroso ter sido desprezada no modelo proposto.

No experimento analisado acima, as partículas são menores do que os poros. No caso da injeção de partículas grandes ( $r_s > r_p$ ), como observado em testes laboratoriais (Massei et al, 2002), todas as partículas são capturadas na face de entrada do meio poroso. Ou seja, a concentração de partículas grandes na saída do meio poroso é igual a zero (ver linha 2 na Figura 9).

#### 4.1.3. Modelo de medição (concentrações totais)

Vamos obter as equações para as concentrações totais para o caso do fluxo de uma suspensão particulada através de um meio poroso de tamanho único.

A integração de ambos os lados do sistema (4.2) sobre  $r_s$  de zero até  $r_p$  resulta num sistema para a concentrações totais ( $c_1, \sigma_1$ ) de partículas pequenas.

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1(X, T)}{\partial T} + \frac{\partial c_1(X, T)}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_1(X, T)}{\partial T} = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{onde } c_1(X, T) = \int_0^{r'_p} C(r_s, X, T) dr_s, \quad \sigma_1(X, T) = \int_0^{r'_p} \Sigma(r_s, X, T) dr_s.$$

Considerando as condições iniciais e de contorno (3.34), a solução do sistema (4.12) é dada por:

$$c_1(X, T) = \begin{cases} c_1^{(0)}(T - X), & X < T \\ 0, & X > T \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\sigma_1(X, T) = 0. \quad (4.14)$$

A solução (4.13)-(4.14) mostra que as partículas pequenas são transportadas sem captura, ou seja, não ocorre filtração profunda para partículas pequenas.

A integração de ambos os lados da primeira e segunda eqs. (4.5) sobre  $r_s$  de  $r_p'$  até infinito resulta no sistema para as concentrações totais de partículas grandes ( $r_s > r_p'$ ):

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \sigma_2(X, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \sigma_2(X, T)}{\partial T} = \phi \int_{r'_p}^{\infty} \lambda(r_s, r'_p) C(r_s, X, T) dr_s \end{cases} \quad (4.15)$$

onde  $\sigma_2$  é a concentração total de partículas grandes capturadas.

Da primeira eq. (4.15) e da condição inicial (3.34), obtém-se a solução para a concentração total de partículas grandes depositadas:

$$\sigma_2(X, T) = 0. \quad (4.16)$$

Substituindo a primeira eq. (4.15) na segunda eq. (4.15), resulta em:

$$\int_{r'_p}^{\infty} \lambda(r_s, r'_p) C(r_s, X, T) dr_s = 0. \quad (4.17)$$

Conseqüentemente, a concentração total de partículas grandes também é zero no interior do reservatório:

$$\int_{r'_p}^{\infty} C(r_s, X, T) dr_s = c_2(X, T) = 0. \quad (4.18)$$

A solução (4.18) mostra que não há transporte de partículas grandes através do meio poroso.

#### 4.1.4. Discussão sobre os coeficientes de redução de fluxo e de acessibilidade

Com o intuito de avaliar o efeito dos coeficientes de redução de fluxo ( $\alpha$ ) e de acessibilidade ( $\gamma$ ) no fluxo de suspensões particuladas através de meios porosos, despreza-se esses coeficientes no sistema de equações governantes (3.30), ou seja, assume-se que  $\alpha = \gamma = 1$ . Neste caso, obtém-se a equação de balanço de populações proposta por Sharma e Yortsos (1987a). Substituindo  $\alpha = \gamma = 1$  na primeira eq. (3.30), resulta em:

$$\frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial T} + \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial X} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T}. \quad (4.19)$$

A segunda e a terceira equações do sistema (3.30) permanecem as mesmas. Portanto, a eq. (4.19) e as duas últimas equações do sistema (3.30) formam o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial T} + \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial X} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} = \phi C(r_s, X, T) \frac{\int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p}{\int_0^{\infty} r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p} \\ \frac{\partial H(r_p, X, T)}{\partial T} = -\phi \frac{r_p^4 H(r_p, X, T)}{\int_0^{\infty} r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p} \int_{r_p}^{\infty} \lambda(r_s, r_p) C(r_s, X, T) dr_s \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Para o transporte de partículas através de um meio poroso com poros de tamanho único ( $r_p'$ ), a concentração de poros  $H(r_p, X, T)$  é definida na eq. (4.1). O sistema (4.20) é reduzido ao sistema (4.2) para partículas pequenas  $r_s < r_p'$ . A solução para este sistema é dado pelas eqs. (4.3) e (4.4). Os fatores de acessibilidade e redução de fluxo são iguais a um ( $\alpha = \gamma = 1$ ) para partículas pequenas, ou seja, todos os poros são acessíveis para partículas pequenas e os sistemas (3.30) e (4.20) coincidem.

Substituindo a densidade de concentração de poros (4.1) no sistema (4.20) e considerando as partículas grandes ( $r_s > r_p'$ ), resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial T} + \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial X} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} = \lambda(r_s, r_p') \phi C(r_s, X, T) \\ \frac{\partial h(X, T)}{\partial T} = -\phi \int_{r_p'}^{\infty} \lambda(r_s, r_p') C(r_s, X, T) dr_s \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Substituindo a segunda equação do sistema (4.21) na primeira, resulta na equação de balanço para a população de partículas em suspensão com raio  $r_s$ :

$$\frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial T} + \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial X} = -\lambda(r_s, r_p') C(r_s, X, T). \quad (4.22)$$

A solução da eq. (4.22), considerando as condições iniciais e de contorno (3.32) é dada por:

$$C(r_s, X, T) = \begin{cases} C^{(0)}(r_s, T - X) \exp[-\lambda(r_s, r_p') X]; & X < T \\ 0; & X > T \end{cases} \quad (4.23)$$

A solução (4.23) mostra que ocorre filtração profunda para cada população de partículas com raio  $r_s > r_p'$ .

O perfil de concentração na saída do meio poroso, de acordo com a solução (4.23), é mostrado na Figura 9 (linha 3). A concentração é igual a zero até a injeção de um volume poroso. No momento  $T = 1$  a frente de concentração alcança a saída ( $X = 1$ ) do reservatório e, após esse momento, a densidade de concentração na saída repete a forma da densidade de concentração injetada com um atraso de um volume poroso e com uma atenuação  $\exp[-\lambda(r_s, r_p')]$ . Portanto, a razão entre as concentrações injetada e efluente é sempre menor que um.

A expressão para a densidade de concentração de poros é dada por:

$$h(X, T) = \begin{cases} h_0(X) - \phi \int_{r_p'}^{\infty} \lambda(r_s, r_p') \exp[-\lambda(r_s, r_p') X] \int_X^T C^{(0)}(r_s, T) dT dr_s, & X < T \\ h_0(X), & X > T \end{cases} \quad (4.24)$$

Portanto, a consequência de ignorar o fato de que as partículas são transportadas somente através de poros maiores do que elas é a filtração profunda de partículas grandes ( $r_s > r_p'$ ) em rochas com poros de tamanho único. Por outro lado, considerando esse fato resulta na ausência de filtração profunda em rochas com poros de tamanho único.

## 4.2. Rocha constituída de poros com pequena variação de tamanho

Nesta seção, o transporte de uma suspensão particulada através de um meio poroso com pequena variação no tamanho de poros é discutido. Neste caso, o raio do poro varia entre  $r_{pmin}$  e  $r_{pmax}$ , onde  $r_{pmax} - r_{pmin} \ll r_{pmin}$  (Figura 12a). Além

disso, densidade de concentração de partículas injetadas  $C^{(0)}(r_s)$  é considerada independente do tempo.

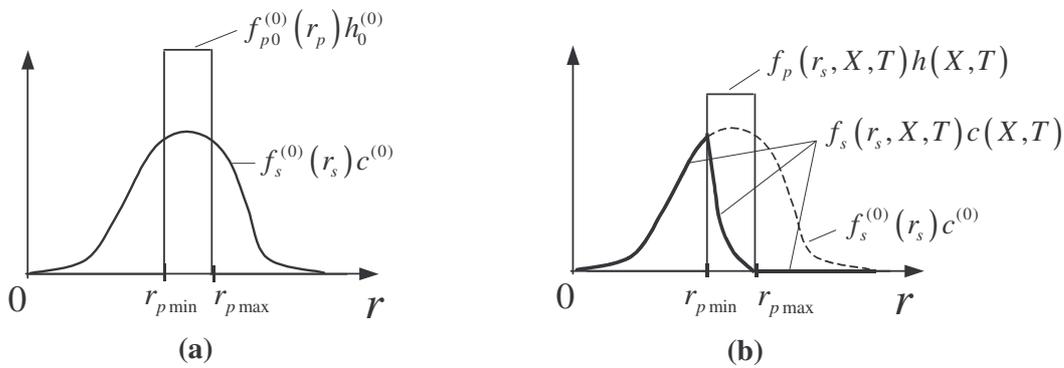


Figura 12: Distribuições de tamanho de poros e de partículas em suspensão em um meio poroso com pequena variação no tamanho de poros: (a) condições iniciais e de contorno para as distribuições de poroso e de partículas em suspensão; (b) distribuições de partículas em suspensão atrás da “frente de concentração” para  $T > 0$  (curva sólida), concentração injetada (curva tracejada) e concentração de poros.

#### 4.2.1. Solução analítica

Considere que o meio poroso tem a seguinte distribuição de tamanho de poros:

$$H(r_p, x, t) = \begin{cases} 0, & r_p > r_{p\max} \text{ ou } r_p < r_{p\min} \\ h(x, t) f_p(r_p), & r_{p\min} < r_p < r_{p\max} \end{cases} \quad (4.25)$$

Substituindo a eq. (4.25) nas eqs. (3.15) e (3.20), tem-se as expressões para os fatores de acessibilidade  $\chi(r_s)$  e de redução de fluxo  $\alpha(r_s)$  para partículas intermediárias ( $r_{p\min} < r_s < r_{p\max}$ ). Neste caso, os coeficientes  $\alpha$  e  $\gamma$  tornam-se dependentes apenas de  $r_s$ . Sendo assim, o sistema (3.30) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(r_s) \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial T} + \alpha(r_s) \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial X} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} = \phi \eta(r_s) C(r_s, X, T) \\ \frac{\partial H(r_p, X, T)}{\partial T} = -\phi \frac{r_p^4 H(r_p, X, T)}{\int_0^{r_p} r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p} \int_{r_p}^{\infty} \lambda(r_s, r_p) C(r_s, X, T) dr_s \end{array} \right. \quad (4.26)$$

onde,

$$\eta(r_s) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad r_s < r_{p \min} \\ \frac{\int_{r_{p \min}}^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 f_p(r_p) dr_p}{\int_{r_{p \min}}^{r_{p \max}} r_p^4 f_p(r_p) dr_p}, \quad r_{p \min} < r_s < r_{p \max} \\ \frac{\int_{r_{p \min}}^{r_{p \max}} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 f_p(r_p) dr_p}{\int_{r_{p \min}}^{r_{p \max}} r_p^4 f_p(r_p) dr_p}, \quad r_s \geq r_{p \max} \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Para partículas pequenas ( $r_s < r_{p \min}$ ) e grandes ( $r_s > r_{p \max}$ ), o sistema (4.26) coincide com os sistemas (4.2) e (4.5), respectivamente. Portanto, a solução para partículas pequenas é dada pelas fórmulas (4.3), (4.4) e a solução para partículas grandes é dada pelas fórmulas (4.6)-(4.11).

Portanto, as partículas pequenas são transportadas sem serem capturadas e as partículas grandes não penetram no meio poroso. Conseqüentemente, as partículas pequenas e grandes não são capturadas dentro do reservatório. A Figura 12b mostra a concentração de partículas injetadas (linha pontilhada) e a densidade de concentração de partículas em suspensão atrás da frente de deslocamento para  $T > 0$ . Ambas as distribuições coincidem para partículas pequenas ( $r_s < r_{p \min}$ ).

Por outro lado, as partículas de tamanho intermediário ( $r_{p \min} < r_s < r_{p \max}$ ) estão sujeitas ao processo de filtração profunda, ou seja, uma parte de cada

população de partículas intermediárias é capturada durante o transporte através do meio poroso.

Para o transporte de partículas intermediárias, a substituição da segunda equação do sistema (4.26) na primeira, resulta em:

$$\frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial T} + \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial X} = -\frac{\eta(r_s)}{\gamma(r_s)} C(r_s, X, T). \quad (4.28)$$

A solução da eq. (4.28), sujeita às condições iniciais e de contorno (3.32), é obtida através do método das características:

$$C(r_s, X, T) = \begin{cases} C^{(0)}(r_s) \exp\left[-\frac{\eta(r_s)}{\alpha(r_s)} X\right]; & X < \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} T \\ 0; & X > \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} T \end{cases}. \quad (4.29)$$

É bom salientar que na solução (4.29) foi considerado que a concentração de partículas injetada é constante com o tempo.

A distribuição de concentração de partículas intermediárias em suspensão é estacionária atrás da frente de deslocamento e zero na frente do choque de concentração.

A concentração total de partículas em suspensão  $c(X, T)$  pode ser calculada a partir da solução (4.29) utilizando a fórmula (3.3).

Substituindo (4.29) na segunda eq. (3.30) e resolvendo o sistema de equações resultante, obtém-se a expressão para a densidade de concentração de partículas capturadas:

$$\Sigma(r_s, X, T) = \begin{cases} \eta(r_s) \phi \left[ T - \frac{\gamma(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right] C^{(0)}(r_s) \exp\left[-\frac{\eta(r_s)}{\alpha(r_s)} X\right]; & X < \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} T \\ 0; & X > \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} T \end{cases}, \quad (4.30)$$

A velocidade característica na eq. (4.28) é dependente do raio da partícula:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)}. \quad (4.31)$$

Substituindo a eq. (4.25) na terceira equação do sistema (4.26) e integrando a equação resultante sobre  $r_p$ , de  $r_{p\min}$  até  $r_{p\max}$ , determina-se a cinética de obstrução de poros:

$$\frac{\partial h(X, T)}{\partial T} = -\phi \frac{\int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} r_p^4 f_p(r_p) \left[ \int_{r_p}^{\infty} \lambda(r_s, r_p) C(r_s, X, T) dr_s \right] dr_p}{\int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} r_p^4 f_p(r_p) dr_p} \quad (4.32)$$

Resolvendo a eq. (4.32), considerando a solução (4.29) para a distribuição de concentração  $C(r_s, X, T)$ , resulta em:

$$h(X, T) = h_0(X) - \frac{\phi}{\int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} r_p^4 f_p(r_p) dr_p} \times \int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} r_p^4 f_p(r_p) \left\{ \int_{r_p}^{\infty} \lambda(r_s, r_p) \left[ T - \frac{\gamma(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right] C^{(0)}(r_s) \exp \left[ -\frac{\eta(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right] dr_s \right\} dr_p, \quad (4.33)$$

$$\text{onde } h_0(X) = \int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} H_0(r_p, X) dr_p.$$

No caso onde o coeficiente de filtração é independente do raio do poro ( $\lambda = \lambda(r_s)$ ), da eq. (4.27) tem-se que:

$$\eta(r_s) = \lambda(r_s) [1 - \alpha(r_s)]. \quad (4.34)$$

A Figura 13 mostra que, para partículas intermediárias, quanto maior é o raio da partícula, maior é a sua velocidade. Portanto, quanto maior a partícula, mais rápido ela chega na saída ( $X = 1$ ) do meio poroso. Este fenômeno foi

observado em processos de filtração profunda onde o mecanismo de exclusão pelo tamanho era dominante (Massei *et al*, 2002) e também no transporte de polímeros através de meios porosos (Bartelds G. A. *et al*, 1997) e em processos de cromatografia por exclusão pelo tamanho (Yau *et al.*, 1979).

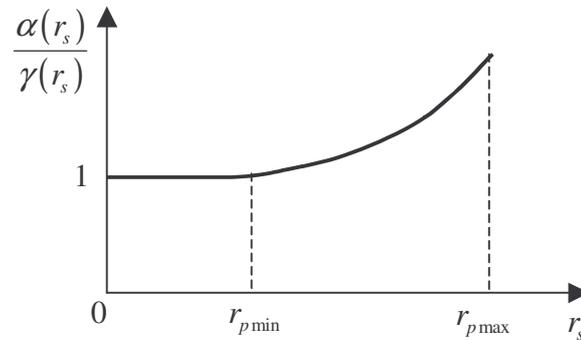


Figura 13: Velocidade da frente de deslocamento de uma população de partículas em função do seu raio.

Para partículas com raio  $r_s = r_{pmin}$ , não há aumento de velocidade ( $\alpha/\gamma = 1$ ), ou seja, essas partículas se movem com a velocidade do fluido percolante.

Quanto maior for a partícula, mais negativo será o expoente na solução (4.29). Conseqüentemente, quanto maior a partícula for, maior será a sua taxa de captura.

Quando  $r_s$  tende para  $r_{pmax}$ , o denominador no expoente da solução (4.29) tende para zero e, conseqüentemente, a concentração também tende para zero. A Figura 12b mostra que a densidade de concentração  $C(r_s, X, T)$  para partículas de tamanho intermediário diminui do valor inicial  $C^{(0)}(r_s = r_{pmin})$  para  $r_s = r_{pmin}$  até zero para  $r_s = r_{pmax}$ .

Substituindo (4.25) na primeira equação do sistema (3.37), obtém-se a densidade de concentração de partículas capturadas na face de entrada do reservatório ( $X=0$ ):

$$\Sigma^{(0)}(r_s, T) = \eta(r_s) \phi C^{(0)}(r_s) T \quad (4.35)$$

Na equação acima,  $\eta = 0$  para partículas menores que  $r_{pmin}$  (ver eq. (4.27)), ou seja, as partículas pequenas ( $r_s < r_{pmin}$ ) atravessam a entrada do meio poroso sem serem capturadas. Partículas com raio maior que  $r_{pmax}$  não penetram na rocha

e são capturadas na entrada do meio poroso. Da eq. (3.10) obtém-se a fórmula para a concentração total de partículas capturadas na seção de entrada do meio poroso:

$$\sigma^{(0)}(T) = \int_{r_{p \min}}^{\infty} \Sigma^{(0)}(r_s, T) dr_s . \quad (4.36)$$

A partir da fórmula (3.36) e das soluções (4.35) e (4.36), obtém-se a concentração total de poros na entrada do meio poroso.

A Figura 14 mostra os perfis de concentração para partículas intermediárias de diferentes tamanhos. A frente de concentração de partículas em suspensão se move com velocidade  $\alpha(r_s)/\gamma(r_s)$ .

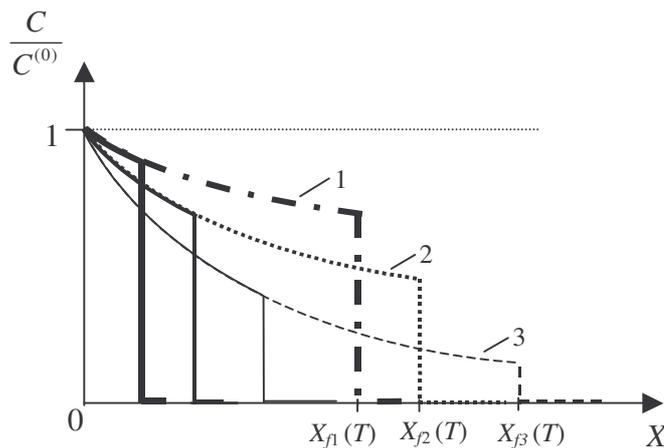


Figura 14: Perfis de distribuição de concentração para partículas de tamanho intermediário durante a filtração em um meio poroso com pequena variação no tamanho de poros. As linhas 1, 2 e 3 correspondem a diferentes populações de partículas ( $r_{s1} < r_{s2} < r_{s3}$ ).

O estado estacionário para cada população de partículas em suspensão  $C(r_s, X)$  é dado pela primeira fórmula da eq. (4.29). A Figura 14 mostra que os perfis de concentração para cada população de partículas no tempos  $T_1$  e  $T_2$  coincidem para  $X < \alpha(r_s)/\gamma(r_s)T_1$ .

Quanto menor a partícula, menor é a fração  $\eta(r_s)/\alpha(r_s)$  no expoente da eq. (4.29). Portanto, quanto menor a partícula, maior a sua concentração relativa  $(C(r_s, X, T)/C^{(0)}(r_s))$  e mais lentamente a sua frente de deslocamento se move.

A Figura 15 mostra os perfis de concentração na saída do meio poroso ( $X=1$ ) para diferentes tamanhos de partículas. Quanto maior a partícula, mais cedo ela chega na saída do meio poroso e menor é a sua concentração relativa  $C / C^{(0)}$ .

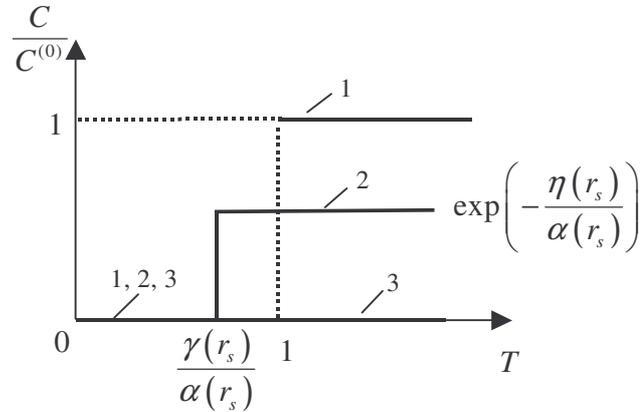


Figura 15: Distribuição de concentração de partículas em suspensão na saída do meio poroso. A linha (1) corresponde à concentração de partículas pequenas ( $r_s < r_{pmin}$ ); a linha (2) está relacionada com a concentração de partículas com tamanho intermediário ( $r_{pmin} < r_s < r_{pmax}$ ) e a linha (3) corresponde à concentração de partículas grandes ( $r_s > r_{pmin}$ ).

A evolução da onda de concentração de partículas em suspensão é mostrada na Figura 16. As partículas pequenas (linha 1) não são capturadas, as partículas intermediárias são capturadas pelo mecanismo de exclusão pelo tamanho (linhas 2 e 3), e as partículas grandes não penetram no meio poroso (linha 4).

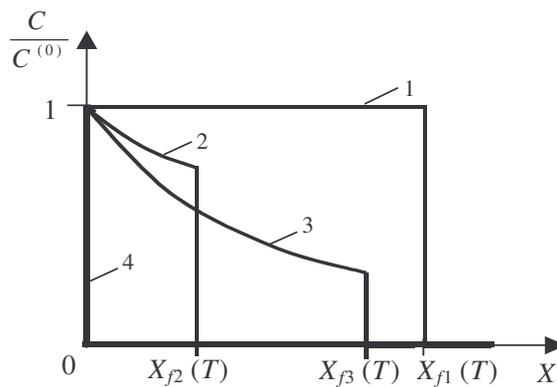


Figura 16: Perfis de densidade de concentração para diferentes tamanhos de partículas. Cada frente se desloca com velocidade  $\alpha(r_s)/\gamma(r_s)$ . As linhas 1 e 4 correspondem às partículas pequenas ( $r_{s1} < r_{pmin}$ ) e grandes ( $r_{s4} > r_{pmax}$ ),

respectivamente . As linhas 2 e 3 estão relacionadas às partículas de tamanho intermediário ( $r_{s2} < r_{s3}$ ).

No caso onde o coeficiente de filtração é independente do raio do poro,  $\lambda = \lambda(r_s)$ , as fórmulas explícitas (4.29) e (4.34) permitem resolver o problema inverso da determinação do coeficiente de filtração  $\lambda(r_s)$  a partir da densidade de concentração de partículas na saída do meio poroso:

$$\lambda(r_s) = \frac{\alpha(r_s)}{1 - \alpha(r_s)} \ln \left( \frac{C^{(0)}(r_s)}{C(r_s, X = 1)} \right). \quad (4.37)$$

#### 4.2.2. Comparação com dados experimentais

Nesta seção, um experimento onde o mecanismo de exclusão pelo tamanho domina é discutido e o fator de redução de fluxo para os tamanhos de partículas injetadas é calculado.

Tufenkji et al. (2004) injetaram suspensões com partículas de látex de diferentes diâmetros (0.32 $\mu$ m, 1 $\mu$ m, 1.9 $\mu$ m e 4.1 $\mu$ m) em um meio poroso constituído de grãos de quartzo. As suspensões foram preparadas com água deionizada, pois assim a repulsão eletrostática é grande o suficiente para que a deposição seja desprezível. Neste caso, o mecanismo de exclusão pelo tamanho foi dominante. A velocidade de injeção foi mantida constante e igual a 0.042 cm/s.

Primeiramente, o meio poroso foi saturado com água deionizada. Após a saturação da amostra, uma suspensão com partículas de diâmetro 0.32 $\mu$ m foi injetada durante um tempo de aproximadamente igual a dez volumes porosos ( $T \cong 10pvi$ ). O meio poroso foi novamente saturado com água deionizada e, subsequentemente, uma suspensão com partículas de 1 $\mu$ m foi injetada. O mesmo procedimento foi adotado para a injeção de partículas de diâmetros de 1.9 $\mu$ m e de 4.1 $\mu$ m, em ordem crescente de tamanho. A Figura 17 mostra as concentrações na saída do meio poroso.

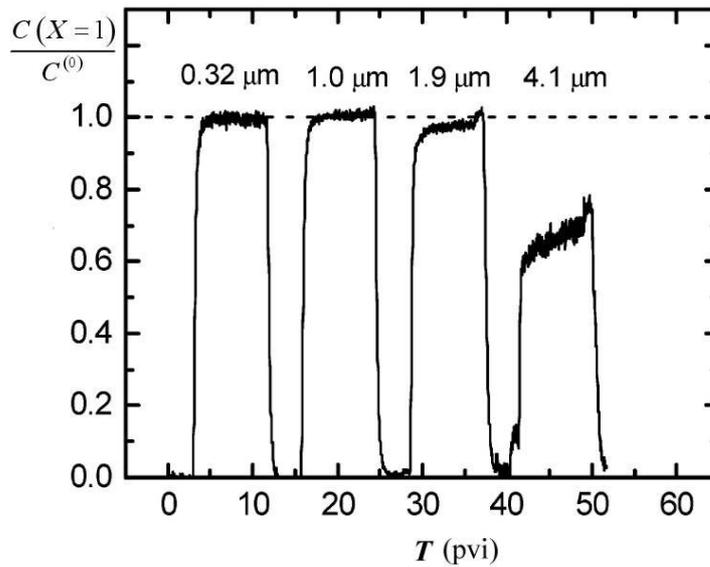


Figura 17: Concentrações normalizadas na saída do meio poroso ( $X=1$ ) para a injeção de tamanhos crescentes de partículas ( $0.32\mu\text{m}$ ,  $1.0\mu\text{m}$ ,  $1.9\mu\text{m}$  e  $4.1\mu\text{m}$ ) suspensas em água deionizada em um meio poroso ( $\phi = 0.43$ ) constituído de grãos de quartzo com diâmetro médio igual a  $0.21\text{mm}$  (Tufenkji et al., 2004).

A distribuição acumulada do tamanho de grãos de quartzo que constituem o meio poroso é mostrada na Figura 18. Nesse caso, a razão  $r_s / \langle r_g \rangle$  é da ordem de 0.018 para as partículas de diâmetro igual a  $4.1\mu\text{m}$ .

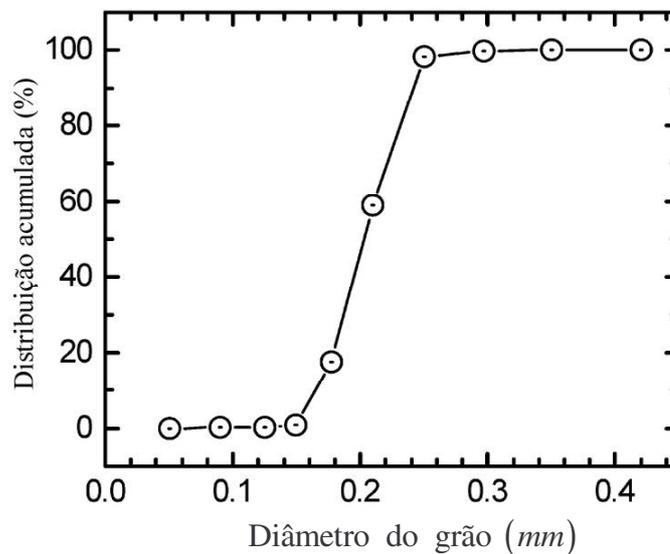


Figura 18: Distribuição acumulada do diâmetro dos grãos de quartzo que constituem o meio poroso (Tufenkji et al., 2004).



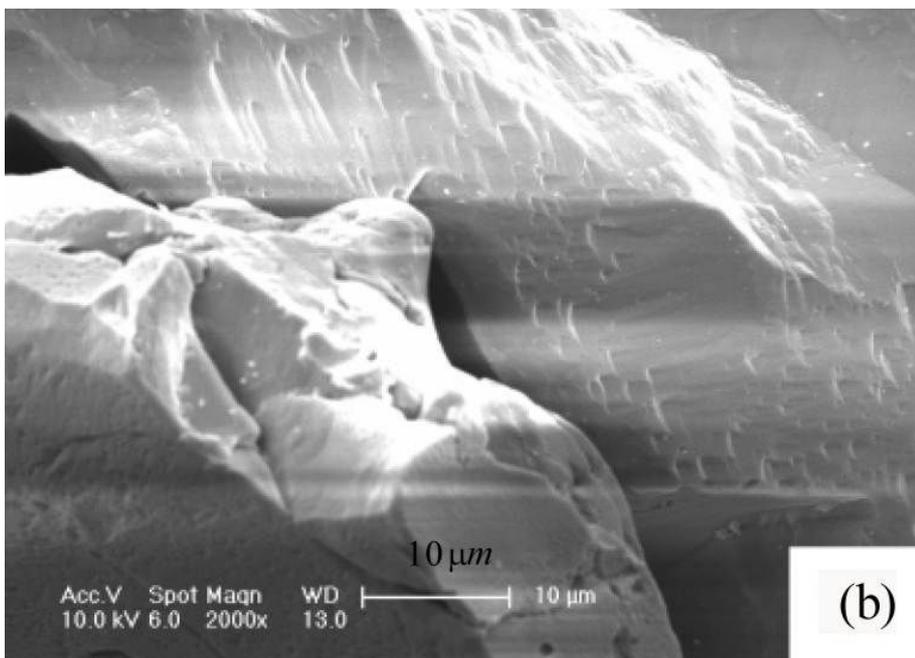
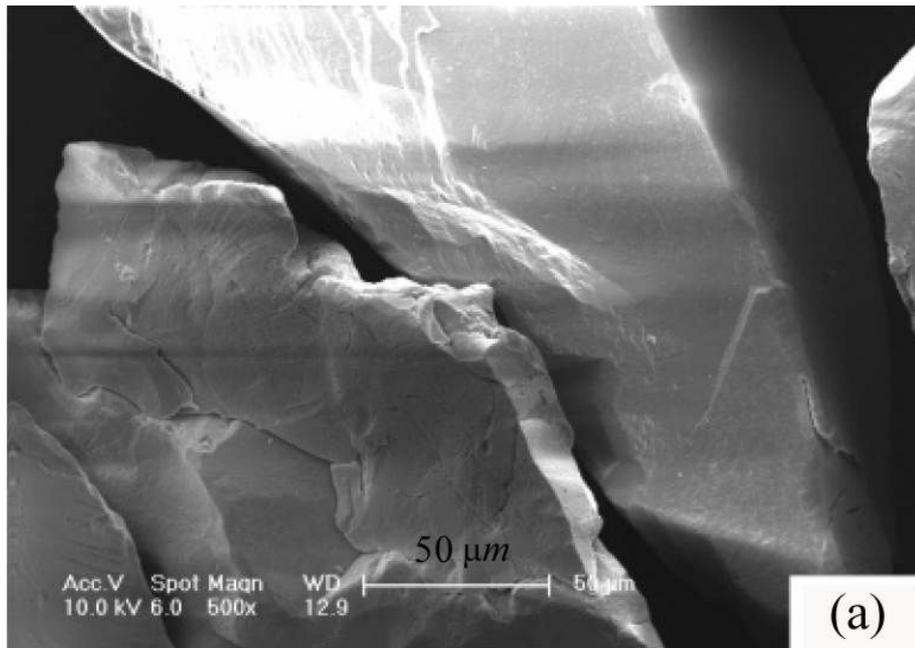


Figura 20: Imagens de microscopia eletrônica dos grãos de quartzo. (a) aumento de 500x e (b) aumento de 2000x (Tufenkji et al., 2004).

Além disso, Tufenkji et al. (2004) mediram o comprimento ( $L = 7.1$  cm) e a porosidade ( $\phi = 0.43$ ) do meio poroso. O coeficiente de filtração adimensional  $\lambda$  foi considerado igual a 338. Considerando que o coeficiente de filtração é constante, a partir da eq. (4.37), os valores dos fatores de redução de fluxo para os diferentes tamanhos de partículas (ver a Tabela 1) foram calculados.

$\alpha(r_s = 0.32\mu\text{m})$	$\alpha(r_s = 1.0\mu\text{m})$	$\alpha(r_s = 1.9\mu\text{m})$	$\alpha(r_s = 4.1\mu\text{m})$
1.0	1.0	0.9999	0.9986

Tabela 1: Valores dos coeficientes de redução de fluxo em função do raio das partículas injetadas.

Determinados os fatores de redução de fluxo  $\alpha(r_s)$ , a distribuição de poros  $H(r_p)$  pode ser obtida resolvendo-se a equação integral (3.20). Para que a distribuição de tamanho de poros seja completamente determinada, partículas de tamanhos crescentes devem ser injetadas até que o fator de redução de fluxo atinja o valor zero. Ou seja, devem ser injetadas partículas de raio entre  $r_{p\min}$  e  $r_{p\max}$ . Portanto, a partir da concentração efluente de partículas, a distribuição de tamanho de poros da rocha pode ser determinada.

#### 4.2.3. Comprimento de penetração

O comprimento de penetração médio de partículas  $\langle X(r_s, T) \rangle$  de tamanho intermediário é definido como:

$$\langle X(r_s, T) \rangle = \frac{\int_0^{\frac{\alpha_T}{\gamma}} X' C(r_s, X', T) dX'}{\int_0^{\frac{\alpha_T}{\gamma}} C(r_s, X', T) dX'} \quad (4.38)$$

A densidade de concentração  $C(r_s, X, T)$  é zero na frente da “frente de deslocamento”  $X_f(r_s, T) = [\alpha(r_s)/\gamma(r_s)]T$ . Conseqüentemente, o limite superior das integrais da eq. (4.38) é  $[\alpha(r_s)/\gamma(r_s)]T$ . Substituindo (4.29) na eq. (4.38) e fazendo a integração, resulta na fórmula para a dinâmica de penetração das partículas intermediárias:

$$\langle X(r_s, T) \rangle = \frac{\alpha(r_s)}{\eta(r_s)} \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\eta(r_s)}{\gamma(r_s)} T\right) \left(1 + \frac{\eta(r_s)}{\gamma(r_s)} T\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\eta(r_s)}{\gamma(r_s)} T\right)} \right]. \quad (4.39)$$

Tendendo  $T$  para infinito na eq. (4.39), obtém-se a penetração máxima para cada tamanho de partícula  $\langle X(r_s) \rangle_{\max}$  :

$$\langle X(r_s) \rangle_{\max} = \frac{\alpha(r_s)}{\eta(r_s)}. \quad (4.40)$$

Para o caso em que o coeficiente de filtração é independente do raio do poro ( $\lambda = \lambda(r_s)$ ), a substituição da eq. (4.34) na eq. (4.40) resulta na seguinte expressão para o comprimento máximo de penetração:

$$\langle X(r_s) \rangle_{\max} = \frac{\alpha}{\lambda(r_s)(1-\alpha)}. \quad (4.41)$$

A Figura 21 mostra o comprimento máximo de penetração em função do raio da partícula para três diferentes funções de distribuição (PDF) de tamanho de poros: normal, log-normal e uniforme. Para o exemplo mostrado na Figura 21, foi assumido a mesma média ( $\langle r_p \rangle = 11 \mu\text{m}$ ) e desvio padrão ( $s = 0.577 \mu\text{m}$ ) para as três diferentes funções de distribuição de tamanho de poros. As partículas com raio  $r_s \geq r_{p\max}$  não penetram no meio poroso; neste caso  $\alpha = 0$  e, conseqüentemente,  $\langle X(r_{p\max}) \rangle_{\max} = 0$ . As partículas com raio  $r_s \leq r_{p\min}$  são transportadas através do meio poroso sem captura. Neste caso,  $\alpha = 1$  e  $\eta(r_s)$  tende para zero; da eq. (4.40) conclui-se que o comprimento médio de penetração  $\langle X(r_{p\min}) \rangle_{\max}$  tende para infinito. Finalmente, quanto menor é a partícula, maior é o fator de redução de fluxo e maior é o comprimento de penetração.

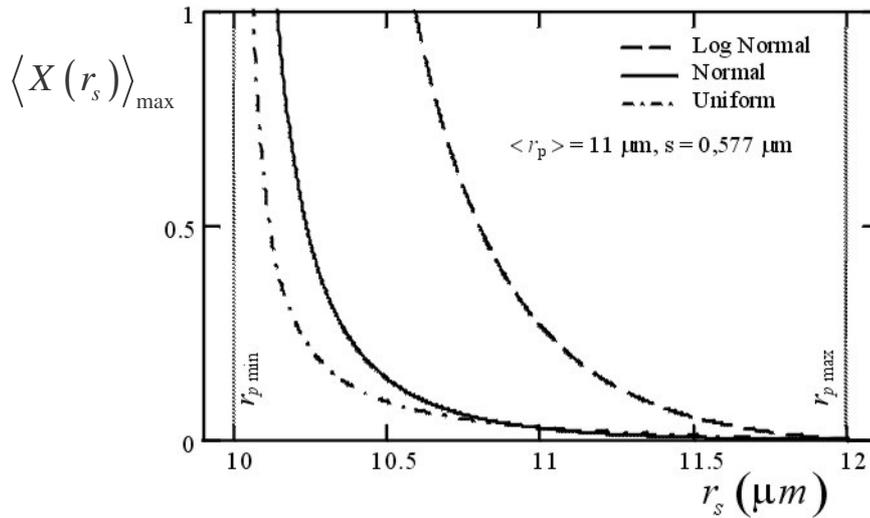


Figura 21: Efeito do tamanho das partículas no comprimento máximo de penetração  $\langle X(r_s) \rangle_{\max}$  durante o processo de filtração em um meio poroso com pequena variação de tamanho de poros.

#### 4.2.4. Modelo de medição (concentrações totais)

Nesta seção, um modelo para as concentrações totais é deduzido e comparado com o modelo clássico para a filtração profunda (Iwasaki, 1937).

Inicialmente são definidas as concentrações totais para partículas pequenas, intermediárias e grandes, respectivamente:

$$c_1 = \int_0^{r_p \min} C(r_s, X, T) dr_s, \quad c_2 = \int_{r_p \min}^{r_p \max} C(r_s, X, T) dr_s, \quad c_3 = \int_{r_p \max}^{\infty} C(r_s, X, T) dr_s. \quad (4.42)$$

A concentração total para partículas pequenas é obtida através da integração da primeira eq. (4.2) sobre  $r_s$  de zero até  $r_p \min$ :

$$\frac{\partial c_1}{\partial T} + \frac{\partial c_1}{\partial X} = 0. \quad (4.43)$$

As partículas pequenas se movem com a velocidade da água percolante sem serem capturadas.

As equações para a concentração de partículas de tamanho intermediário são obtidas através da integração da primeira e da segunda equação do sistema (4.26) em  $r_s$  de  $r_{p\min}$  até  $r_{p\max}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\langle\gamma\rangle c_2(X,T))}{\partial T} + \frac{\partial(\langle\alpha\rangle c_2(X,T))}{\partial X} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial\sigma_2(X,T)}{\partial T} \\ \frac{\partial\sigma_2(X,T)}{\partial T} = \lambda\phi(1-\langle\alpha\rangle)c_2(X,T) \end{cases} \quad (4.44)$$

onde a média dos fatores de acessibilidade e de redução de fluxo são, respectivamente:

$$\langle\gamma\rangle = \frac{\int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} \gamma(r_s) f_s(r_s, X, T) dr_s}{\int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} f_s(r_s, X, T) dr_s} \quad (4.45)$$

$$\langle\alpha\rangle = \frac{\int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} \alpha(r_s) f_s(r_s, X, T) dr_s}{\int_{r_{p\min}}^{r_{p\max}} f_s(r_s, X, T) dr_s} \quad (4.46)$$

Os fatores de acessibilidade e de redução de fluxo médios mudam devido a captura de partículas (descrita pela concentração  $\sigma_2$ ) e a conseqüente obstrução dos poros. Portanto, as seguintes relações constitutivas para fechar o sistema (4.44) são introduzidas:

$$\langle\alpha\rangle = \langle\alpha\rangle(\sigma_2) \quad \text{e} \quad \langle\gamma\rangle = \langle\gamma\rangle(\sigma_2) \quad (4.47)$$

Se comparado com o modelo clássico para a filtração profunda (2.1), o modelo (4.44) para partículas de tamanho intermediário contém os fatores de acessibilidade (4.45) e de redução de fluxo (4.46) na equação de balanço de

população. A expressão para a taxa de captura (4.44) contém o fator  $(1-\langle\alpha\rangle)$ , mostrando que a taxa de captura deve ser proporcional a fração do fluxo via poros pequenos  $(1-\langle\alpha\rangle)U$ .

Finalmente, as equações para as concentrações de partículas grandes  $c_3$  e  $\sigma_3$  são obtidas integrando-se as eqs. (4.5) sobre  $r_s$  de  $r_{pmax}$  até infinito. Neste caso, as equações para as concentrações totais de partículas grandes ( $c_3$  e  $\sigma_3$ ) são idênticas as eqs. (4.15).

### 4.3. Injeção de suspensões com baixa concentração

Em muitos processos de filtração profunda de interesse prático, tais como injeção de água em reservatórios e filtração de água em aquíferos, a concentração de partículas em suspensão é baixa:

$$c^{(0)} \ll h(X, T = 0). \quad (4.48)$$

Neste capítulo, um modelo para filtração profunda (nas aproximações de primeira ordem e de ordem zero) para a injeção de suspensões com baixa concentração em um meio poroso com distribuição de tamanho de poros homogênea é deduzido.

#### 4.3.1. Solução analítica

A injeção de uma suspensão, cuja distribuição de raio das partículas é constante, num meio poroso com uma distribuição homogênea de raio de poros é discutida nesta seção. Para este caso, as condições iniciais e de contorno (3.32) são dadas por:

$$\begin{cases} X = 0: C(r_s, 0, T) = C^{(0)}(r_s) \\ T = 0: C(r_s, X, 0) = 0; \quad \Sigma(r_s, X, 0) = 0; \quad H(r_p, X, 0) = H_0(r_p). \end{cases} \quad (4.49)$$

Para a injeção de suspensões com baixa concentração, o problema (3.30), (4.49) contém um parâmetro pequeno:

$$\varepsilon = \frac{c^{(0)}}{h_0} \ll 1, \tag{4.50}$$

onde:  $c^{(0)} = \int_0^\infty C^{(0)}(r_s) dr_s$  e  $h_0 = \int_0^\infty H_0(r_p) dr_p$ .

Fazendo a expansão em primeira ordem da solução para o problema (3.30), (4.49) em torno do parâmetro  $\varepsilon$ , tem-se:

$$\begin{aligned} C(r_s, X, T) &= C^0(r_s, X, T) + \varepsilon C^1(r_s, X, T) \\ H(r_p, X, T) &= H^0(r_p, X, T) + \varepsilon H^1(r_p, X, T) \end{aligned} \tag{4.51}$$

Substituindo a expansão (4.51) nas eqs. (3.30) e (4.49), resulta no seguinte sistema de equações com aproximação de ordem zero:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial T} \left[ C^0(r_s, X, T) \frac{\int_0^\infty r_p^2 H^0(r_p, X, T) dr_p}{\int_0^\infty r_p^2 H^0(r_p, X, T) dr_p} \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[ C^0(r_s, X, T) \frac{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p, X, T) dr_p}{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p, X, T) dr_p} \right] = \\ &= -C^0(r_s, X, T) \frac{\int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 H^0(r_p, X, T) dr_p}{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p, X, T) dr_p} \\ &\frac{\partial H^0(r_p, X, T)}{\partial T} = -\phi \frac{r_p^4 H^0(r_p, X, T)}{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p, X, T) dr_p} \int_0^\infty \lambda(r_s, r_p) C^0(r_s, X, T) dr_s \end{aligned} \right. \tag{4.52}$$

sujeito às condições iniciais e de contorno:

$$\left\{ \begin{aligned} &X = 0 : C^0 = 0 \\ &T = 0 : C^0 = 0; H^0(r_p, X, 0) = H_0(r_p) \end{aligned} \right. \tag{4.53}$$

A solução  $C^0(r_s, X, T) = 0$  satisfaz a primeira equação do sistema (4.52) e a condição inicial (4.53). Da segunda equação do sistema (4.52) e da condição inicial (4.53), a solução de ordem zero para a distribuição de concentração de poros é dada por:

$$H^0(r_p, X, T) = H_0(r_p). \tag{4.54}$$

Portanto, se somente a solução de ordem zero for considerada, a solução mostra que não há transporte de partícula ou obstrução de poros.

Na aproximação de primeira ordem, o sistema (3.30) e as condições iniciais e de contorno (4.49) são dadas por:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \left[ C^1(r_s, X, T) \frac{\int_0^{r_s} r_p^2 H^0(r_p) dr_p}{\int_0^\infty r_p^2 H^0(r_p) dr_p} \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[ C^1(r_s, X, T) \frac{\int_0^{r_s} r_p^4 H^0(r_p) dr_p}{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p) dr_p} \right] = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \Sigma^1(r_s, X, T)}{\partial T} \\ & \frac{\partial \Sigma^1(r_s, X, T)}{\partial T} = -\phi C^1(r_s, X, T) \frac{\int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 H^0(r_p) dr_p}{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p) dr_p} \\ & \frac{\partial H^1(r_p, X, T)}{\partial T} = -\phi \frac{r_p^4 H^0(r_p)}{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p) dr_p} \int_0^{r_p} \lambda(r_s, r_p) C^1(r_s, X, T) dr_s \end{aligned} \right. \tag{4.55}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & X = 0 : C(r_s, 0, T) = C^{(0)}(r_s) \\ & T = 0 : C^1(r_s, X, 0) = 0; \quad \Sigma^1(r_s, X, 0) = 0; \quad H^1(r_p, X, 0) = 0 \end{aligned} \right. \tag{4.56}$$

Uma distribuição de poros com raios máximo,  $r_{pmax}$ , e mínimo,  $r_{pmin}$ , (ver Figura 22) e um coeficiente de filtração  $\lambda$  constante são considerados. Além disso, da eq. (4.55) conclui-se que os fatores de acessibilidade e de redução de fluxo são independentes de  $X$  e de  $T$ . Neste caso, substituindo (4.51) no sistema (3.30) e considerando a aproximação de primeira ordem, obtém-se o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma(r_s) \frac{\partial C^1(r_s, X, T)}{\partial T} + \alpha(r_s) \frac{\partial C^1(r_s, X, T)}{\partial X} &= \frac{1}{\phi} \frac{\partial \Sigma^1(r_s, X, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \Sigma^1(r_s, X, T)}{\partial T} &= -\lambda \phi C^1(r_s, X, T) [1 - \alpha(r_s)] \\ \frac{\partial H^1(r_p, X, T)}{\partial T} &= -\lambda \phi \frac{r_p^4 H^0(r_p)}{\int_0^{r_p} r_p^4 H^0(r_p) dr_p} \int_{r_p}^{\infty} C^1(r_s, X, T) dr_s \end{aligned} \right. \quad (4.57)$$

onde:

$$\alpha(r_s) = \begin{cases} 1, & r_s < r_{p \min} \\ \frac{\int_{r_s}^{r_{p \max}} r_p^4 H^0(r_p) dr_p}{\int_{r_{p \min}}^{r_{p \max}} r_p^4 H^0(r_p) dr_p}, & r_{p \min} < r_s < r_{p \max} \\ 0, & r_s > r_{p \max} \end{cases} \quad (4.58)$$

$$\gamma(r_s) = \begin{cases} 1, & r_s < r_{p \min} \\ \frac{\int_{r_s}^{r_{p \max}} r_p^2 H^0(r_p) dr_p}{\int_{r_{p \min}}^{r_{p \max}} r_p^2 H^0(r_p) dr_p}, & r_{p \min} < r_s < r_{p \max} \\ 0, & r_s > r_{p \max} \end{cases} \quad (4.59)$$

Na aproximação de primeira ordem para o caso da injeção de suspensões com baixa concentração, os fatores de acessibilidade e de redução de fluxo não são alterados durante o processo de filtração profunda.

Para partículas pequenas ( $r_s < r_{p \min}$ ), os fatores de acessibilidade e de redução de fluxo são iguais a um ( $\alpha(r_s) = \gamma(r_s) = 1$ ). Neste caso, o sistema (4.57) é idêntico ao sistema (4.2), cuja solução é dada pelas eqs. (4.3) e (4.4). Portanto, as partículas pequenas são transportadas sem serem capturadas.

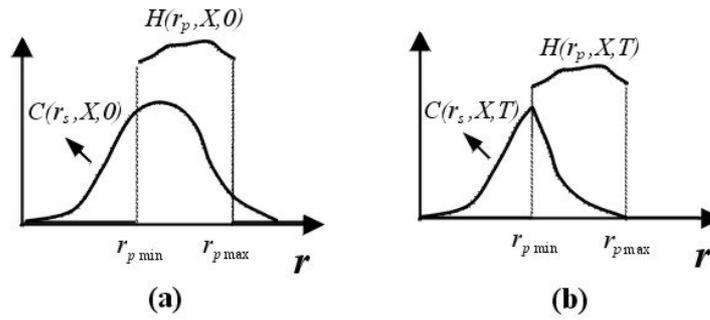


Figura 22: Distribuições de concentração de poros e de partículas em suspensão durante o processo de filtração profunda: (a) distribuições iniciais; (b) distribuições atrás da frente de deslocamento para  $T > 0$ .

Por outro lado, os coeficientes  $\alpha$  e  $\gamma$  são iguais a zero ( $\alpha(r_s) = \gamma(r_s) = 0$ ) para partículas grandes ( $r_s > r_{p\max}$ ). Sendo assim, a solução do sistema (4.57) é dada pelas eqs. (4.6)-(4.8). Portanto, as partículas grandes não são transportadas através do meio poroso; todas são capturadas na face de entrada (ver (4.7)).

Considerando a expansão (4.51) e substituindo a segunda equação do sistema (4.57) na primeira, resulta na seguinte equação:

$$\gamma(r_s) \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial T} + \alpha(r_s) \frac{\partial C(r_s, X, T)}{\partial X} = \lambda C(r_s, X, T) [1 - \alpha(r_s)], \quad (4.60)$$

A solução analítica da eq. (4.60) é obtida através do método das características:

$$C(r_s, X, T) = \begin{cases} C^{(0)}(r_s) \exp\left[-\lambda \frac{1 - \alpha(r_s)}{\alpha(r_s)} X\right]; & X < \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} T \\ 0; & X > \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} T \end{cases}. \quad (4.61)$$

Substituindo a eq. (4.61) na segunda equação do sistema (4.57) e resolvendo a equação resultante, resulta na seguinte distribuição de concentração de partículas capturadas:

$$\Sigma(r_s, X, T) = \begin{cases} \lambda [1 - \alpha(r_s)] \phi \left[ T - \frac{\gamma(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right] C^{(0)}(r_s) \exp \left[ -\lambda \frac{1 - \alpha(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right]; X < \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} T \\ 0; X > \frac{\alpha(r_s)}{\gamma(r_s)} T \end{cases} \quad (4.62)$$

A distribuição de partículas capturadas na face de entrada do meio poroso ( $X = 0$ ) é dada por:

$$\Sigma(r_s, X = 0, T) = \lambda [1 - \alpha(r_s)] \phi T C^{(0)}(r_s). \quad (4.63)$$

A eq. (4.63) significa que a fração de partículas injetadas com raio  $r_s$ , carregadas pela fração do fluxo através de poros pequenos ( $r_p < r_s$ ), é capturada na face de entrada do meio poroso.

Substituindo a eq. (4.61) na terceira equação do sistema (4.57) e resolvendo a equação resultante, tem-se que:

$$H^1(r_p, X, T) = -\lambda \phi \frac{r_p^4 H^0(r_p)}{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p) dr_p} \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_p}^\infty \left[ T - \frac{\gamma(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right] C^{(0)}(r_s) \exp \left[ -\lambda \frac{1 - \alpha(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right] dr_s \quad (4.64)$$

Finalmente, substituindo (4.64) na eq. (4.51) e considerando a solução de ordem zero (4.54), obtém-se a solução para a cinética de obstrução de poros:

$$H(r_p, X, T) = H^0(r_p) - \lambda \phi \frac{r_p^4 H^0(r_p)}{\int_0^\infty r_p^4 H^0(r_p) dr_p} \int_{r_p}^\infty \left[ T - \frac{\gamma(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right] C^{(0)}(r_s) \exp \left[ -\lambda \frac{1 - \alpha(r_s)}{\alpha(r_s)} X \right] dr_s \quad (4.65)$$

A Figura 16 mostra as ondas de concentração para partículas pequenas, intermediárias e grandes. A concentração de partículas com raio  $r_s$  é zero na frente da “frente de deslocamento”:  $X = [\alpha(r_s) / \gamma(r_s)] T$  (ver solução (4.61)). A onda de concentração para partículas pequenas se propaga sem alteração através do reservatório (curva 1), enquanto a concentração de partículas grandes no interior do reservatório é igual a zero (curva 4). Quanto maior a partícula, mais rápido a

sua concentração se propaga (a curva 3 está adiantada em relação à curva 2) e maior é a sua taxa de captura (a curva 3 está abaixo da curva 2).

As distribuições de concentrações de poros e de partículas em suspensão são mostradas na Figura 22. A distribuição de partículas injetadas e a distribuição inicial de poros são apresentadas na Figura 22a. Na Figura 22b são mostradas as distribuições de poros e de partículas em suspensão para  $T > 0$ . A concentração de partículas em suspensão é igual a  $C^{(0)}(r_{pmin})$  para  $r_s = r_{pmin}$  e zero para  $r_s = r_{pmax}$ .

Quanto maior a partícula for, maior será o expoente  $[1-\alpha(r_s)]/\alpha(r_s)$  na eq. (4.61). Portanto, quanto menor a partícula maior a sua concentração relativa  $C(r_s, X, T)/C^{(0)}(r_s)$ . Além disso, quanto menor a partícula, menor a razão  $\alpha(r_s)/\chi(r_s)$  e mais lentamente o seu perfil de concentração se move (ver eq. (4.31)). A Figura 15 mostra o perfil de concentração para diferentes tamanhos de partículas na saída do meio poroso ( $X = 1$ ). Quanto maior a partícula, mais rapidamente ela chega na saída do meio poroso e menor é a sua concentração relativa. Entretanto, um meio poroso real tem uma geometria muito mais complexa do que a adotada aqui. Este fato influencia fortemente os fatores de acessibilidade e de redução de fluxo, podendo levar a comportamentos diferentes dos mencionados acima.

### 4.3.2. Exemplo

Nesta seção, o transporte de suspensões particuladas através de meios porosos é analisado para distribuições iniciais de tamanho de partículas  $C^{(0)}(r_s)$  e de poros  $H(r_p, T=0)$  encontradas na literatura. Para estes casos, são apresentadas as distribuições de partículas em suspensão  $C(r_s, X, T)$ , de partículas capturadas  $\Sigma(r_s, X, T)$  e de poros  $H(r_p, X, T)$  prevista pelo modelo proposto.

Além disso, assumindo que o meio poroso é um conjunto de capilares paralelos, a permeabilidade  $k(X, T)$  pode ser calculada em função da concentração de poros  $H(r_p, X, T)$ .

De acordo com a lei de Poiseuille, a vazão através de um poro é proporcional à quarta potência do seu raio ( $r_p^4$ ). Portanto, a vazão total através da seção transversal na posição  $X$  é dada por:

$$q(X, T) = N_p \int_{r_p \min}^{r_p \max} r_p^4 f_p(r_p, X, T) dr_p \frac{\pi}{8\mu L} \frac{\partial P}{\partial X}, \quad (4.66)$$

onde  $N_p$  é o número total de poros.

Por outro lado, de acordo com a lei de Darcy:

$$q(X, T) = \frac{k(X, T) A}{\mu L} \frac{\partial P}{\partial X}. \quad (4.67)$$

Das eqs. (4.66) e (4.67), tem-se que:

$$k(X, T) = \frac{\pi N_p}{8A} \int_{r_p \min}^{r_p \max} r_p^4 f_p(r_p, X, T) dr_p. \quad (4.68)$$

Neste caso, a permeabilidade equivalente (Dullien, 1992) é dada por:

$$\frac{1}{k(T)} = \int_0^1 \frac{dX}{k(X, T)} \quad (4.69)$$

Portanto, substituindo (4.68) na eq. (4.69), tem-se a permeabilidade equivalente normalizada:

$$\frac{k(T)}{k(0)} = \frac{\int_0^1 \left( \int_{r_p \min}^{r_p \max} r_p^4 H(r_p, X, 0) dr_p \right)^{-1} dX}{\int_0^1 \left( \int_{r_p \min}^{r_p \max} r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p \right)^{-1} dX}. \quad (4.70)$$

#### 4.3.2.1. Resultados:

Nesta seção, são apresentados os resultados da injeção de uma distribuição de partículas através de uma amostra de arenito com uma dada distribuição de tamanho de poros.

Uma amostra de arenito (*Brent sandstone*) foi utilizada como referência. Segundo Hidajat, I. et al. (2002), a porosidade e a permeabilidade inicial do *Brent*

*sandstone* são 0.16 e 470mD, respectivamente. A área da seção transversal foi considerada igual a  $3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . A distribuição de tamanho de poros apresentada por Hidajat (2002) foi aproximada por uma função lognormal. Neste caso, o raio médio dos poros  $\langle r_p \rangle$  foi assumido igual à  $13.46 \mu\text{m}$  e o desvio padrão  $s$  igual à  $1.35 \mu\text{m}$  (ver Figura 23).

Conhecendo-se a distribuição inicial de tamanho de poros  $f_p^{(0)}(r_p)$  e a permeabilidade inicial  $k(0)$  (470mD), determina-se a concentração total de poros ( $h^{(0)} = 3 \times 10^7 \text{ poros/m}^2$ ) a partir da eq. (4.68).

Foi considerada a injeção de uma concentração total de partículas  $c^{(0)}$  igual à  $10^9 \text{ partículas/m}^3$  ( $\cong 4.82 \text{ ppm}$ ), compatível com as concentrações encontradas na água injetada em reservatórios de petróleo (Plataformas P, Q e R da Bacia C).

Uma distribuição normal para o tamanho das partículas injetadas:

$$f_s^{(0)}(r_s) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(r_s - \langle r_s \rangle)^2}{2s^2}\right), \quad (4.71)$$

onde o raio médio das partículas  $\langle r_s \rangle$  é igual a  $13 \mu\text{m}$  e o desvio padrão  $s$  é igual a  $1.35 \mu\text{m}$  foi considerada. Também foi estudado o efeito de se retirar da suspensão as partículas com raio maior que  $13 \mu\text{m}$ . A distribuição de tamanho de partículas relacionada à este último caso  $f_{sf}^{(0)}$  é mostrada pela curva pontilhada na Figura 23.

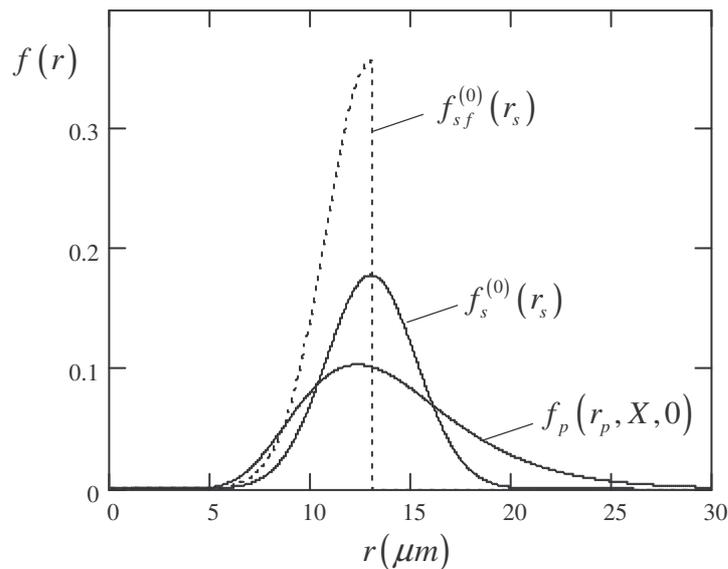


Figura 23: Distribuições de tamanho de partículas na face de injeção e distribuição inicial de tamanho de poros  $f_p(r_p, X, 0)$ .

Na Figura 24 são mostrados os perfis de concentração de partículas suspensas no caso da injeção da distribuição de tamanho de partículas  $f_s^{(0)}(r_s)$ . Note que quanto maior o tamanho da partícula, maior o decréscimo na sua concentração ao longo do meio poroso.

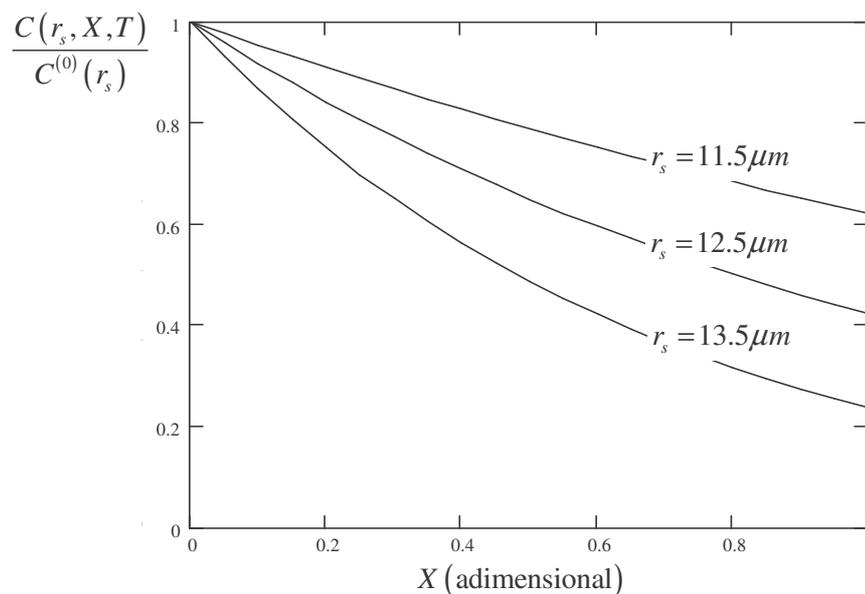


Figura 24: Perfis de concentração de partículas suspensas de diferentes tamanhos ( $r_s=11.5\mu m$ ,  $12.5\mu m$  e  $13.5\mu m$ ) para tempos maiores do que o tempo de chegada ( $T_{br}$ ).

Na Figura 25 são mostrados os perfis de concentração de partículas de diferentes tamanhos capturadas ao longo do meio poroso durante a injeção da distribuição de tamanho de partículas  $f_s^{(0)}(r_s)$ . As partículas maiores são capturadas preferencialmente próximo da entrada do meio poroso ( $X=0$ ). Note que, para as partículas maiores ( $r_s=13.5\mu\text{m}$ ), há uma queda acentuada na concentração de partículas capturadas ao longo do meio poroso. Por outro lado, as partículas menores ( $r_s=12\mu\text{m}$ ) têm um comprimento de penetração maior e, portanto, o decréscimo na concentração de partículas capturadas ao longo do meio poroso é menor.

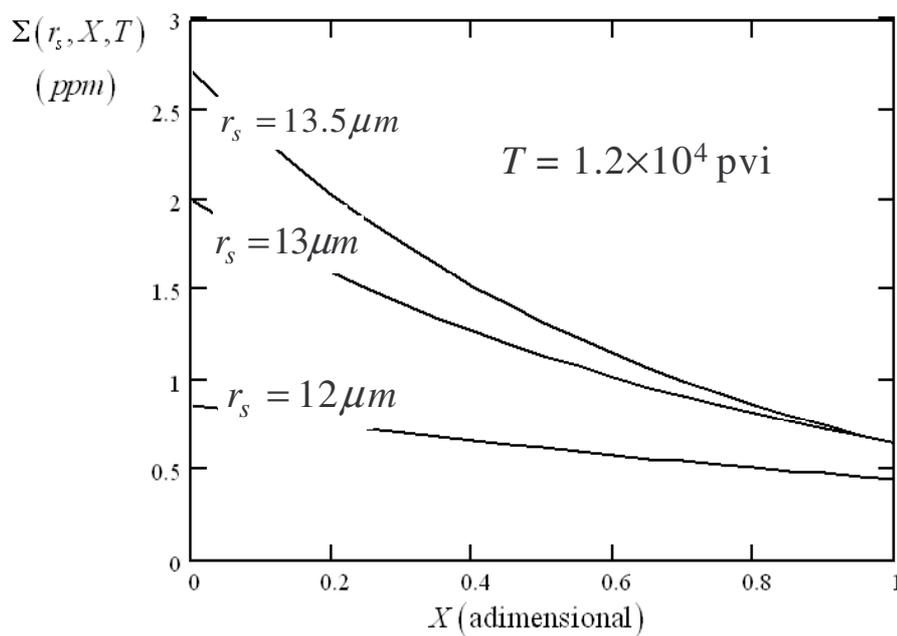


Figura 25: Perfis de concentração de partículas capturadas de diferentes tamanhos ( $r_s=12\mu\text{m}$ ,  $13\mu\text{m}$  e  $13.5\mu\text{m}$ ) para  $T=1.2 \times 10^4$  pvi.

A partir da integração da eq. (4.62), obtém-se a concentração total de partículas capturadas  $\sigma(X, T)$ . Na Figura 26, essas concentrações são mostrados para vários tempos para a injeção de partículas com distribuição de partículas  $f_s^{(0)}$  (ver Figura 23).

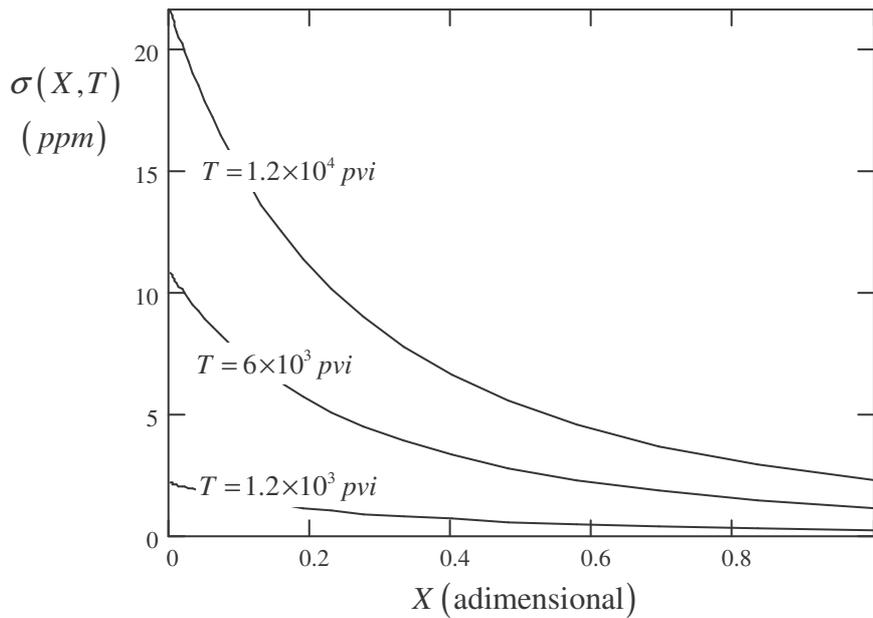


Figura 26: Perfis de concentração total de partículas retidas para os tempos  $1.2 \times 10^3$ ,  $6 \times 10^3$  e  $1.2 \times 10^4$  pvi.

As distribuições de concentração de poros na face de entrada do meio poroso  $H(r_p, 0, T)$  para a injeção de partículas com as distribuições de tamanho  $f_s^{(0)}(r_s)$  e  $f_{sf}^{(0)}(r_s)$  são apresentadas na Figura 27 e na Figura 28, respectivamente. Durante o processo de filtração com exclusão pelo tamanho, os poros menores do que a maior partícula são continuamente bloqueados. Note que os poros são bloqueados mais rapidamente no caso da injeção de partículas com distribuição  $f_s^{(0)}(r_s)$ . Isto ocorre porque as partículas injetadas são maiores neste caso.

A probabilidade de bloqueio de um poro é proporcional ao número de partículas maiores do que ele e, também, ao fluxo que passa por este poro. Portanto, quanto menor o poro, maior a fração de partículas que pode obstruí-lo. Por outro lado, quanto menor o poro, menor o fluxo através dele. Estes dois últimos efeitos competem entre si, determinando quais poros serão bloqueados primeiramente. As curvas 2, 3 e 4 na Figura 27 mostram que, para as distribuições iniciais de tamanho de poros e de partículas utilizadas, os poros de tamanho intermediário são primeiramente obstruídos. O mesmo efeito pode ser observado na Figura 28.

No final do processo de filtração, somente os poros maiores do que a maior partícula não serão bloqueados. Estes poros determinarão a permeabilidade final do meio poroso.

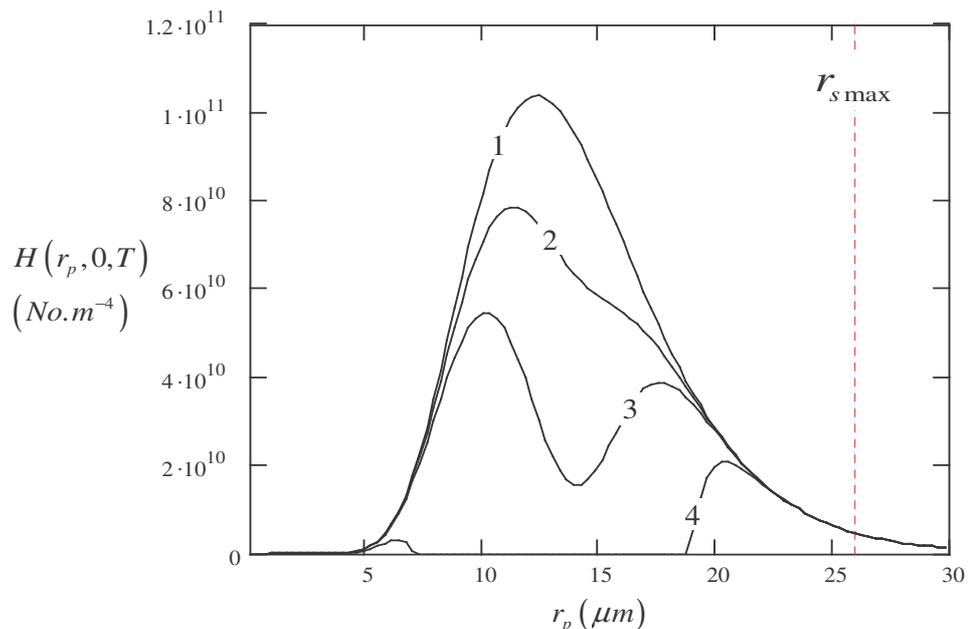


Figura 27: Distribuição de concentração de poros na face de entrada do meio poroso  $H(r_p, 0, T)$  para os tempos  $0, 6.7 \times 10^3, 1.67 \times 10^4$  e  $2 \times 10^5$  pvi (curvas 1, 2, 3 e 4, respectivamente).

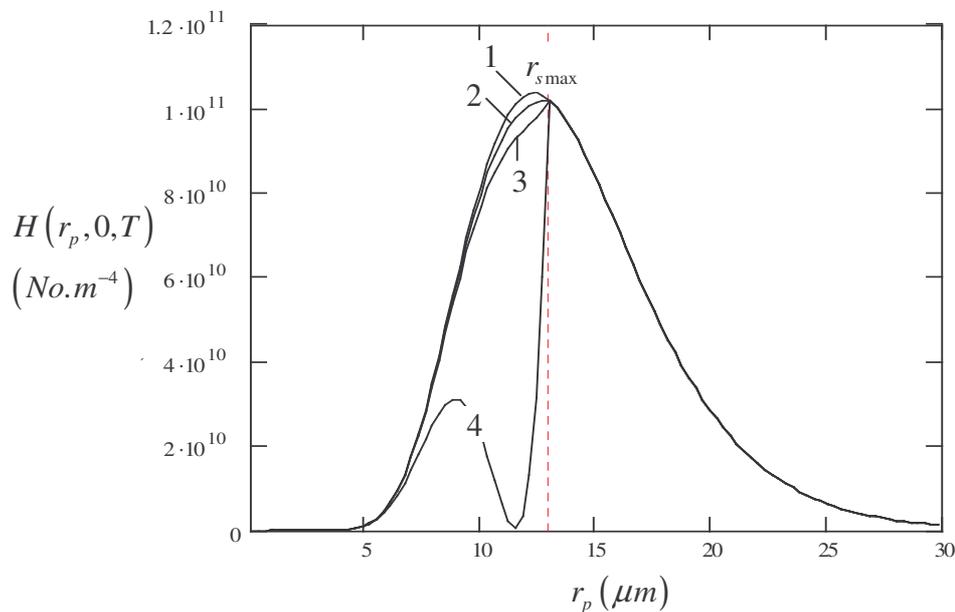


Figura 28: Distribuição de concentração de poros na face de entrada do meio poroso  $H(r_p, 0, T)$  para os tempos  $0, 6.7 \times 10^3, 1.67 \times 10^4$  e  $2 \times 10^5$  pvi (curvas 1, 2, 3 e 4, respectivamente).

Com o tempo, a fração de poros menores do que a maior partícula injetada diminui e, conseqüentemente, a probabilidade de um poro ser obstruído também

diminui. Sendo assim, a queda de permeabilidade torna-se cada vez suave (ver Figura 29).

Se não ocorrer formação de reboco externo, quando todos os poros menores do que a maior partícula forem bloqueados, a permeabilidade tende para um valor constante. Este valor é determinado pela concentração de poros maiores do que a maior partícula injetada. Para a injeção de partículas com distribuição de tamanho  $f_s^{(0)}(r_s)$ , a permeabilidade final será de 72 mD; ou seja, a permeabilidade atingirá um valor de aproximadamente 10% da permeabilidade inicial,  $k_{\text{final}} = 0.1k_0$  (ver curva sólida na Figura 29). Note que, para o intervalo de tempo mostrado na Figura 29, a permeabilidade ainda não estabilizou ( $k(5 \times 10^5 \text{ pvi}) \cong 0.4k_0$ ). Para a injeção de partículas com distribuição  $f_{sf}^{(0)}(r_s)$ , a permeabilidade final será de 668 mD; ou seja,  $k_{\text{final}} = 0.9k_0$  (ver linha pontilhada na Figura 29) e o intervalo de tempo mostrado na Figura 29 é suficiente para detectar a estabilização da permeabilidade.

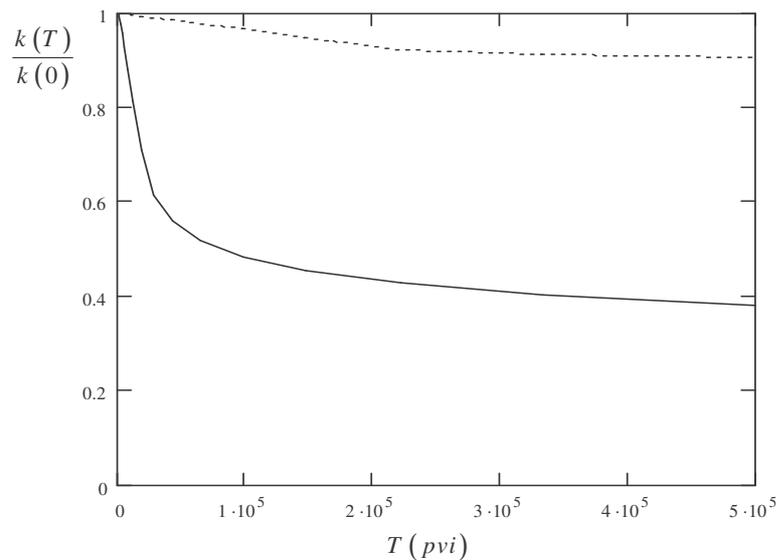


Figura 29: Queda de permeabilidade em função do tempo adimensional.

É bom salientar que, retirando da suspensão apenas as partículas maiores que 13  $\mu\text{m}$  a permeabilidade é fortemente afetada (comparar as curvas na Figura 29). Isto ocorre porque a permeabilidade é função dos raios dos poros elevado à quarta potência (ver eq. (4.68)).