

3 Modelo estocástico na micro escala com efeitos de acessibilidade e redução de fluxo de partículas

O objetivo deste capítulo é deduzir as equações governantes para o modelo estocástico proposto. Neste modelo são incorporadas as distribuições de tamanho de poros e de partículas, considerando os efeitos de acessibilidade e de redução de fluxo de partículas.

Durante o transporte de partículas em suspensão, algumas são capturadas nos poros da rocha devido ao mecanismo de exclusão pelo tamanho. Ou seja, se uma partícula de raio r_s encontra um poro de raio r_p , menor que o dela: $r_p < r_s$, essa partícula é capturada e obstrui o poro. Por outro lado, uma partícula pequena $r_p > r_s$ é transportada através do poro sem ser capturada (Figura 4).

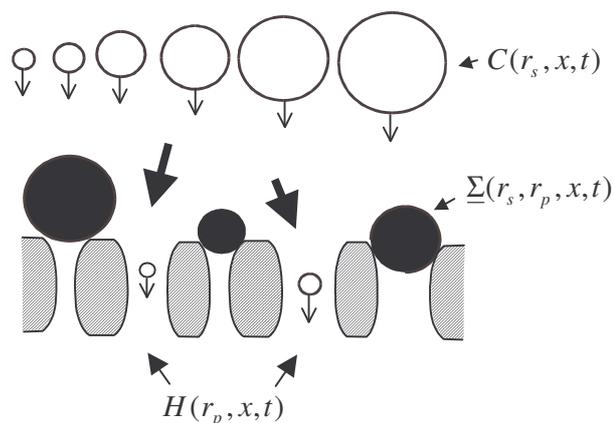


Figura 4: Esquema mostrando a captura de partículas grandes em poros menores do que elas.

Nas seções subseqüentes a geometria adotada para o meio poroso é descrita e as equações que governam o transporte de partículas sob ação do mecanismo de exclusão pelo tamanho são deduzidas.

3.1. Modelo geométrico para o meio poroso

A seguinte estrutura geométrica do espaço poroso é adotada:

- localmente o espaço poroso é um conjunto de capilares paralelos de diferentes raios;
- o fluxo através de cada poro é proporcional a quarta potência do raio do poro (r_p^4 , como no fluxo de Poiseuille);
- a cada comprimento l ocorre a “mistura completa”, ou seja, a probabilidade de uma partícula ser transportada de qualquer poro na posição x para qualquer poro na posição $x+l$ é diferente de zero.

Um exemplo do meio poroso em consideração é mostrado na Figura 5. O meio poroso é um conjunto de capilares paralelos alternados por “câmaras de mistura”, onde ocorre a mistura completa de diferentes tamanhos de partículas.

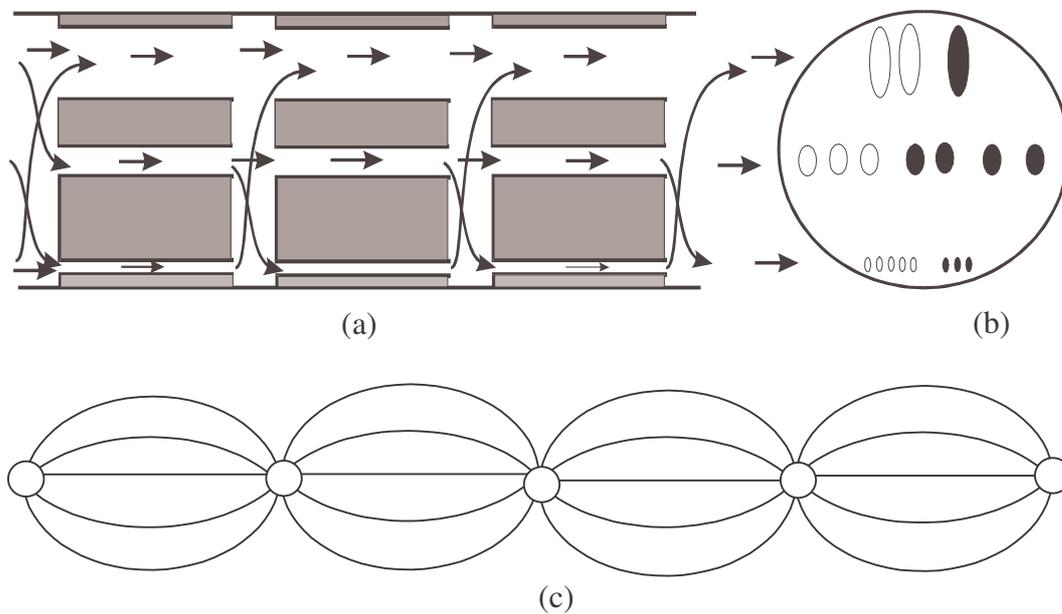


Figura 5: Meio poroso constituído por um conjunto de capilares interseccionados por câmaras de mistura: (a) trajetória das partículas nos capilares e nas câmaras de mistura, (b) seção transversal ao fluxo, (c) esquema mostrando a ligação entre poros de conjuntos subsequentes de capilares.

Durante o transporte de partículas, se a partícula for menor que o raio do capilar, ela é transportada sem ser capturada (Figura 5a). Caso contrário, ela é capturada na entrada do capilar. Portanto, a secção de entrada de cada capilar atua como uma peneira, isto é, partículas grandes não entram em poros pequenos e são capturadas na saída de cada câmara de mistura.

É assumido que o volume das câmaras de mistura é desprezível se comparado com o volume do capilar.

3.2. Dedução das equações básicas

Com o intuito de descrever o mecanismo de exclusão pelo tamanho, as distribuições de tamanho de partículas em suspensão, de partículas capturadas e de poros são definidas:

$$\int_0^{\infty} f_s(r_s, x, t) dr_s = 1 ; \quad \int_0^{\infty} f_T(r_s, x, t) dr_s = 1 ; \quad \int_0^{\infty} f_p(r_p, x, t) dr_p = 1 \quad (3.1)$$

O produto $f_s(r_s, x, t) dr_s$ é a fração de partículas com raio entre r_s e $r_s + dr_s$. A concentração $C(r_s, x, t) dr_s$ de partículas em suspensão com raio entre r_s e $r_s + dr_s$ é definida como o número de partículas com raio entre r_s e $r_s + dr_s$ por unidade de volume poroso.

$$C(r_s, x, t) dr_s = c(x, t) f_s(r_s, x, t) dr_s \quad (3.2)$$

É bom salientar que, $C(r_s, x, t) dr_s$ é a concentração, e $C(r_s, x, t)$ é uma “densidade de concentração”, ou “distribuição de concentração”.

A concentração $c(x, t)$ é definida como o número total de partículas em suspensão por unidade de volume poroso.

Integrando (3.2) sobre r_s de zero até infinito e considerando (3.1), obtém-se a concentração total de partículas:

$$\int_0^{\infty} C(r_s, x, t) dr_s = c(x, t). \quad (3.3)$$

A fração de partículas com raio entre r_s e $r_s + dr_s$ capturadas por poros com raio entre r_p e $r_p + dr_p$ é definida como $\underline{f}_T(r_s, r_p, x, t) dr_s dr_p$. A concentração de partículas com raio r_s capturadas por poros com raio r_p é dada por $\underline{\Sigma}(r_s, r_p, x, t)$ (Figura 4):

$$\underline{\Sigma}(r_s, r_p, x, t) dr_p dr_s = \sigma(x, t) \underline{f}_T(r_s, r_p, x, t) dr_p dr_s. \quad (3.4)$$

O produto $\underline{\Sigma}(r_s, r_p, x, t) dr_s dr_p$ é igual ao número de partículas com raio entre r_s e r_s+dr_s capturadas por poros com raio entre r_p e r_p+dr_p por unidade de volume da rocha.

A concentração total de partículas retidas $\sigma(x,t)$ é igual ao número de partículas capturadas em um volume unitário do meio poroso.

O mecanismo de exclusão pelo tamanho assume que uma partícula com raio r_s somente pode ser capturada por um poro com raio r_p menor que o dela, ou seja, $r_s > r_p$. Portanto,

$$\underline{f}_T(r_s, r_p, x, t) = 0 : r_s < r_p \quad (3.5)$$

$$\underline{\Sigma}(r_s, r_p, x, t) = 0 : r_s < r_p \quad (3.6)$$

A fração e a concentração de partículas capturadas com raio entre r_s e r_s+dr_s são obtidas integrando as funções \underline{f}_T e $\underline{\Sigma}$, respectivamente, sobre r_p de zero até infinito. Fazendo isto e substituindo as eqs. (3.5) e (3.6), obtém-se:

$$f_T(r_s, x, t) dr_s = \left(\int_0^{r_s} \underline{f}_T(r_s, r_p, x, t) dr_p \right) dr_s \quad (3.7)$$

$$\Sigma(r_s, x, t) dr_s = \left(\int_0^{r_s} \underline{\Sigma}(r_s, r_p, x, t) dr_p \right) dr_s . \quad (3.8)$$

Substituindo (3.4) em (3.8) e considerando (3.7), resulta em:

$$\Sigma(r_s, x, t) dr_s = \sigma(x, t) f_T(r_s, x, t) dr_s . \quad (3.9)$$

A integração da eq. (3.9) sobre r_s de zero até infinito, levando em conta a eq. (3.1), resulta na concentração total de partículas capturadas:

$$\int_0^{\infty} \Sigma(r_s, x, t) dr_s = \sigma(x, t) . \quad (3.10)$$

A concentração de poros $H(r_p, x, t) dr_p$ com raio no intervalo $[r_p, r_p+dr_p]$ é definida como:

$$H(r_p, x, t) dr_p = h(x, t) f_p(r_p, x, t) dr_p; \quad (3.11)$$

Integrando (3.11) sobre r_p de zero até infinito e substituindo (3.1), obtém-se a concentração total de poros:

$$\int_0^{\infty} H(r_p, x, t) dr_p = h(x, t). \quad (3.12)$$

É assumido que uma partícula capturada obstrui somente um poro, e vice versa. Portanto, a variação do número total de poros com raio no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$ é igual ao número total de partículas capturadas em poros com raio no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$:

$$H(r_p, x, t) dr_p = H(r_p, x, 0) dr_p - \left(\int_{r_p}^{\infty} \underline{\Sigma}(r_s, r_p, x, t) dr_s \right) dr_p. \quad (3.13)$$

É bom lembrar que o mecanismo de exclusão pelo tamanho pressupõe que uma partícula (com raio r_s) pode ser capturada somente em poros com raio r_p menor que o dela, ou seja, $r_s > r_p$. Portanto, $\underline{\Sigma}(r_s, r_p, x, t) = 0$ para $r_s < r_p$ (ver eq. (3.6)). Por isso, a integral na eq. (3.13) é avaliada de r_p até infinito.

Diferenciando (3.13) em relação a t resulta em:

$$\frac{\partial H(r_p, x, t)}{\partial t} = - \int_{r_p}^{\infty} \frac{\partial \underline{\Sigma}(r_s, r_p, x, t)}{\partial t} dr_s. \quad (3.14)$$

O termo integral do lado direito da eq. (3.14) é igual ao número total de partículas (com raio r_s) maiores que r_p capturadas em poros com raio r_p por

unidade de tempo. Portanto, a eq. (3.14) significa que um poro pode ser obstruído por qualquer partícula maior que ele.

O próximo passo será deduzir o balanço de população para as partículas suspensas e capturadas.

Uma partícula com raio r_s passa através de um poro com raio r_p somente se o raio dela for menor que o raio do poro, $r_s < r_p$. Portanto, poros pequenos ($r_p < r_s$) são inacessíveis para partículas grandes, ou seja, as partículas são transportadas somente através de poros grandes. Esta fração de poros grandes é denominada de volume poroso acessível. Assumindo que localmente o espaço poroso é um conjunto de capilares, define-se o fator de acessibilidade γ para partículas com raio r_s como uma função do volume poroso com capilares de raio maiores que r_s :

$$\gamma(r_s, x, t) = \frac{\int_{r_s}^{\infty} r_p^2 H(r_p, x, t) dr_p}{\int_0^{\infty} r_p^2 H(r_p, x, t) dr_p} . \quad (3.15)$$

Conseqüentemente, partículas com raio r_s são transportadas na $\gamma(r_s, x, t)$ -ésima fração do volume poroso.

Vamos definir o fluxo $j(r_s, r_p, x, t) dr_s dr_p$ de partículas com raio no intervalo $[r_s, r_s + dr_s]$ através de poros com raio no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$ e também o fluxo total $j(r_s, x, t) dr_s$ de partículas com raio no intervalo $[r_s, r_s + dr_s]$. Integrando $j(r_s, r_p, x, t) dr_s dr_p$ sobre todos os poros r_p que permitem fluxo de partículas com raio r_s , obtém-se o fluxo total de partículas com raio no intervalo $[r_s, r_s + dr_s]$. De acordo com o mecanismo de exclusão pelo tamanho, o fluxo de partículas através de poros com raio menor que o dela é nulo. Ou seja, $j(r_s, r_p, x, t) = 0$ se $r_p < r_s$. Portanto,

$$j(r_s, x, t) dr_s = \left(\int_{r_s}^{\infty} j(r_s, r_p, x, t) dr_p \right) dr_s . \quad (3.16)$$

O fluxo de partículas com raio r_s via poros com raios menores ($r_p < r_s$) é igual a zero. Entretanto, a água flui através de todos os poros, incluindo os poros

pequenos. Portanto, o fluxo de água carregando partículas de raio r_s é apenas uma fração do fluxo total de água através do meio poroso.

Como já mencionado, é assumido que o fluxo através de um poro com raio r_p é proporcional a quarta potência do raio do capilar r_p^4 (fórmula de Hagen-Poiseuille). Conseqüentemente, a fração do fluxo via poros com raio no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$ é dada por:

$$F(r_p, x, t) dr_p = \frac{H(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}{\int_0^{\infty} H(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}. \quad (3.17)$$

Em outras palavras, a probabilidade de uma partícula encontrar um poro com raio no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$ é igual à $F(r_p) dr_p$.

O fluxo de partículas com raio r_s através de poros com raio r_p é igual ao produto do fluxo total de partículas com raio r_s pela fração do fluxo total de água através de poros com raio r_p :

$$\underline{j}(r_s, r_p, x, t) dr_s dr_p = UC(r_s, x, t) \frac{H(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}{\int_0^{\infty} H(r_p, x, t) r_p^4 dr_p} dr_s. \quad (3.18)$$

A explicação acima para a eq. (3.18) seria mais rigorosa substituindo os termos “raio r_s ” e ‘raio r_p ” pelos termos “no intervalo $[r_s, r_s + dr_s]$ ” e “no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$ ”, respectivamente.

Substituindo (3.18) em (3.16), resulta em:

$$j(r_s, x, t) dr_s = UC(r_s, x, t) \frac{\int_0^{\infty} H(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}{\int_0^{\infty} H(r_p, x, t) r_p^4 dr_p} dr_s. \quad (3.19)$$

Introduzindo a fração do fluxo total que transporta partículas com raio r_s ,

$$\alpha(r_s, x, t) = \frac{\int_{r_s}^{\infty} r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p}{\int_0^{\infty} r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p}, \quad (3.20)$$

e substituindo a eq. (3.20) na eq. (3.19), obtém-se a seguinte fórmula para o fluxo de partículas com raio no intervalo $[r_s, r_s+dr_s]$:

$$j(r_s, x, t) dr_s = U \alpha(r_s, x, t) C(r_s, x, t) dr_s. \quad (3.21)$$

O coeficiente α é denominado fator de redução de fluxo.

É bom salientar que os fatores de acessibilidade e de redução de fluxo são fortemente influenciados pela morfologia (tamanho e forma dos poros) e pela topologia (relações de conectividade dos poros entre si). Num meio poroso real essas propriedades são muito mais complexas que as adotadas nesta tese.

As fórmulas para os fatores de acessibilidade e de redução de fluxo ((3.15) e (3.20)) podem ser derivadas para redes regulares de poros utilizando as teorias do meio efetivo ou de percolação. Ambas as teorias resultarão em dois valores críticos para o fator de redução de fluxo, correspondendo à existência de um “cluster” infinito para partículas grandes e pequenas.

Considerando que a fração do meio poroso ocupado pelas partículas retidas é desprezível se comparado com o volume poroso total, assumimos que a porosidade permanece constante durante o processo de filtração.

A partir desse momento, são consideradas “densidades de concentração” ao invés de “concentrações”; portanto os multiplicadores dr_s e dr_p são omitidos. Neste caso, a equação para balanço do número de partículas para a população de partículas com raio r_s é dada por:

$$\phi \frac{\partial [\gamma(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial t} + \frac{\partial j(r_s, x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t}. \quad (3.22)$$

A substituição de (3.21) em (3.22) resulta na seguinte equação para o balanço de população:

$$\phi \frac{\partial [\gamma(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial t} + \frac{\partial [U \alpha(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial x} = - \frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t}. \quad (3.23)$$

Com o objetivo de obter um sistema fechado de equações governantes, as equações para as taxas de captura de partícula e de obstrução de poros são deduzidas a seguir.

A probabilidade P de uma partícula com raio no intervalo $[r_s, r_s + dr_s]$ encontrar um poro com raio no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$ é proporcional ao produto entre o número de partículas com raio no intervalo $[r_s, r_s + dr_s]$ e a fração de fluxo que passa através de poros com raio no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$ (Herzig *et al.*, 1970):

$$P \propto U C(r_s, x, t) dr_s \frac{r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p}{\int_0^\infty r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p}. \quad (3.24)$$

A fração de partículas com raio no intervalo $[r_s, r_s + dr_s]$ capturadas em poros com raio no intervalo $[r_p, r_p + dr_p]$ por unidade de tempo é denominado de taxa de captura de partículas. Esta taxa é proporcional a probabilidade P (ver eq. (3.24)) e o coeficiente de proporcionalidade é chamado de coeficiente de filtração – $\lambda'(r_s, r_p)$:

$$\frac{\partial \Sigma(r_s, r_p, x, t)}{\partial t} = \lambda'(r_s, r_p) U C(r_s, x, t) \frac{r_p^4 H(r_p, x, t)}{\int_0^\infty r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p}. \quad (3.25)$$

Na eq. (3.25), como na maioria das fórmulas seguintes, o multiplicador dr_s dr_p é omitido em ambos os lados da equação. Isto significa que são utilizadas as densidades de concentração C , Σ e H ao invés das concentrações $C dr_s$, Σdr_s e $H dr_p$.

É bom salientar que o coeficiente de filtração é igual a zero na ausência de captura:

$$\lambda'(r_s, r_p) = 0 : r_p > r_s. \quad (3.26)$$

A integração de ambos os lados da eq. (3.25) sobre r_p de zero até infinito, considerando a eq. (3.26), resulta na expressão para a taxa de captura de partículas com raio r_s :

$$\frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t} = \frac{UC(r_s, x, t)}{\int_0^\infty r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p} \int_0^{r_s} \lambda'(r_s, r_p) r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p. \quad (3.27)$$

Substituindo a taxa de captura (3.25) na eq. (3.14), resulta na equação para a cinética de obstrução de poros:

$$\frac{\partial H(r_p, x, t)}{\partial t} = -\frac{UH(r_p, x, t)r_p^4}{\int_0^\infty H(r_p, x, t)r_p^4 dr_p} \int_0^\infty \lambda'(r_s, r_p) C(r_s, x, t) dr_s. \quad (3.28)$$

É assumido que o volume total da suspensão aquosa é igual a soma dos volumes de água e de partículas, e que a suspensão é incompressível. Portanto, o fluxo total se conserva, $U = U(t)$.

As eqs. (3.23), (3.27) e (3.28) formam um sistema de equações fechado com três variáveis $C(r_s, x, t)$, $\Sigma(r_s, x, t)$ e $H(r_p, x, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \frac{\partial [\gamma(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial t} + U \frac{\partial [\alpha(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial x} = -\frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t} = UC(r_s, x, t) \frac{\int_0^{r_s} \lambda'(r_s, r_p) r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p}{\int_0^\infty r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p} \\ \frac{\partial H(r_p, x, t)}{\partial t} = -U \frac{r_p^4 H(r_p, x, t)}{\int_0^\infty r_p^4 H(r_p, x, t) dr_p} \int_0^\infty \lambda'(r_s, r_p) C(r_s, x, t) dr_s \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Introduzindo as coordenadas adimensionais X e T (ver eqs. (2.2)) no sistema (3.29), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [\gamma(r_s, X, T)C(r_s, X, T)]}{\partial T} + \frac{\partial [\alpha(r_s, X, T)C(r_s, X, T)]}{\partial X} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \Sigma(r_s, X, T)}{\partial T} = \phi C(r_s, X, T) \frac{\int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p}{\int_0^{\infty} r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p} \\ \frac{\partial H(r_p, X, T)}{\partial T} = -\phi \frac{r_p^4 H(r_p, X, T)}{\int_0^{\infty} r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p} \int_{r_p}^{\infty} \lambda(r_s, r_p) C(r_s, X, T) dr_s \end{array} \right. \quad (3.30)$$

O sistema (3.30) pode ser reduzido a duas equações. Substituindo a segunda equação na primeira equação do sistema (3.30), resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [\gamma(r_s, X, T)C(r_s, X, T)]}{\partial T} + \frac{\partial [\alpha(r_s, X, T)C(r_s, X, T)]}{\partial X} = \\ = -C(r_s, X, T) \frac{\int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p}{\int_0^{\infty} r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p} \\ \frac{\partial H(r_p, X, T)}{\partial T} = -\phi \frac{r_p^4 H(r_p, X, T)}{\int_0^{\infty} r_p^4 H(r_p, X, T) dr_p} \int_{r_p}^{\infty} \lambda(r_s, r_p) C(r_s, X, T) dr_s \end{array} \right. \quad (3.31)$$

As variáveis para o sistema (3.31) são as duas funções $C(r_s, X, T)$ e $H(r_p, X, T)$.

A condição de contorno na entrada da rocha ($X = 0$) corresponde à injeção de água com uma certa “densidade de concentração” de partículas $C^{(0)}(r_s, T)$. O fluxo de partículas injetadas com raio r_s é igual a $C^{(0)}(r_s, T)U$. A seção de entrada da rocha ($X=0$) atua como uma peneira. As partículas com raio r_s são transportadas através do meio poroso por uma fração do fluxo de água – $\alpha^{(0)}(r_s, T)U$ (Figura 5b). As

partículas transportadas pela fração $[1 - \alpha^{(0)}(r_s, T)]U$ do fluxo de água são capturadas na seção de entrada do meio poroso e formam um “reboco externo” (Pang e Sharma, 1994). Para partículas maiores do que qualquer poro, não existem poros acessíveis e o fator de redução de fluxo é igual a zero ($\alpha^{(0)}(r_s, T) = 0$). Portanto, as partículas maiores do que qualquer poro são retidas na entrada do meio poroso e contribuem para o crescimento do reboco externo. Por outro lado, para partículas menores que o menor poro $\alpha^{(0)}(r_s, T) = 1$. Portanto, todas essas partículas entram no meio poroso sem serem capturadas.

O fluxo de partículas com raio r_s entrando no meio poroso é igual à $C^{(0)}(r_s, T) \alpha^{(0)}(r_s, T)U$; e a fração de partículas com raio r_s capturadas na face de entrada é igual à $C^{(0)}(r_s, T) [1 - \alpha^{(0)}(r_s, T)]U$. Portanto, a concentração de partículas é contínua para $X = 0$.

Portanto, o fluxo de partículas com raio r_s entrando no meio poroso é igual a $C^{(0)}(r_s, T) \alpha^{(0)}(r_s, T)U$; e a concentração de partículas é contínua para $X=0$.

A condição inicial corresponde à ausência de partículas (em suspensão ou capturadas) no interior do meio poroso antes da injeção (ver Figura 6), portanto:

$$\begin{cases} X = 0 : C(r_s, 0, T) = C^{(0)}(r_s, T) \\ T = 0 : C(r_s, X, 0) = 0; \quad \Sigma(r_s, X, 0) = 0; \quad H(r_p, X, 0) = H_0(r_p, X) \end{cases} \quad (3.32)$$

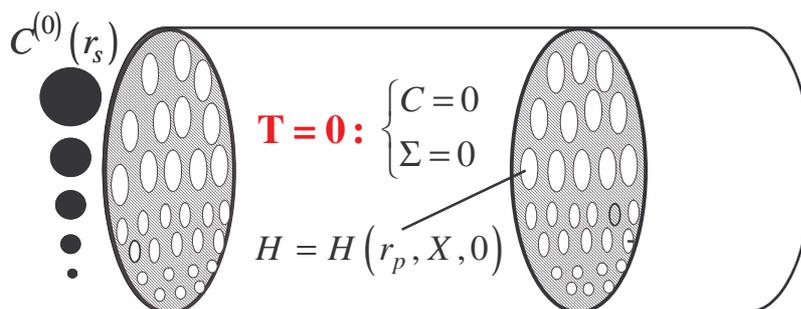


Figura 6: Esquema mostrando as condições iniciais e de contorno

O sistema de equações (3.30) é similar as equações de Einstein-Smoluchowski (Landau e Lifshitz, 1980) e a sua solução determina a evolução das concentrações C , Σ e H (comparar a Figura 6 e a Figura 7).

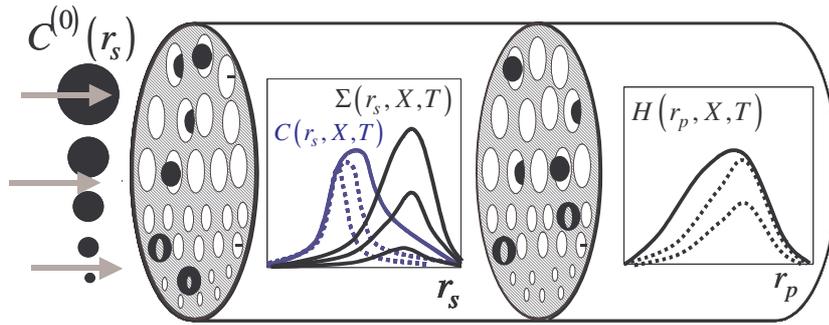


Figura 7: Evolução das concentrações C , Σ e H .

O sistema (3.30) sujeito as condições iniciais e de contorno (3.32) podem ser re-escritos em termos das concentrações totais (3.2), (3.9), (3.11), e das funções de distribuição de probabilidades para os raios das partículas e dos poros (3.1):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial [\gamma(r_s, X, T) f_s(r_s, X, T) c(X, T)]}{\partial T} + \frac{\partial [\alpha(r_s, X, T) f_s(r_s, X, T) c(X, T)]}{\partial X} = \\ & \qquad \qquad \qquad = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial [f_T(r_s, X, T) \sigma(X, T)]}{\partial T} \\ & \frac{\partial [f_T(r_s, X, T) \sigma(X, T)]}{\partial T} = \phi f_s(r_s, X, T) c(X, T) \frac{\int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 f_p(r_p, X, T) dr_p}{\int_0^{\infty} r_p^4 f_p(r_p, X, T) dr_p} \\ & \frac{\partial [f_p(r_p, X, T) h(X, T)]}{\partial T} = -\phi c(X, T) \frac{r_p^4 f_p(r_p, X, T)}{\int_0^{\infty} r_p^4 f_p(r_p, X, T) dr_p} \int_{r_p}^{\infty} \lambda(r_s, r_p) f_s(r_s, X, T) dr_s \end{aligned} \right. \quad (3.33)$$

$$\left\{ \begin{aligned} X=0: c(0, T) &= c^{(0)}(T); \quad f_s(r_s, 0, T) = f_s^{(0)}(r_s, T) \\ T=0: c(X, 0) &= 0; \quad \sigma(X, 0) = 0; \quad h(X, 0) = h_0(X); \quad f_p(r_p, X, 0) = f_{p0}(r_p, X) \end{aligned} \right. \quad (3.34)$$

A integração da eq. (3.14) sobre r_p de zero até infinito, considerando (3.25), resulta em:

$$\frac{\partial h}{\partial T} = -\frac{\partial \sigma}{\partial T}. \quad (3.35)$$

A eq. (3.35) é uma lei de conservação que mostra que uma partícula pode obstruir somente um poro e vice versa.

Da eq. (3.35), segue que:

$$h(X, T) = h_0(X) - \sigma(X, T). \quad (3.36)$$

3.3. Problema de Goursat: dinâmica de captura de partículas e bloqueio de poros na face de entrada do meio poroso

A segunda e a terceira equação do sistema (3.30) não contém derivada em relação à coordenada X , portanto não é necessário fixar as correspondentes concentrações na seção de entrada ($X=0$) do meio poroso (este é conhecido como o problema de Goursat; Tikhonov e Samarskii, 1990). Isto significa que as concentrações das espécies imóveis (poros e partículas capturadas) não são fixadas. Entretanto, essas concentrações podem ser calculadas utilizando as condições de contorno para as espécies móveis (partículas em suspensão) e as equações que descrevem a evolução para as espécies imóveis (segunda e terceira equações do sistema (3.30)).

Fixando $X = 0$ no sistema (3.30) e substituindo a condição de contorno (3.32) na segunda e na terceira equação do sistema (3.30), resulta num sistema de duas equações íntegro-diferencial ordinária para poros e partículas capturadas na seção de entrada do meio poroso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Sigma^{(0)}(r_s, T)}{dT} = \phi C^{(0)}(r_s, T) \frac{\int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 H^{(0)}(r_p, T) dr_p}{\int_0^\infty r_p^4 H^{(0)}(r_p, T) dr_p} \\ \frac{dH^{(0)}(r_p, T)}{dT} = -\phi \frac{r_p^4 H^{(0)}(r_p, T)}{\int_0^\infty r_p^4 H^{(0)}(r_p, T) dr_p} \int_{r_p}^\infty \lambda(r_s, r_p) C^{(0)}(r_s, T) dr_s \end{array} \right. \quad (3.37)$$

onde:

$$H^{(0)}(r_p, T) = H(r_p, X = 0, T), \quad \Sigma^{(0)}(r_s, T) = \Sigma(r_s, X = 0, T). \quad (3.38)$$

A segunda eq. (3.37) é independente da primeira equação, e pode ser resolvida separadamente. Subseqüentemente, a primeira equação permite calcular a cinética de captura de partículas.

Como não existem partículas capturadas ou poros obstruídos no início ($T=0$) do processo de filtração profunda, as condições iniciais para o sistema (3.37) são as seguintes:

$$\Sigma^{(0)}(r_s, T = 0) = 0; \quad H^{(0)}(r_p, T = 0) = H_0^{(0)}(r_p). \quad (3.39)$$

A filtração na face de entrada é encerrada no momento em que a concentração de poros $H^{(0)}$ atinge o limite de percolação ($H_c^{(0)} = H^{(0)}(r_p, T_{tr})$). Portanto, a partir da solução da segunda equação do sistema (3.37) pode-se calcular o tempo de transição (T_{tr}) para um processo de filtração profunda.

A solução $H^{(0)}(r_p, T)$ resulta no cálculo do fluxo de partículas $C^{(0)}(r_s, T)[1 - \alpha^{(0)}(r_s, T)]U$ com raio r_s que formam o reboco externo desde o início do processo de filtração. Desta forma, a formação do reboco externo antes do tempo de transição, quando as partículas ainda penetram no meio poroso, é descrito.

A determinação do tempo de transição e a formação do reboco externo são discutidos no capítulo 7.