

2

Determinação dos Campos Modais para o Guia de Onda Coaxial

2.1.

Introdução

Para a análise e o projeto de estruturas coaxiais de acoplamento, objetivos principais deste trabalho, é preciso determinar as expressões dos campos modais existentes no interior de guias de onda coaxiais. Essa determinação é necessária porque o Método do Casamento de Modos utilizado na caracterização do comportamento elétrico dessas estruturas, apresentado no próximo capítulo, pressupõe que os campos em cada seção de guia de onda coaxial sejam expressos pelo somatório dos campos modais no seu interior.

Assim, neste capítulo serão determinadas as expressões dos campos modais existentes nos guias de onda coaxiais. A Figura 2.1 ilustra a geometria de uma seção de guia de onda coaxial e o sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) que será utilizado na representação dos campos. O eixo de simetria do guia de onda coincide com o eixo z , e os cilindros condutores interno e externo têm raio a e b , respectivamente. Assume-se que as paredes desses dois cilindros são compostas de condutores perfeitos. Considera-se que, em cada seção de guia de onda coaxial, o meio de propagação da onda eletromagnética é constante e caracterizado pela permissividade ε e permeabilidade μ . A dependência temporal adotada em todo o trabalho é da forma $e^{j\omega t}$, onde $\omega = 2\pi f$, sendo f a frequência.

Os campos modais \vec{e}_m e \vec{h}_m no interior de uma dada seção de guia de onda coaxial serão obtidos através da solução da equação homogênea de Helmholtz descrita a seguir.

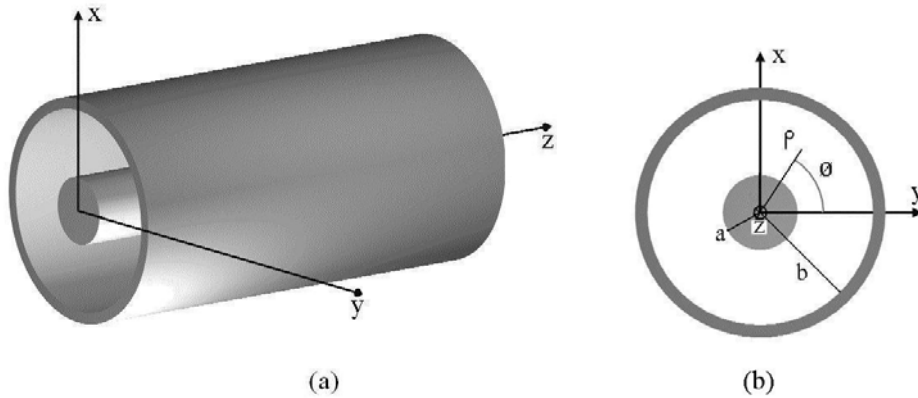


Figura 2.1 – Geometria do problema proposto. (a) seção de guia de onda coaxial e (b) sistema de coordenadas cilíndricas.

2.2. Solução da Equação de Onda Homogênea em Coordenadas Cilíndricas

Como descrito em [10] e [11], os vetores potenciais elétrico \vec{F} e magnético \vec{A} podem ser utilizados para expressar as equações de Maxwell em um meio linear, homogêneo, isotrópico, sem fontes e sem perdas, resultando nas seguintes expressões para os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{H} :

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \frac{1}{\epsilon}\nabla\times\vec{F} \quad (2.1)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} - j\omega\vec{F} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{F}) \quad (2.2)$$

onde \vec{A} e \vec{F} devem satisfazer a equação de onda homogênea:

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla^2\vec{F} + k^2\vec{F} = 0, \quad (2.4)$$

e k é a constante de onda expressa por:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi f\sqrt{\mu\epsilon} \quad (2.5)$$

Para representar de forma genérica a solução das equações homogêneas (2.3) e (2.4), utiliza-se o vetor $\vec{\psi}$, onde $\vec{A}(\rho, \phi, z) = \vec{F}(\rho, \phi, z) = \vec{\psi}(\rho, \phi, z)$, que pode ser representado por:

$$\vec{\psi}(\rho, \phi, z) = \hat{a}_\rho \psi_\rho(\rho, \phi, z) + \hat{a}_\phi \psi_\phi(\rho, \phi, z) + \hat{a}_z \psi_z(\rho, \phi, z) \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) nas equações (2.3) e (2.4), obtém-se:

$$\nabla^2(\hat{a}_\rho \psi_\rho + \hat{a}_\phi \psi_\phi + \hat{a}_z \psi_z) + k^2(\hat{a}_\rho \psi_\rho + \hat{a}_\phi \psi_\phi + \hat{a}_z \psi_z) = 0 \quad (2.7)$$

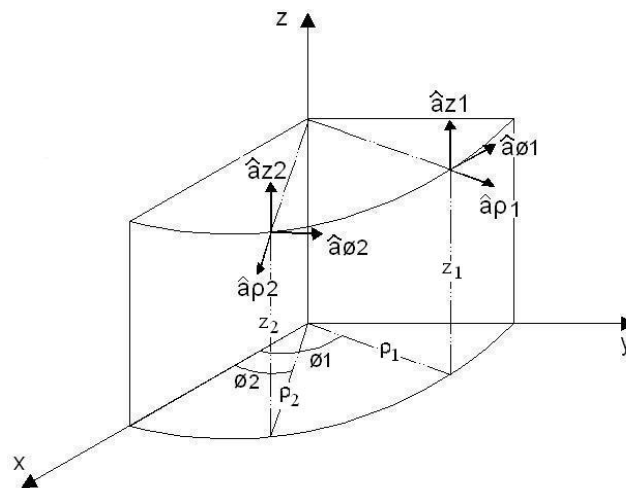


Figura 2.2 – Representação dos vetores unitários em coordenadas cilíndricas para dois pontos distintos (ρ_1, ϕ_1, z_1) e (ρ_2, ϕ_2, z_2) .

Observa-se na Figura 2.2 que, para dois pontos distintos (ρ_1, ϕ_1, z_1) e (ρ_2, ϕ_2, z_2) , os vetores unitários \hat{a}_ρ e \hat{a}_ϕ não são paralelos, o que faz com que os mesmos não possam ser tratados como constantes, pois são função de (ρ, ϕ, z) . Logo, a equação (2.7) nas direções ρ e ϕ resulta em:

$$\nabla^2 \psi_\rho + \left(-\frac{\psi_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \psi_\phi}{\partial \phi} \right) + k^2 \psi_\rho = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \psi_\phi + \left(-\frac{\psi_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \phi} \right) + k^2 \psi_\phi = 0 \quad (2.9)$$

Nas direções ρ e ϕ , (2.7) é representada por um sistema de duas equações diferenciais parciais de segunda ordem, (2.8) e (2.9) respectivamente, envolvendo as duas componentes ψ_ρ e ψ_ϕ . Exigi-se a solução conjunta dessas duas equações diferenciais para chegar-se a uma solução para (2.7).

Por outro lado, para quaisquer pontos distintos na Figura 2.2, os vetores unitários \hat{a}_z são paralelos, fazendo com que, na direção z , a equação vetorial (2.7) seja representada unicamente por:

$$\nabla^2 \psi_z + k^2 \psi_z = 0 \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é conhecida como equação homogênea de Helmholtz e envolve somente a componente ψ_z . Se a solução dessa equação satisfizer as condições de contorno do problema analisado, pode-se dizer que ela representa a solução do problema proposto.

A solução da equação (2.10), descrita em [10], pode ser obtida através do método de separação de variáveis, onde a função de onda escalar ψ_z é representada pelo produto de três funções:

$$\psi_z(\rho, \phi, z) = Z(\rho)G(\phi)H(z) \quad (2.11)$$

A substituição da função ψ_z , dada pela equação (2.11), na equação homogênea de Helmholtz (2.10) resulta em:

$$GH \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} + \frac{GH}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \frac{ZH}{\rho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + ZG \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + k^2 ZGH = 0 \quad (2.12)$$

a qual pode ser representada por três equações diferenciais distintas, onde cada uma envolve unicamente $H(z)$, $G(\phi)$ e $Z(\rho)$.

Para $H(z)$, tem-se:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = -H \beta^2, \quad (2.13)$$

com solução dada por:

$$H(z) = e^{\mp j\beta z} \quad (2.14)$$

A equação (2.14), para β real, representa uma onda se propagando ao longo do eixo z , sendo β a constante de propagação da onda e o sentido é definido pela opção \mp .

A parcela referente a $G(\phi)$ é dada por:

$$\frac{d^2G}{d\phi^2} = -Gl^2, \quad (2.15)$$

que tem como solução:

$$G(\phi) = C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi) \quad (2.16)$$

que representa o comportamento azimutal periódico da distribuição de campo no interior do guia de onda coaxial, onde l representa a dependência azimutal da onda e C_1 e C_2 são constantes arbitrárias que definem a polarização dos campos ao longo da seção transversal do guia.

Para $Z(\rho)$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \left[(k^2 - \beta^2) - \frac{l^2}{\rho^2} \right] Z = 0 \quad (2.17)$$

que apresenta como solução a combinação linear das funções de Bessel de primeira e segunda espécies de ordem l , $J_l(\chi\rho)$ e $N_l(\chi\rho)$, respectivamente, expressa por:

$$Z_l(\rho) = AJ_l(\chi\rho) + BN_l(\chi\rho), \quad (2.18)$$

onde,

$$\chi = \sqrt{k^2 - \beta^2} \quad (2.19)$$

Essa distribuição de campo $Z_l(\rho)$ ao longo da direção ρ representa um comportamento estacionário da onda. Essa função possui infinitas raízes χ que serão determinadas juntamente com os coeficientes A e B, de forma a satisfazer as condições de contorno do problema.

Substituindo (2.14), (2.16) e (2.18) em (2.11), tem-se a função de onda escalar que representa a solução da equação homogênea de Helmholtz, expressa por:

$$\psi_z(\rho, \phi, z) = [AJ_1(\chi\rho) + BN_1(\chi\rho)] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta z} \quad (2.20)$$

A solução encontrada será utilizada para representar tanto o vetor potencial elétrico \vec{A}_z , quanto o vetor potencial magnético \vec{F}_z . As expressões das componentes de campo elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas, obtidas a partir das equações (2.1) e (2.2), em função dos potenciais elétrico e magnético \vec{A}_z e \vec{F}_z , respectivamente, podem ser expressas por [11]:

$$E_\rho = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho\partial z} - \frac{1}{\varepsilon\rho} \frac{\partial F_z}{\partial\phi}, \quad (2.21)$$

$$E_\phi = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial F_z}{\partial\rho}, \quad (2.22)$$

$$E_z = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z, \quad (2.23)$$

$$H_\rho = \frac{1}{\mu\rho} \frac{\partial A_z}{\partial\phi} - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 F_z}{\partial\rho\partial z}, \quad (2.24)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial\rho} - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon\rho} \frac{\partial^2 F_z}{\partial\phi\partial z}, \quad (2.25)$$

$$H_z = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z \quad (2.26)$$

Os modos que serão excitados no interior do guia de onda coaxial podem ser obtidos através das configurações dos campos em função dos vetores potenciais elétrico e magnético \vec{A}_z e \vec{F}_z , respectivamente. Assim tem-se três casos: o Transversal Eletromagnético (TEM^z), quando as componentes dos campos elétrico e magnético forem transversais à direção de propagação, o que implica em $\vec{E}_z = \vec{H}_z = 0$; o Transversal Magnético (TM^z), quando as componentes de campo magnético forem transversais à direção de propagação da onda, o que implica em $\vec{H}_z = 0$; e o Transversal Elétrico (TE^z), quando as

componentes de campo elétrico forem transversais à direção de propagação da onda, o que implica em $\vec{E}_z = 0$. Essas três configurações serão expressas no desenvolvimento que segue.

2.2.1. Modo Transversal Magnético (TM^z)

Para o modo TM^z , considera-se $H_z = 0$. As componentes dos campos elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas, descritas pelas equações de (2.21) a (2.26), serão expressas unicamente em termos de $\vec{A} = A_z \hat{a}_z = \psi_z \hat{a}_z$, dado por:

$$A_z(\rho, \phi, z) = [AJ_1(\chi\rho) + BN_1(\chi\rho)] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta z} \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) nas equações de (2.21) a (2.26) e efetuando as derivações correspondentes, obtém-se as componentes dos campos elétrico e magnético para os modos TM_{lm}^z , expressos por:

$$e_{\rho_m}^{TM} = \pm \frac{\chi_{lm}^{TM} \beta_{lm}^{TM}}{\omega\mu\epsilon} \left[AJ_1'(\chi_{lm}^{TM} \rho) + BN_1'(\chi_{lm}^{TM} \rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TM} z}, \quad (2.28)$$

$$e_{\phi_m}^{TM} = \pm \frac{l\beta_{lm}^{TM}}{\omega\mu\epsilon\rho} \left[AJ_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) + BN_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) - C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TM} z}, \quad (2.29)$$

$$e_{z_m}^{TM} = \pm j \frac{(\chi_{lm}^{TM})^2}{\omega\mu\epsilon} \left[AJ_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) + BN_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TM} z}, \quad (2.30)$$

$$h_{\rho_m}^{TM} = -\frac{e_{\phi_m}^{TM}}{\eta_{lm}^{TM}}, \quad (2.31)$$

$$h_{\phi_m}^{TM} = \frac{e_{\rho_m}^{TM}}{\eta_{lm}^{TM}}, \quad (2.32)$$

$$h_{z_m}^{TM} = 0, \quad (2.33)$$

onde,

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (2.34)$$

e η_{lm}^{TM} consiste na impedância transversal de onda para o modo TM_{lm}^z e é expresso por:

$$\eta_{lm}^{TM} = \frac{\beta_{lm}^{TM}}{\omega \varepsilon} \quad (2.35)$$

Os parâmetros A , B , χ_{lm}^{TM} e β_{lm}^{TM} são determinados através da aplicação da condição de contorno para a componente tangencial de campo elétrico sobre as paredes cilíndricas metálicas do guia da onda coaxial, que exige que e_z e e_ϕ sejam nulos em $\rho = a$ e $\rho = b$. Essas condições resultam em:

$$Z_l(\chi_{lm}^{TM} a) = AJ_l(\chi_{lm}^{TM} a) + BN_l(\chi_{lm}^{TM} a) = 0, \text{ para } \rho = a \quad (2.36)$$

$$Z_l(\chi_{lm}^{TM} b) = AJ_l(\chi_{lm}^{TM} b) + BN_l(\chi_{lm}^{TM} b) = 0, \text{ para } \rho = b \quad (2.37)$$

Da equação (2.36), obtém-se a relação:

$$\frac{A}{B} = -\frac{N_l(\chi_{lm}^{TM} a)}{J_l(\chi_{lm}^{TM} a)} \quad (2.38)$$

Dividindo a equação (2.37) por B , substituindo (2.38) e reorganizando a equação, obtém-se:

$$J_l(\chi_{lm}^{TM} a)N_l(\chi_{lm}^{TM} b) - J_l(\chi_{lm}^{TM} b)N_l(\chi_{lm}^{TM} a) = 0, \quad (2.39)$$

o que resulta em:

$$\begin{cases} A = -N_l(\chi_{lm}^{TM} a) \\ B = J_l(\chi_{lm}^{TM} a) \end{cases} \quad (2.40)$$

A equação (2.39) possui um número infinito de soluções χ_{lm}^{TM} , conhecidas como números de onda de corte, associadas aos modos TM_{lm}^z de ordem m e relacionadas com a constante de propagação β_{lm}^{TM} através de:

$$\beta_{lm}^{TM} = \sqrt{k^2 - (\chi_{lm}^{TM})^2}, \quad (2.41)$$

onde k é dado por (2.5) e a frequência de onda de corte do modo TM , de ordem m e dependência azimutal l , pode ser expressa por:

$$f_{c_{lm}}^{TM} = \frac{\chi_{lm}^{TM}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (2.42)$$

o que permite representar β_{lm}^{TM} em função de f e $f_{c_{lm}}^{TM}$:

$$\beta_{lm}^{TM} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{lm}}^{TM}}{f}\right)^2} \quad (2.43)$$

Se $f > f_{c_{lm}}^{TM}$, β_{lm}^{TM} é real e dado por (2.43), e o modo é propagante.

Porém, se $f < f_{c_{lm}}^{TM}$, β_{lm}^{TM} é imaginário e o modo é evanescente, sendo expresso por:

$$\beta_{lm}^{TM} = -j\chi_{lm}^{TM} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_{c_{lm}}^{TM}}\right)^2} \quad (2.44)$$

Através da expansão assintótica das funções de Bessel que compõem a equação (2.39), pode-se estabelecer uma relação entre a frequência de onda de corte e as dimensões dos cilindros interno e externo.

Essas expansões assintóticas das funções de Bessel de primeira e segunda espécies, para argumento grande, são dadas por:

$$J_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\chi_{lm}^{TM} \rho}} \cos\left(\chi_{lm}^{TM} \rho - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.45)$$

$$N_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_{lm}^{TM} \rho}} \sin\left(\chi_{lm}^{TM} \rho - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.46)$$

Aplicando as equações (2.45) e (2.46) em (2.39), obtém-se:

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{uv}} [\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha] = 0, \quad (2.47)$$

onde:

$$\alpha = \left(u - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.48)$$

$$\beta = \left(v - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.49)$$

$$u = \chi_{lm}^{TM} a, \quad (2.50)$$

$$v = \chi_{lm}^{TM} b \quad (2.51)$$

Reescrevendo a equação (2.47), obtém-se:

$$\sin(\beta - \alpha) = 0 \quad (2.52)$$

Logo:

$$\beta - \alpha = \chi_{lm}^{TM} (b - a) = n\pi, \quad (2.53)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Da equação (2.53) obtém-se a relação entre as dimensões dos cilindros condutores interno e externo necessária para que o modo TM_{lm}^z de ordem m se propague:

$$\frac{a}{b} > 1 - \frac{m\sqrt{\mu\epsilon}}{2bf_{c_{lm}}^{TM}} \quad (2.54)$$

A Figura 2.3 ilustra os valores da frequência de onda de corte $f_{c_{lm}}^{TM}$, obtidos através da solução numérica da equação (2.39) para os primeiros modos TM_{lm}^z , em função da razão a/b . Considera-se que a e b são os raios dos condutores interno e externo, respectivamente, sendo $b = 15\text{mm}$. Para o modo TM_{01}^z , a Figura 2.4 ilustra a distribuição das componentes transversais de campo. Esses

resultados apresentam concordância quando comparados com os apresentados na referência [12].

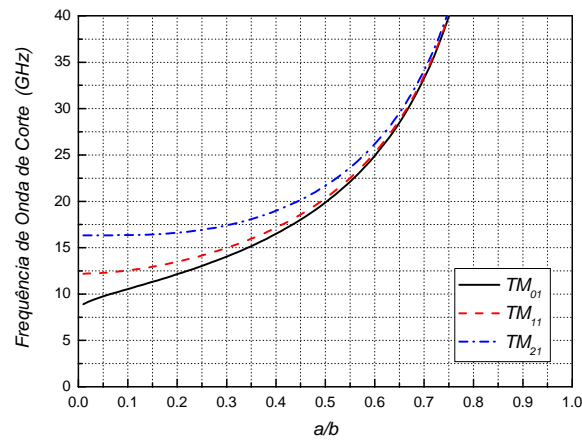


Figura 2.3 – $f_{c_{lm}}^{TM}$ em função de a/b para os primeiros modos TM_{lm}^z , obtidos através da solução numérica da equação (2.39), considerando $b = 15\text{mm}$.

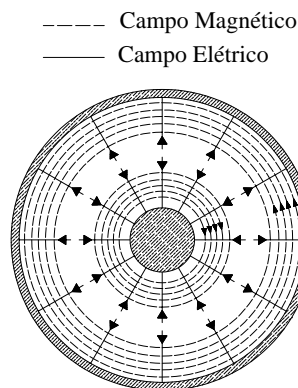


Figura 2.4 – Distribuição das componentes transversais de campo no interior do guia de onda coaxial para o modo TM_{01}^z .

Substituindo a equação (2.40) nas equações de (2.28) a (2.30), obtém-se:

$$e_{\rho_m}^{TM} = \pm \frac{\chi_{lm}^{TM} \beta_{lm}^{TM}}{\omega \mu \epsilon} Z_1'(\chi_{lm}^{TM} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j \beta_{lm}^{TM} z}, \quad (2.55)$$

$$e_{\phi_m}^{TM} = \pm \frac{l \beta_{lm}^{TM}}{\omega \mu \epsilon \rho} Z_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) - C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j \beta_{lm}^{TM} z}, \quad (2.56)$$

$$e_{z_m}^{TM} = \pm j \frac{(\chi_{lm}^{TM})^2}{\omega \mu \epsilon} Z_1(\chi_{lm}^{TM} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j \beta_{lm}^{TM} z}, \quad (2.57)$$

$$h_{\rho_m}^{TM} = -\frac{e_{\phi_m}^{TM}}{\eta_{lm}^{TM}}, \quad (2.58)$$

$$h_{\phi_m}^{TM} = \frac{e_{\rho_m}^{TM}}{\eta_{lm}^{TM}}, \quad (2.59)$$

$$h_{z_m}^{TM} = 0, \quad (2.60)$$

onde η_{lm}^{TM} é dado por (2.35) e:

$$Z_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) = J_l(\chi_{lm}^{TM} a) N_l(\chi_{lm}^{TM} \rho) - N_l(\chi_{lm}^{TM} a) J_l(\chi_{lm}^{TM} \rho), \quad (2.61)$$

$$Z_l'(\chi_{lm}^{TM} \rho) = J_l'(\chi_{lm}^{TM} a) N_l'(\chi_{lm}^{TM} \rho) - N_l'(\chi_{lm}^{TM} a) J_l'(\chi_{lm}^{TM} \rho) \quad (2.62)$$

2.2.2.

Modo Transversal Elétrico (TE^z)

Para o modo TE^z , considera-se $E_z = 0$. As componentes dos campos elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas, descritos pelas equações de (2.21) a (2.26), serão expressas unicamente em termos de $\vec{F} = F_z \hat{a}_z = \psi_z \hat{a}_z$, dado por:

$$F_z(\rho, \phi, z) = [AJ_l(\chi\rho) + BN_l(\chi\rho)] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta z} \quad (2.63)$$

Substituindo (2.63) nas equações de (2.21) a (2.26) e efetuando as derivações correspondentes, obtém-se as componentes dos campos elétrico e magnético para os modos TE_{lm}^z , expressos por:

$$e_{\rho_m}^{TE} = -\frac{l}{\varepsilon\rho} [AJ_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) + BN_l(\chi_{lm}^{TE} \rho)] \{C_1 \cos(l\phi) - C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TE} z}, \quad (2.64)$$

$$e_{\phi_m}^{TE} = \frac{\chi_{lm}^{TE}}{\varepsilon} [AJ_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) + BN_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho)] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TE} z}, \quad (2.65)$$

$$e_{z_m}^{TE} = 0, \quad (2.66)$$

$$h_{\rho_m}^{TE} = \pm \frac{e_{\phi_m}^{TE}}{\eta_{lm}^{TE}}, \quad (2.67)$$

$$h_{\phi_m}^{TE} = \mp \frac{e^{TE}}{\eta_{lm}^{TE}}, \quad (2.68)$$

$$h_{z_m}^{TE} = \pm j \frac{(\chi_{lm}^{TE})^2}{\omega \mu \varepsilon} \left[AJ_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) + BN_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) \right] \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j \beta_{lm}^{TE} z}, \quad (2.69)$$

onde,

$$\prime = \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (2.70)$$

e η_{lm}^{TE} consiste na impedância transversal de onda para o modo TE_{lm}^z e é expresso por:

$$\eta_{lm}^{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta_{lm}^{TE}} \quad (2.71)$$

Os parâmetros A, B, χ_{lm}^{TE} e β_{lm}^{TE} são determinados através da aplicação da condição de contorno para a componente tangencial do campo elétrico sobre as paredes cilíndricas metálicas do guia da onda coaxial, que exige que e_z e e_ϕ sejam nulos em $\rho = a$ e $\rho = b$. Essas condições resultam em:

$$Z_l'(\chi_{lm}^{TE} a) = AJ_l'(\chi_{lm}^{TE} a) + BN_l'(\chi_{lm}^{TE} a) = 0, \text{ para } \rho = a \quad (2.72)$$

$$Z_l'(\chi_{lm}^{TE} b) = AJ_l'(\chi_{lm}^{TE} b) + BN_l'(\chi_{lm}^{TE} b) = 0, \text{ para } \rho = b \quad (2.73)$$

Da equação (2.72), obtém-se a relação:

$$\frac{A}{B} = - \frac{N_l'(\chi_{lm}^{TE} a)}{J_l'(\chi_{lm}^{TE} a)} \quad (2.74)$$

Dividindo a equação (2.73) por B, substituindo (2.74) e reorganizando a equação, obtém-se:

$$J_l'(\chi_{lm}^{TE} a)N_l'(\chi_{lm}^{TE} b) - J_l'(\chi_{lm}^{TE} b)N_l'(\chi_{lm}^{TE} a) = 0, \quad (2.75)$$

o que resulta em:

$$\begin{cases} A = -N_l'(\chi_{lm}^{TE} a) \\ B = J_l'(\chi_{lm}^{TE} a) \end{cases} \quad (2.76)$$

A equação (2.75) possui um número infinito de soluções χ_{lm}^{TE} , conhecidas como números de onda de corte, associadas aos modos TE_{lm}^z de ordem m e relacionadas com a constante de propagação β_{lm}^{TE} através de:

$$\beta_{lm}^{TE} = \sqrt{k^2 - (\chi_{lm}^{TE})^2} \quad (2.77)$$

onde k é dado por (2.5) e a frequência de onda de corte do modo TE , de ordem m e dependência azimutal l , pode ser expressa por:

$$f_{c_{lm}}^{TE} = \frac{\chi_{lm}^{TE}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad (2.78)$$

o que permite representar β_{lm}^{TE} em função de f e $f_{c_{lm}}^{TE}$:

$$\beta_{lm}^{TE} = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{lm}}^{TE}}{f}\right)^2} \quad (2.79)$$

Se $f > f_{c_{lm}}^{TE}$, β_{lm}^{TE} é real e dado por (2.79), e o modo é propagante.

Porém, se $f < f_{c_{lm}}^{TE}$, β_{lm}^{TE} é imaginário e o modo é evanescente, sendo expresse por:

$$\beta_{lm}^{TE} = -j\chi_{lm}^{TE}\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_{c_{lm}}^{TE}}\right)^2} \quad (2.80)$$

A Figura 2.5 ilustra os valores da frequência de onda de corte $f_{c_{lm}}^{TE}$, obtidos através da solução numérica da equação (2.75) para os primeiros modos TE_{lm}^z , em função da razão a/b . Considera-se que a e b são os raios dos condutores

interno e externo, respectivamente, sendo $b = 15\text{mm}$. Para os modos TE_{11}^z e TE_{21}^z , as Figuras 2.6.(a) e 2.6.(b), respectivamente, ilustram a distribuição das componentes transversais de campo. Esses resultados apresentam concordância quando comparados com os apresentados na referência [12].

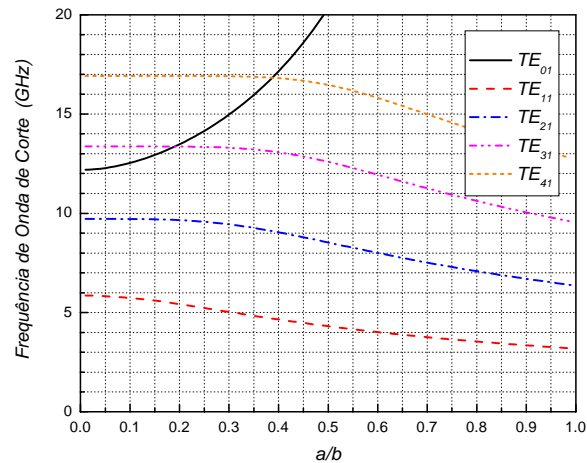


Figura 2.5 – $f_{c_{lm}}^{TE}$ em função de a/b para os primeiros modos TE_{lm}^z , obtidos através da solução numérica da equação (2.75), considerando $b = 15\text{mm}$.

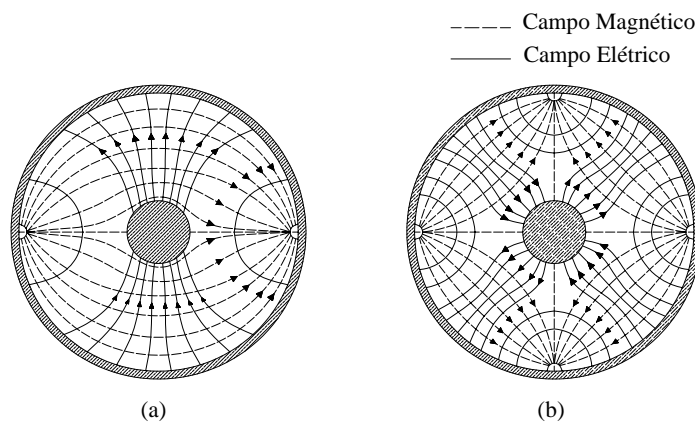


Figura 2.6 – Distribuição das componentes transversais de campo no interior do guia de onda coaxial para os modos (a) TE_{11}^z e (b) TE_{21}^z .

Substituindo a equação (2.76) nas equações de (2.64) a (2.69), obtém-se:

$$e_{\rho m}^{TE} = -\frac{l}{\epsilon \rho} Z_1(\chi_{lm}^{TE} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) - C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TE} z}, \quad (2.81)$$

$$e_{\phi_m}^{TE} = \frac{\chi_{lm}^{TE}}{\varepsilon} Z_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{\mp j\beta_{lm}^{TE} z}, \quad (2.82)$$

$$e_{z_m}^{TE} = 0, \quad (2.83)$$

$$h_{\rho_m}^{TE} = \pm \frac{e_{\phi_m}^{TE}}{\eta_{lm}^{TE}}, \quad (2.84)$$

$$h_{\phi_m}^{TE} = \mp \frac{e_{\rho_m}^{TE}}{\eta_{lm}^{TE}}, \quad (2.85)$$

$$h_{z_m}^{TE} = \pm j \frac{(\chi_{lm}^{TE})^2}{\omega\mu\varepsilon} Z_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) \{C_1 \cos(l\phi) + C_2 \sin(l\phi)\} e^{-j\beta_{lm}^{TE} z}, \quad (2.86)$$

onde η_{lm}^{TE} é dado por (2.71) e:

$$Z_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) = J_l'(\chi_{lm}^{TE} a) N_l(\chi_{lm}^{TE} \rho) - N_l'(\chi_{lm}^{TE} a) J_l(\chi_{lm}^{TE} \rho), \quad (2.87)$$

$$Z_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) = J_l'(\chi_{lm}^{TE} a) N_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) - N_l'(\chi_{lm}^{TE} a) J_l'(\chi_{lm}^{TE} \rho) \quad (2.88)$$

2.2.3. Modo Transversal Eletromagnético (TEM^z)

O modo TEM^z é o modo de mais baixa ordem. Para esse modo, as componentes de campo elétrico e magnético são transversais à direção de propagação, onde $E_z = H_z = 0$. Esse modo é obtido quando $l = 0$ e $k = \beta$. Com essas considerações, a equação diferencial que envolve a função Z , relacionada à parcela da equação homogênea de Helmholtz expressa em termos de ρ e descrita por (2.17), será dada por:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \rho} = 0 \quad (2.89)$$

que tem como solução:

$$Z = \ln(\rho) \quad (2.90)$$

Substituindo (2.90), (2.14) e (2.16) em (2.11), para $l = 0$, obtém-se:

$$\psi_z = \ln(\rho)e^{\mp jkz} \quad (2.91)$$

As componentes do campo elétrico \vec{e} são dadas por:

$$\vec{E} = \nabla \psi_z \quad (2.92)$$

o que resulta em:

$$e_{\rho}^{TEM} = \frac{1}{\rho} e^{\mp jkz}, \quad (2.93)$$

$$e_{\phi}^{TEM} = e_z^{TEM} = 0 \quad (2.94)$$

As componentes do campo magnético \vec{h} são dadas por:

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \quad (2.95)$$

o que resulta em:

$$h_{\phi}^{TEM} = \pm \frac{1}{\eta\rho} e^{\mp jkz}, \quad (2.96)$$

$$h_{\rho}^{TEM} = h_z^{TEM} = 0, \quad (2.97)$$

onde:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (2.98)$$

A Figura 2.7 ilustra a distribuição das componentes transversais de campo para o modo TEM^z .

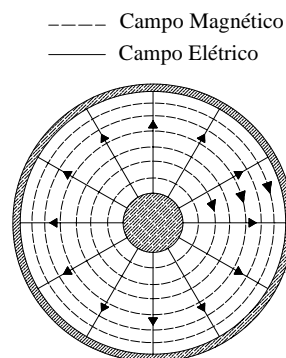


Figura 2.7 – Distribuição das componentes transversais de campo no interior do guia de onda coaxial para o modo TEM^z .

2.3.

Modos TM^z e TE^z para $l = 0$

Como mencionado anteriormente, as estruturas de acoplamento para a antena discone modificada, analisadas no capítulo 4, serão excitadas pelo modo TEM^z . Portanto, as seções de guias de onda coaxiais que compõem essas estruturas serão dimensionadas de forma que somente o modo TEM^z se propague e todos os modos superiores sejam evanescentes. Através dessa consideração, as equações de campos modais para os modos TM^z e TE^z serão reescritas para $l = 0$.

- **Modo Transversal Magnético (TM^z)**

$$e_{\rho_m}^{TM} = \pm \frac{\chi_{0m}^{TM} \beta_{0m}^{TM}}{\omega \mu \epsilon} Z_0'(\chi_{0m}^{TM} \rho) e^{\mp j \beta_{0m}^{TM} z} \quad (2.99)$$

$$h_{\phi_m}^{TM} = \frac{e_{\rho_m}^{TM}}{\eta_{0m}^{TM}} \quad (2.100)$$

$$e_{\phi_m}^{TM} = e_{z_m}^{TM} = h_{\rho_m}^{TM} = h_{z_m}^{TM} = 0 \quad (2.101)$$

onde η_{0m}^{TM} é dado por (2.35), para $l = 0$, e:

$$Z_0'(\chi_{0m}^{TM} \rho) = J_0(\chi_{0m}^{TM} a) N_0'(\chi_{0m}^{TM} \rho) - N_0(\chi_{0m}^{TM} a) J_0'(\chi_{0m}^{TM} \rho) \quad (2.102)$$

- **Modo Transversal Elétrico (TE^z)**

$$e_{\phi_m}^{TE} = \frac{\chi_{0m}^{TE}}{\epsilon} Z_0'(\chi_{0m}^{TE} \rho) e^{\mp j \beta_{0m}^{TE} z} \quad (2.103)$$

$$h_{\rho_m}^{TE} = \pm \frac{e_{\phi_m}^{TE}}{\eta_{0m}^{TE}} \quad (2.104)$$

$$e_{\rho_m}^{TE} = e_{z_m}^{TE} = h_{\phi_m}^{TE} = h_{z_m}^{TE} = 0 \quad (2.105)$$

onde η_{0m}^{TE} é dado por (2.71), para $l = 0$, e:

$$Z_0'(\chi_{0m}^{TE}\rho) = J_0'(\chi_{0m}^{TE}a)N_0'(\chi_{0m}^{TE}\rho) - N_0'(\chi_{0m}^{TE}a)J_0'(\chi_{0m}^{TE}\rho) \quad (2.106)$$