2
Teoria da Resposta ao Item não-paramétrica

2.1.
Introdução

A metodologia da Teoria de Resposta ao Item propõe modelos que representam a relação entre o traço latente do indivíduo e a probabilidade deste indivíduo produzir uma determinada resposta a um item do questionário. Uma representação dessa relação é chamada de função resposta do item. Mais especificamente, a Teoria da Resposta ao Item afirma que probabilidade de resposta está determinada por: a) o valor do traço latente do indivíduo; b) o valor das características do item.

Quando a forma de representar a relação entre o traço latente do indivíduo e a probabilidade de resposta é uma função algébrica bem definida (como, por exemplo, a logit ou a probit para respostas dicotômicas), o traço latente do indivíduo e as características do item figuram como parâmetros desta função. Neste caso temos a formulação paramétrica da TRI como as que foram propostas por Lord (1952), Rasch (1960) e Birnbaum (1968). Uma formulação não-paramétrica, que não impõe uma forma algébrica explícita para a função resposta do item, foi proposta por Mokken (1971).

Na década de 60, Mokken desenvolveu um procedimento para a análise da escala formada por um conjunto de itens que ficou conhecido como Escala de Mokken. Essa teoria pode ser vista como uma versão probabilística da escala de Guttman (1945) e define, de maneira geral, a Teoria da Resposta ao Item não-paramétrica (TRIN).

Em contraste com os modelos da teoria paramétrica, a TRIN de Mokken não impõe uma forma algébrica para as funções resposta, nem exige qualquer suposição a respeito da distribuição do traço latente na população ou sobre os parâmetros dos itens.

Neste capítulo apresentamos os dois modelos não-paramétricos de Mokken (1979), o modelo de homogeneidade monótona e o modelo de dupla monotonicidade.

O material teórico deste capítulo foi baseada no livro "*Introduction to Nonparametric Item response Theory*" de Sijtsma e Molenaar (2002).

2.2. Teoria da Resposta ao Item não-paramétrica

A Teoria da Resposta ao Item paramétrica e a Teoria da Resposta ao Item não-paramétrica começam com a definição do mesmo conceito. Ambas definem a função resposta ao item como a probabilidade de acerto no item, dado que o respondente tem θ como valor no traço latente. Considerando apenas itens de respostas dicotômicas (digamos, 0 representa resposta errada e 1 a resposta correta), pode-se definir formalmente a função de resposta ao item i, $P_i(\theta)$ como:

$$P_i(\theta) = P(X_i = 1 \mid \theta) . \qquad (2.1)$$

O indivíduo com característica θ tem uma probabilidade de acertar o item *i* igual a $P_i(\theta)$.

A partir daí as teorias paramétricas e não-paramétricas tomam caminhos diferentes. A teoria paramétrica impõe uma expressão algébrica para a função resposta $P_i(\theta)$, por exemplo, a função logística. A teoria não paramétrica não impõe uma expressão algébrica definida, exige apenas que $P_i(\theta)$ seja monotonamente não decrescente em θ, ou seja: $\theta_a < \theta_b \Rightarrow P_i(\theta_a) \leq P_i(\theta_b)$.

2.3. Hipóteses do modelo

A qualidade do ajuste do modelo depende do grau com que os dados satisfazem às hipóteses do modelo. No modelo não-paramétrico da homogeneidade monótona, três hipóteses são fundamentais: unidimensionalidade, independência local e monotonicidade da função resposta ao item. As duas primeiras hipóteses também são fundamentais nos modelos paramétricos. A terceira hipótese caracteriza ao modelo de homogeneidade monótona. Uma quarta hipótese é exigida para o modelo de dupla monotonicidade: as funções resposta ao item não devem se cruzar.

2.3.1. Unidimensionalidade

Esta hipótese afirma que todos os itens no teste medem o mesmo traço latente. A interpretação psicológica desta hipótese afirma que todos os itens medem uma mesma habilidade, por exemplo, como resolver frações ou uma mesma atitude, como por exemplo, a opinião sobre temas controversos. A interpretação matemática desta hipótese afirma que necessitamos somente um traço latente θ para a descrição da estrutura dos dados.

2.3.2. Independência local estocástica

Esta hipótese afirma que a probabilidade do indivíduo responder positivamente ao item *i*, não é afetada pelas respostas aos itens anteriores, nem tampouco a resposta dada a este item *i* afeta a probabilidade de resposta aos itens subseqüentes. A hipótese não é satisfeita quando ocorre o que se pode chamar de aprendizado pela prática (que pode ocorrer durante o próprio teste), ou ainda, nas respostas a questões controversas e polêmicas, quando o respondente pode escolher uma opção mais socialmente aceita, mesmo que seja diferente da sua própria opinião. Nestes dois exemplos o traço latente θ do indivíduo varia durante a aplicação do teste. A independência local supõe que θ permaneça o mesmo durante toda a aferição.

A hipótese de independência junto com a unidimensionalidade pode ser formalizada da seguinte maneira. Seja X o vetor que contém as variáveis aleatórias do escore de k itens $X = (X_1, X_2, ... X_k)$ e x uma realização de *X*, $x = (x_1, x_2, ... x_t)$. Para itens dicotômicos x_i é sempre 0 ou 1. A probabilidade de obter o escore x_i no item *i* é escrita $P(X_i = x_i / \theta)$. Independência local significa que:

$$P(X = x \mid \theta) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i = x_i \mid \theta). \qquad (2.2)$$

2.3.3. Monotonicidade

Esta hipótese impõe a condição de que a probabilidade condicional de acertos seja não decrescente em função do traço latente, ou seja, para todo item *i*, $P_i(\theta)$ deve ser monótona não decrescente em θ. A afirmação inversa vale para a probabilidade condicional de erros, que deve ser não crescente, uma vez que:

$$P(X_i = 0 \mid \theta) = 1 - P(X_i = 1 \mid \theta). \qquad (2.3)$$

2.3.4. Não cruzamento das funções resposta

Na maioria das aplicações da TRIN as três hipóteses anteriores são suficientes, principalmente quando o objetivo é ordenar as pessoas pela característica latente. Também, em algumas aplicações a ordenação dos itens por dificuldade é importante. Isto ocorre, por exemplo, em testes adaptativos, quando as questões que as pessoas respondem são escolhidas de acordo com a habilidade de cada um. Nestes casos a habilidade do indivíduo e as dificuldades das questões devem estar medidas na mesma escala linear. Para obter uma escala única uma quarta hipótese é necessária. Ela afirma que as k funções de resposta dos k itens do teste não se cruzam.

O não cruzamento das funções resposta ao item significa que os itens podem ser ordenados independentemente de θ, ou seja:

$$P_1(\theta) \leq P_2(\theta) \ldots \leq P_k(\theta), \text{ para todo } \theta. \qquad (2.4)$$

A relação acima é chamada de **ordenamento invariante**, onde o item k é o item mais fácil e o item 1 é o mais difícil. Esta propriedade do ordenamento invariante é importante também quando se deseja comparar respondentes de diferentes grupos. Na figura 2.1 mostra-se graficamente o não cruzamento das funções resposta de 4 itens.

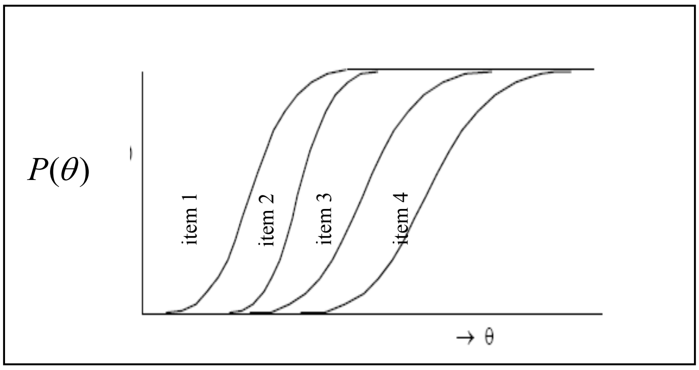

Figura 2.1- Não cruzamento das funções de resposta de 4 itens.

2.3.5.
Modelo de Homogeneidade Monótona

O modelo de homogeneidade monótona é a versão mais fraca do método de Mokken, a que impõe menos restrições sobre os dados. Este modelo se baseia nas três primeiras hipóteses discutidas acima, unidimensionalidade, independência e monotonicidade.

O modelo descreve as respostas geradas por um conjunto de itens unidimensionais cujas funções respostas são monotonamente relacionadas com o traço latente.

Mokken (1971) mostrou que o escore verdadeiro da Teoria Clássica do Teste e o traço latente, estimado de uma pessoa através dos modelos TRIN, possuem uma mesma ordenação. Como o modelo de homogeneidade monótona não define a função resposta ao item de maneira paramétrica, não se pode calcular o traço latente**.** Neste modelo, a melhor estimativa para o traço latente é o escore total do indivíduo, que vamos chamar de X^+, a soma dos acertos nos itens do teste. O escore total ordena os indivíduos com relação ao traço latente θ. Portanto, o modelo de homogeneidade monótona é um modelo de TRI que mede características das pessoas em uma escala ordinal.

Tecnicamente isto quer dizer o seguinte: seja c um valor qualquer do traço latente θ, e seja x_1 e x_2 dois valores do escore total X^+; no modelo de homogeneidade monótona a seguinte relação é válida:

$$P(\theta > c \mid X+ = x_1) \leq P(\theta > c \mid X+ = x_2)\text{, para } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq t. \qquad (2.5)$$

A desigualdade acima diz que os respondentes podem ser estocásticamente ordenados em θ por meio de X^+. Isto fica mais claro reescrevendo a desigualdade em termos da média de θ:

$$E(\theta \mid X+ = x_1) \le E(\theta \mid X+ = x_2), \text{ para } 0 \le x_1 \le x_2 \le t. \qquad (2.6)$$

Em outras palavras, a média de θ no grupo de pessoas com escore total de x_2 é maior ou igual à média de θ no grupo de pessoas com escore total menor x_1. Pode-se colocar as pessoas em ordem, pelos valores de θ, seguindo a sua ordem no escore total X^+ mesmo não sendo possível obter para elas um valor individual para o traço latente θ, como é possível na teoria paramétrica.

Nas duas desigualdades acima (eq. (2.5) e eq. (2.6)) as posições de θ e X^+ podem ser invertidas (Sijtsma & Molenaar, 2002). Assim, para dois valores fixos do traço latente, θ_a e θ_b, e um valor qualquer de $X^+ = x_o$ o modelo de homogeneidade monótona implica no ordenamento de X^+por meio de θ expresso na relação:

$$P(X^+ \ge x_0 \mid \theta = \theta_a) \le P(X^+ \ge x_0 \mid \theta = \theta_b), \text{ para } \theta_a \le \theta_b. \qquad (2.7)$$

E, também, na desigualdade entre as médias condicionais de X^+ dado θ:

$$E(X^+ \mid \theta = \theta_a) \le E(X^+ \mid \theta = \theta_b), \text{ para } \theta_a \le \theta_b. \qquad (2.8)$$

Este último resultado mostra que quanto mais alto o valor de θ mais alto é o escore total esperado no teste.

2.3.6. Modelo de Dupla Monotonicidade

O modelo de dupla monotonicidade (Mokken, 1971) é mais restritivo e baseia-se nas três hipóteses do modelo de homogeneidade monótona mais a hipótese de não cruzamento das funções de resposta ao item. Como é um caso especial do modelo de homogeneidade monótona, todas as propriedades deste modelo valem para modelo de dupla monotonicidade. E, ainda, todo conjunto de dados que pode ser explicado por este modelo pode também ser explicado pelo modelo mais fraco, menos restritivo, o modelo de homogeneidade monótona. Nas aplicações que vamos apresentar esta quarta hipótese não será necessária.

2.4. Testes para o Modelo de Homogeneidade Monótona

Para se verificar a validade das hipóteses do modelo de homogeneidade monótona alguns testes estão disponíveis.

2.4.1. Covariâncias não negativas

A terceira hipótese do modelo de homogeneidade monótona é a do não decrescimento das funções resposta em θ. Esta é uma hipótese que não pode ser verificada diretamente pois θ é uma variável latente, não observável diretamente. Uma conseqüência observável do modelo de homogeneidade monótona é o teorema seguinte (ver Sijtsma & Molenaar, 2002).

Teorema 1.- Se o modelo de homogeneidade monótona é válido, ou seja, as hipótese de unidimensionalidade, independência local e monotonicidade são satisfeitas, então as covariâncias entre qualquer par de itens é não negativa.

Este é um teorema importante por duas razões, embora ele não resolva todos os problemas envolvidos na verificação da monotonicidade das funções resposta. A primeira é que a condição de não negatividade das covariâncias de pares de itens é apenas uma condição necessária, mas não suficiente para que as funções de resposta ao item sejam não decrescentes. É fácil imaginar um contra-exemplo em que a curva decresce em um pequeno intervalo de θ, cuja contribuição negativa para a covariância com qualquer outro item é inteiramente compensada por contribuições positivas mais fortes em outros intervalos de θ. A segunda é que o erro amostral pode fazer com que a covariância estimada seja negativa apesar da covariância populacional ser positiva, e vice-versa.

2.4.2.
Definição do item, escalograma e erro de Guttman

O modelo de resposta de Guttman (1945), ao contrário dos modelos da teoria da reposta ao item é um modelo determinístico. Supondo que a habilidade das pessoas seja unidimensional e que possa ser descrita pela posição de um ponto na reta horizontal, a probabilidade delas acertarem um item será sempre 0 ou 1. A função resposta para um item de Guttman é uma função degrau ilustrada na figura 2.2.

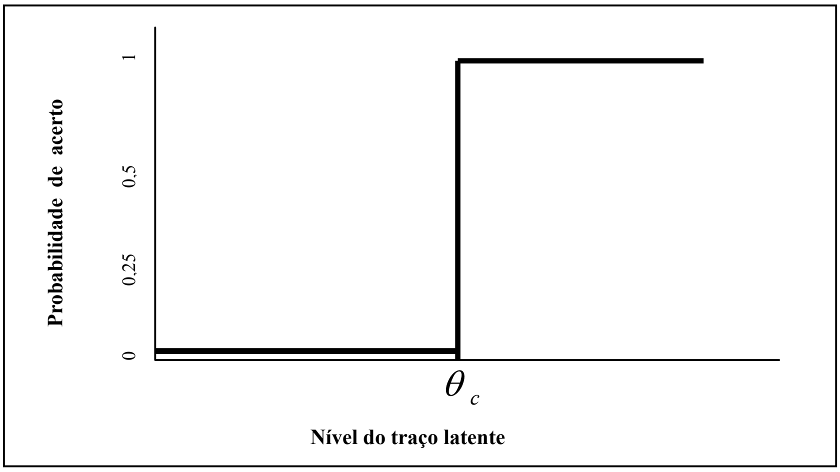

Figura 2.2-Função de resposta do modelo determinístico de Guttman.

Na figura 2.2, observa-se que uma pessoa sempre acerta ou erra o item, dependendo de onde ela se situa no eixo do traço latente. O ponto de descontinuidade θ_c, que define o limiar entre o acerto e o erro, é a dificuldade do item. Pessoas que se situam abaixo desta dificuldade (ou seja para quem o item é mais difícil do que a habilidade delas, $\theta < \theta_c$) sempre erram o item, e pessoas que se situam acima da dificuldade (para quem o item é mais fácil do que a habilidade delas, $\theta > \theta_c$) sempre acertam o item. Quando não se cumpre esta relação, diz-se que existe "erro de Guttman".

Na análise do escalograma de Guttman, os itens são ordenados de acordo com os valores crescentes de p (a proporção de respostas corretas). Diz-se então, que estes itens formam uma "escala de Guttman" quando, dado o escore total das pessoas, é possível determinar aqueles itens nos quais as pessoas responderam corretamente. Isto implica que as pessoas que responderam corretamente aos itens mais difíceis (baixo *p*) também responderam corretamente os itens mais fáceis (elevado *p*). Na tabela 2.1, mostramos quatro padrões de resposta e como eles se relacionam com a escala de Guttman. Suponha que os itens de 1 a 4 estejam ordenados por dificuldade, do mais fácil ao mais difícil, ou seja, em ordem decrescente no valor de *p*. Cada linha representa um padrão de resposta possível.

Tabela 2.1-Tipos de escalograma de Guttman.

+ fácil	$\longrightarrow$			+difícil
Item 1	**Item 2**	**Item 3**	**Item 4**	
1	**1**	**1**	**1**	escala perfeita
1	**1**	**1**	**0**	escala perfeita
0	**0**	**0**	**1**	*3 erros*
0	**0**	**1**	**0**	*2 erros*

A primeira e segunda linha mostram dois padrões que estão de acordo com a escala perfeita de Guttman. A terceira e quarta linha mostram exemplos de padrões que apresentam erros de Guttman. A primeira linha diz que a pessoa respondeu corretamente ao item mais difícil (item 4) e que também acertou os outros itens mais fáceis. Na segunda linha diz que a pessoa errou o item mais difícil, mas acertou o item 3 e também acertou os itens 1 e 2, mais fáceis que o item 3. Na terceira linha observa-se que o indivíduo conseguiu responder o item mais difícil, mas errou os três primeiros itens mais fáceis: um padrão de resposta com três erros de Guttman, um erro para cada item errado. Na quarta linha o indivíduo erra os item 1 e 2 (mais fáceis), mas acerta o item 3, mais difícil**:** um padrão de resposta contendo dois erros de Guttman. De forma prática, o número de erros de Guttman é contado como o número de vezes que o 0 aparece antes do 1, quando os itens estão ordenados por dificuldade crescente. Assim, diz-se que existe erro de Guttman quando um respondente erra um item mais fácil e acerta um item mais difícil. Na prática, a escala perfeita de Guttman raramente é encontrada (Paas, 1998 & Kingma, 1984).

2.4.3. Escalonabilidade para um par de itens

Por convenção vamos escrever os itens na ordem de dificuldade crescente: itens mais fáceis no começo e itens mais difíceis no fim. Assim, para $P_j > P_i$, define- se:

$$H_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{Cov_{\max}(X_i, X_j)} = \frac{Corr(X_i, X_j)}{Corr_{\max}(X_i, X_j)} \text{ , } i\text{=1,2,...,}k. \tag{2.9}$$

Onde Cov e $Corr$ são as covariâncias e correlações na população. O índice H_{ij}, chamado de coeficiente de escalonabilidade de Loevinger (1948), mede quanto os dois itens, quando colocados juntos, se afastam do escalograma perfeito de Guttman. O índice H_{ij} assume o valor de 1 quando não existe erro de Guttman e valor de 0 quando as respostas aos itens são inteiramente independentes.

Chamando de P_{ij} a probabilidade de acerto simultâneo nos dois itens i e j, onde $P_i < P_j$, pode-se escrever a covariância entre as respostas aos itens i e j como $Cov(X_i, X_j) = P_{ij} - P_i P_j$. Não haver erro de Guttman significa que a probabilidade de acertar o item mais difícil e errar o item mais fácil é zero, ou seja, $P_i - P_{ij} = 0$ (ver tabela 2.2). Assim $Cov_{\max}(X_i, X_j) = P_{ij} - P_i P_j = P_i - P_i P_j$, e portanto:

$$H_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{Cov_{\max}(X_i, X_j)} = \frac{P_{ij} - P_i P_j}{P_i - P_i P_j} = 1 - \frac{P_i - P_{ij}}{P_i - P_i P_j} \text{, } 0 \le H_{ij} \le 1. \tag{2.10}$$

Na eq. (2.10), pode-se observar que H_{ij} pode ser escrito como 1 menos a razão entre probabilidades do erro de Guttman $P_i - P_{ij}$ e a probabilidade esperada sob a hipótese de independência estatística entre os escores dos itens i e j, $P_i(1 - P_j)$. Os estimadores amostrais de $P_i - P_{ij}$ e $P_i(1 - P_j)$ são F_{ij} / n e E_{ij} / n, respectivamente, onde F_{ij} é a freqüência observada e E_{ij} é a freqüência esperada quando ambos itens são respondidos corretamente.

Na tabela 2.2, mostramos as probabilidades no caso geral, de onde se obtém a covariância, e no caso de ausência de "erro de Guttman", de onde se obtém a covariância máxima.

Tabela 2.2-Modelo de probabilidades para par de itens, caso geral e correlação máxima

		Caso Geral			**Correlação máxima (escalograma perfeito de Guttman)**		
		Item difícil					
		$x_i = 0$	$x_i = 1$	**Total**	$x_i = 0$	$x_i = 1$	**Total**
Item fácil	$x_j = 0$	$1-P_i-P_j+P_{ij}$	P_i-P_{ij}	$1-P_j$	$1-P_j$	**0**	$1-P_j$
	$x_j = 1$	P_j-P_{ij}	P_{ij}	P_j	P_j-P_i	P_i	P_j
	Total	$1-P_i$	P_i	1	$1-P_i$	P_i	1

Na tabela 2.3 apresentamos um exemplo numérico. São as freqüências observadas nas respostas a dois itens das escalas que serão analisadas no próximo capítulo. Os dois itens são dicotômicos: "**tem internet em casa**" e "**tem mais de um televisor em casa**". As respostas positivas recebem o valor de 1 e as negativas o valor 0.

Tabela 2.3-Freqüências dos itens "tem mais de um televisor" e "tem internet em casa"

		Item difícil: internet		
		$x_i = 0$	$x_i = 1$	**Total**
Item fácil: televisor	$x_j = 0$	1152	<u>52</u>	**1204**
	$x_j = 1$	833	85	**918**
	Total	**1985**	**137**	**2122**

Onde:

Item *i*: tem internet em casa.

Item *j*: tem mais de um televisor em casa.

A freqüência esperada é:

$$E_{ij} = \frac{137 * 1204}{2122} = 77{,}73$$

Uma estimativa para o coeficiente de escalonabilidade dos itens *i* e *j* é:

$$\hat{H}_{ij} = 1 - \frac{F_{ij}/n}{E_{ij}/n} = 1 - \frac{52/2122}{77{,}73/2122} = 0{,}331$$

2.4.4. Escalonabilidade de um item

Supondo agora que o teste é constituído por *k* itens, e que se queira definir o índice H_i , de um item $i = 1, ..., k$ com relação à escala definida pelo teste. Este coeficiente será derivado a partir da definição da escalonabilidade de um par de itens H_{ij}. O coeficiente H_i é uma medida da qualidade do ajuste do item *i* à escala. Qualquer item do teste possui covariância com todos os *k*-1 itens restantes e a soma destas covariâncias desempenha na definição de H_i o mesmo papel que a covariância entre dois itens desempenha na definição de H_{ij}. Uma maneira condensada de escrever a definição de H_i é introduzir a notação $R_{(i)}$ para designar a soma dos escores em todos os itens excetuando o *i*-ésimo item. $R_{(i)}$ será chamado de **escore do resto**. Tem-se então que o escore total é sempre a soma do escore no item *i* mais o escore do resto, $X^+ = X_i + R_{(i)}$. Assim pode-se escrever:

$$H_i = \frac{Cov(X_i, R_{(i)})}{Cov_{\max}(X_i, R_{(i)})}, \tag{2.11}$$

$$H_i = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} Cov(X_i, X_j)}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} Cov_{\max}(X_i, X_j)}, \tag{2.12}$$

$$H_i = \frac{\sum_{j \neq i}^{k} (P_{ij} - P_i.P_j)}{\sum_{j>i}^{K} (P_i - P_i P_j) + \sum_{j<i}^{k} (P_j - P_i P_j)}, \quad 0 \leq H_i \leq 1 \ . \tag{2.13}$$

Este valor da população pode ser estimado por:

$$\hat{H}_i = 1 - \frac{\sum_{i \neq j}^{k} F_{ij}}{\sum_{i \neq j}^{k} E_{ij}} \; . \tag{2.14}$$

Todas estas proporções populacionais podem ser estimadas pelas respectivas frações amostrais. A última fórmula afirma que uma estimação de H_i pode ser obtida pela subtração de 1 da divisão da soma das freqüências de todos os erros de Guttman nos quais o item *i* está envolvido pela soma de seus valores esperados sob a hipótese de independência.

2.4.5. Escalonabilidade do teste

Finalmente podemos definir a escalonabilidade de todo o teste, o coeficiente *H*, como:

$$H = \frac{\sum_{i}^{k} Cov(X_i, R_{(i)})}{\sum_{i}^{k} Cov_{\max}(X_i, R_{(i)})} \; . \tag{2.15}$$

A estimação deste índice H, é feita como antes, através das proporções amostrais**.** Na eq.(2.16) o numerador da fração contém a soma das freqüências dos *k(k-**1**)* erros de Guttman dos *k(k-**1**)* pares de itens e o denominador a soma correspondente das freqüências sob independência, mantidas as marginais.

$$H = 1 - \frac{\sum_{i}^{k} \sum_{j \neq i}^{k} (P_i - P_{ij})}{\sum_{i}^{k} \sum_{j > i}^{k} (P_i - P_i P_j) + \sum_{i}^{k} \sum_{j < i}^{k} (P_j - P_i P_j)} \; . \tag{2.16}$$

2.4.6. Escala de Mokken

Os dois modelos de Mokken (1971) podem ser vistos como uma versão probabilística do modelo de Guttman (1945). Assim, quando todos os coeficientes H_{ij} são iguais a 1, e em consequência os H_i também são iguais a 1, os itens estarão mais perto do escalograma perfeito de Guttman. Sem embargo, não é necessário que todos os itens apresentem esta característica pois o modelo de Mokken é probabilístico e não determinístico.

Diz-se que um conjunto de k itens forma uma escala de Mokken se todos os itens satisfazem às seguintes condições:

a) $Cov(X_i, X_j) > 0$.

b) $H_i \geq c$, para todo i, onde c é uma constante definida pelo pesquisador, que varia entre 0 e 1.

A primeira condição segue das três primeiras hipótese do modelo de homogeneidade monótona, e é equivalente a $Cor(X_i, X_j) > 0$. Esta equação implica que $H_{ij} > 0$; o quer dizer que dentro de uma mesma escala todos os pares de itens devem ter coeficientes de escalonabilidade H_{ij} positivos.

A segunda condição é um requisito prático para a construção da escala. O propósito é incluir somente itens que discriminam as pessoas razoavelmente bem (Sijtsman, 1998). Escolhendo um valor elevado c para H_i, serão selecionados itens com alto poder de discriminação, sendo excluídos os itens com baixo poder de discriminação. Valores negativos de H_i entram em conflito com o modelo de homogeneidade monótona. O valor mínimo recomendado para c é 0,30[2]. A segunda condição acima implica em $H \geq c$. Um valor de c alto significa uma

---

[2] O limite inferior de 0,30 para o coeficiente H foi originariamente sugerido por Mokken (1971), porque um valor positivo de H não é uma condição suficiente para o modelo de homogeneidade monótona e valores baixos de H levariam a um ordenamento inadequado ou incorreto dos respondentes. Assim, itens com H_i pequenos entre 0 e 0,30, embora sejam positivos, têm baixo poder de discriminação e, às vezes, suas funções de resposta são decrescente sobre pequenos intervalos de θ.

escala poderosa, no sentido que há maior precisão na ordenação das pessoas de acordo com seu traço latente baseado no seus escores totais X^+ dos itens selecionados[3].

Resumindo, para se obter uma escala que faça sentido os itens devem ter: i) correlação positiva entre pares de itens; ii) itens com $H_i > c$, pelo menos, iii) $H > c$, pelo menos. A primeira condição significa que se está medindo um traço comum; a segunda diz que o poder de discriminação está determinado pelo valor de c; e a terceira se diz que o teste como um todo permite uma confiabilidade razoável (ao nível determinado pela constante c) no ordenamento de pessoas em θ, usando o escore total X^+.

2.4.7. Propriedades dos coeficientes de escalonabilidade

Nesta secção apresentamos dois resultados importantes sobre os índices definidos acima e algumas conseqüências que auxiliam na interpretação dos resultados.

Teorema 2 .- Para qualquer par de itens i e j tem- se

$$\min_j H_{ij} \le H_i \le \underset{j}{máx}\, H_{ij}$$
$$\min_i H_{ij} \le H \le \underset{i}{máx}\, H_{ij}$$
$$e$$
$$\min_{i,j} H_{ij} \le H \le \underset{i,j}{máx}\, H_{ij}$$

Teorema 3 .- Se as hipóteses do modelo de homogeneidade monótona são satisfeitas, então os valores populacionais dos H's satisfazem as relações.

$$0 \le H_{ij} \le 1 \text{ , para todo } i,j = 1, ..., k\ i \ne j$$

$$0 \le H_i \le 1 \text{ , para todo } i = 1, ...\ k \quad \text{e}$$

$$0 \le H \le 1 \text{ .}$$

[3] Se $0{,}30 \le H < 0{,}40$ se diz que o conjunto de itens formam uma escala fraca; $0{,}40 \le H < 0{,}50$ indica uma escala razoável; $H \ge 0{,}50$ indica que os itens formam uma escala forte.

Quando H=1 não existe erro de Guttman. Quando H=0 para um par de itens ou para todo o teste, significa que as respectivas somas das covariâncias são nulas. Uma situação pouco provável na prática, mas teoricamente muito interessante, ocorre quando todas as pessoas têm o mesmo valor no traço latente. Assim, todas as covariâncias entre os escores dos itens são nulas (Teorema 1). Os itens ainda podem ser ordenados pela dificuldade, mas a ordenação de pessoas agora reflete somente erro de medição e não diferenças genuínas na variável latente. Os valores da escalonabilidade dos pares de itens, de cada item e do teste são todos zero.

Valores negativos da escalonabilidade pode ocorrer por duas razões. A primeira dela é a flutuação amostral. Para tamanhos de amostras pequenos um valor populacional positivo pode ter uma estimativa negativa. A segunda razão é a violação das hipótese do modelo de homogeneidade monótona. Se o modelo não vale, a escalonabilidade do par H_{ij} pode ser negativa, e, dependendo do valor de P_{ij}, pode ser até menor que -1.

2.5.
Extensão da TRIN para itens politômicos

Neste capítulo apresentamos as extensões do modelo de homogeneidade monótona para itens com escores ordenados, chamado de itens politômicos. Assume-se que os itens têm como resposta X_i = 0,1,..., m, para todo $i = 1,...,k$. Significa que cada item têm m+1 categorias de resposta ordenadas. O escore total do teste para k itens politômicos é definido como:

$$X^+ = \sum_{i=1}^{k} X_i \text{ , com } X+ = 0,1,...,m \ x \ k. \qquad (2.17)$$

Deve-se apontar que, no caso de categorias de respostas nominais, como, por exemplo, uma resposta correta e três distrativos num item de múltipla escolha, não é coberto pela teoria não paramétrica para itens politômicos. Os modelos não paramétricos requerem que as $m+1$ categorias de respostas possuam um ordenamento que represente incrementos significativos nos níveis do traço latente.

2.6.
Passo de um item

O passo do item é uma variável de resposta binária, Y_{ih}, definida a partir da resposta ao item X_i, onde i é o índice do item (i = 1,...,k) e o h é escore do item politômico (h = 1,...,m). A definição do passo do item pode ser melhor entendida do seguinte modo:

$$Y_{ih} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{X}_i < h; \quad \text{e} \\ 1 & \text{se } \mathrm{X}_i \geq h. \end{cases}$$

O escore Y_{ih} diz que, se o respondente tem pelo menos um escore h, então $Y_{ih} = 1$; e no caso contrário, $Y_{ih} = 0$.

O passo do item é um traço imaginário entre duas categorias de respostas adjacentes. Para ilustrar este conceito, imaginemos dois itens de atitude positiva com três categorias de respostas ordenadas, discordar, neutro e concordar. Por exemplo, sejam dois itens, k=2, onde os escores dos itens são: X_1 (item 1) = 1 e X_2 (item 2) = 3. Utilizando a definição de Y_{ih} temos:

- Um escore do item 1 igual a 1, implica: $Y_{1h=1}$=1, $Y_{1h=2}$=0 e $Y_{1h=3}$= 0.
- Um escore do item 2 igual a 3, implica: $Y_{2h=1}$=1, $Y_{2h=2}$=1 e $Y_{2h=3}$=1.

A partir da definição da variável passo do item, Y_{ih}, obtemos dois resultados:

Primeiro, nota-se que, para um item com m+1 categorias de resposta, existem m variáveis passo do item, Y_{ih}, h =1,2,...,m. Então a relação entre X_i e Y_{ih} é:

$$X^{+} = \sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{h=1}^{m} Y_{ih} \text{ , com } X^{+} = 0,1,\ldots,m \; x \; \mathrm{k}. \tag{2.18}$$

Isto é, o escore total X^{+} conta o número total de passos do item bem sucedidos sobre k itens.

E segundo, define-se a função resposta passo do item como:

$$P_{ih}(\theta) = P(Y_{ih} = 1 \mid \theta) = P(X_i \geq h \mid \theta) \text{, para } i = 1,....,k, \text{ e } h = 1,...,m. \tag{2.19}$$

A diferença do modelo de homogeneidade monótona para itens politômicos, com o modelo de homogeneidade monótona para itens dicotômicos, está na hipótese de monotonicidade, que agora é aplicada à função resposta do passo do item. A eq.(2.19) mostra a probabilidade de obter um escore pelo menos h no item i. Note-se que, quando h = 0, a probabilidade é 1 para cada θ, o que não dá informação sobre o comportamento do item. Cada item com m+1 categorias de resposta tem m funções resposta do passo do item. O modelo de homogeneidade monótona assume que cada uma destas funções resposta são monótonas não decrescentes em θ.

Deve-se apontar que, em cada item, as m funções resposta do passo de cada um dos itens não podem se cruzar, por definição. Para entender melhor isto, escreve-se:

A probabilidade de obter pelo menos um escore h pode ser expressa como a somatória das probabilidades obtendo exatamente o escore h mais a probabilidade obtendo exatamente o escore h+1, e assim por diante, até a probabilidade obtendo exatamente o escore m, ou seja:

$$P_{ih}(\theta) = \sum_{h}^{m} P(X_i = h \mid \theta). \tag{2.20}$$

De maneira similar, a próxima função resposta do passo do item, $P_{ih+1}(\theta)$ pode ser escrita como:

$$P_{ih+1}(\theta) = \sum_{h+1}^{m} P(X_i = h+1 \mid \theta). \tag{2.21}$$

Subtraindo a eq. (2.20) da eq. (2.21), tem-se:

$$P_{ih}(\theta) - P_{ih+1}(\theta) = P(X_i = h \mid \theta). \tag{2.22}$$

Em outras palavras, a *h*–ésima e *h+1*–ésima função resposta do passo do item *i* diferem por uma quantidade não negativa, $P(X_i = h/\theta)$, que pode variar com θ, a qual leva que $P_{ih}(\theta)$ seja pelo menos tão grande como $P_{ih+1}(\theta)$ para todo valor de θ. As funções resposta do passo do item podem coincidir para alguns valores de θ quando $P(X_i = h/\theta) = 0$; sem embargo, o importante aqui é que, ao interior de cada item, as *m* funções não podem cruzar-se. Isto é típico do modelo de homogeneidade monótona para itens politômicos. No entanto, sob este modelo, as funções resposta do passo do item de diferentes itens podem se cruzar.