3
Novo Estimador para IBNR

3.1
Introdução

Muitos dos trabalhos feitos até o presente momento baseiam-se nos sinistros já ocorridos e já avisados, deixando de levar em consideração informações importantes contidas nas apólices como, por exemplo, o valor total assegurado ou o período de vigência. O modelo que será apresentado agora difere dos demais nesse aspecto, o triângulo de desenvolvimento não é base de dados para a estimativa como poderá ser visto.

Vele a pena ressaltar que o modelo foi baseado no cálculo do IBNR para seguros de automóvel. Para os demais seguros como, por exemplo, vida ou acidente seria necessário rever as suposições e reformular algumas modelagens.

Antes da apresentação do modelo será definido como devem ser o dados para que possamos usar o estimador proposto. É necessário possuir as apólices do passado a partir de uma certa data inicial. Para cada apólice precisa-se conhecer o valor total assegurado, o período de vigência e, caso haja sinistro, a data de ocorrência, a data de aviso e o valor pago.

3.2
Apresentação do Modelo

Primeiro será definido como serão expressas as datas no modelo. A data inicial, data a partir da qual iniciam as informações, será definida como 0. As demais datas serão representadas pelo número de dias passados desde a data inicial, e dessa forma as datas serão números inteiros. Observe que uma certa data será representada por um número positivo se ela vier depois da data inicial, e representada por um número negativo caso contrário. A data presente será chamada de τ. Assim é conhecido tudo que foi avisado no período $[0, \tau]$.

Dada uma certa apólice, seja Y_i o valor total assegurado e $[A_i, B_i]$ o período de vigência. Se $[A_i, B_i] \cap [0, \tau] \neq \emptyset$ o período de exposição da apólice i é não vazio. Como só interessam as apólices com algum período de exposição, serão levados em consideração apenas os acontecimentos entre as datas 0 e τ. Isso justifica a seguinte definição:

$$a_i = \max(0, A_i) \qquad b_i = \min(\tau, B_i) \tag{3-1}$$

Dessa maneira o intervalo de tempo $[a_i, b_i]$ será chamado de período de exposição e está contido no intervalo $[0, \tau]$. Seja N o número de apólices contidas no período de observação, tais apólices serão simbolizados por $(Y_i, [a_i, b_i])$, $1 \leq i \leq N$. Observe que N é conhecido pela seguradora.

Supondo a ocorrência de no máximo um sinistro por apólice, o IBNR na data τ pode ser modelado da seguinte maneira:

$$IBNR_\tau = \sum_{i=1}^{N} Y_i \alpha_i I\{\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado}\} \tag{3-2}$$

onde $\alpha_i = \frac{y_i}{Y_i}$, y_i é o valor real pago no sinistro da i-ésima apólice e $I\{.\}$ representa a função indicadora do evento em questão. $I\{\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado }\} = 1$ caso haja sinistro na i-ésima apólice e ele não tenha sido avisado até a data presente.

Toda vez que a função indicadora assumir o valor 1, α_i será desconhecido uma vez que a ocorrência do sinistro ainda não foi comunicada. Observe que α_i e $I\{\text{ocorreu sinistro na apolice i e nao foi avisado}\}$ são variáveis aleatórias, enquanto Y_i é uma constante para cada apólice. O estimador para o IBNR na data presente, $IB\hat{N}R_\tau$, será simplesmente uma estimativa para $E[IBNR_\tau]$. Esse valor esperado é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{gathered}E[IBNR_\tau] = \\ E\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i \alpha_i I\{\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado}\}\right] = \\ \sum_{i=1}^{N} E\left[Y_i \alpha_i I\{\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado}\}\right] = \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i E\left[\alpha_i I\{\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado}\}\right]\end{gathered}$$

Suponha que as variáveis aleatórias α_i e $I\{\text{ocorrido e nao avisado}\}$ sejam descorrelatadas. Esta suposição terá que ser futuramente verificada, mas por enquanto os cálculos serão realizados sem a verificação. Tal suposição irá simplificar muito as contas, uma vez que o valor esperado do produto passa a ser o produto dos valores esperados. Dessa forma as contas acima seguem naturalmente.

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i E\left[\alpha_i I\{\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado}\}\right] =$$
$$\sum_{i=1}^{N} Y_i E[\alpha_i] E\left[I\{\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado}\}\right] =$$
$$\sum_{i=1}^{N} Y_i E[\alpha_i] P(\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado})$$

onde $P(.)$ representa a função probabilidade. Dessa forma, o desejado é estimar:

$$E[IBNR_\tau] = \sum_{i=1}^{N} Y_i E[\alpha_i] P(\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado}) \qquad \text{(3-3)}$$

3.3 Cálculos e Estimativas

Essa seção tem como objetivo mostrar com detalhes como $E[\alpha_i]$ e $P(\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado})$ são estimados. As contas serão expostas com cuidado tentando tornar claro cada um dos passos. $P(\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado})$ será fatorada usando a regra de Bayes, a qual fornece o seguinte resultado:

$$P(\text{ocorreu sinistro i e nao foi avisado}) =$$
$$P(\text{nao foi avisado sinistro i } |\text{ocorreu sinistro i}) P(\text{ocorreu sinistro i})$$

Estimação de $E[\alpha_i]$

Suponha α_i variáveis aleatórias de mesma média, ou seja, suponha que na média a fração do valor total assegurado que realmente foi paga é a mesma e independe do valor total assegurado . O estimador para este valor esperado será simplesmente a média amostral entre os α_i's conhecidos.

Seja n número de apólices com sinistro avisado. Para cada uma delas sejam Y_j^* e y_j^*, $1 \leq j \leq n$, o valor total assegurado e o valor real pago, respectivamente. Assim tem-se:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j^*}{Y_j^*} \qquad \text{(3-4)}$$

Estimação de P(nao foi avisado sinistro i |ocorreu sinistro i)

Primeiro serão feitas algumas definições. Para cada apólice i com sinistro ocorrido seja S_i a data de ocorrência do sinistro e D_i o número de dias entre a data de ocorrência e data de aviso. Tanto S_i quanto D_i são variáveis aleatórias, uma vez que o sinsitro não foi comunicado e as datas de ocorrência e aviso são desconhecidas.

S_i indica a data de ocorrência do sinistro de uma certa apólice. Dados dois intervalos de mesmo tamanho e contidos no período de exposição, I_1 e I_2, é natural pensar que $P(S_i \in I_1) = P(S_i \in I_2)$. Por causa disso S_i será modelada como uma variável aleatória uniforme dentro do intervalo $[a_i, b_i]$, $S_i \sim \mathrm{u}(a_i, b_i)$.

Já D_i representa o intervalo de tempo entre a ocorrência e o aviso de um sinistro, logo $D_i > 0$. É bastante razoável afirmar que sua densidade tende a zero conforme $D_i \to \infty$, uma vez que é pouco provável sinistros avisados muito tempo depois da sua ocorrência. Dessa forma, D_i será modelada como uma variável aleatória exponencial com parâmetro λ, $D_i \sim \exp(\lambda)$.

Observe que:

$$P(\text{nao foi avisado sinistro i }|\text{ocorreu sinistro i}) =$$
$$P(S_i + D_i > \tau) =$$
$$\int_{a_i}^{b_i} \int_{\tau - s}^{\infty} f_{SD}(s,t)\,dt\,ds$$

onde f_{SD} é a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias S_i e D_i. Supondo S_i e D_i independentes, $f_{SD}(s,t) = f_S(s) f_D(t)$. Assim passa a ser possível a realização das contas, uma vez que $f_S(s)$ e $f_D(t)$ são conhecidas e a $f_{SD}(s,t)$ não o é.

$$
\begin{gathered}
\int_{a_i}^{b_i}\int_{\tau-s}^{\infty} f_{SD}(s,t)dt\,ds \\
\int_{a_i}^{b_i}\int_{\tau-s}^{\infty} f_{S}(s)f_{D}(t)dt\,ds = \\
\int_{a_i}^{b_i}\int_{\tau-s}^{\infty} \tfrac{1}{b_i-a_i}\tfrac{1}{\lambda}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}}dt\,ds = \\
\tfrac{1}{b_i-a_i}\int_{a_i}^{b_i}\int_{\tau-s}^{\infty} \tfrac{1}{\lambda}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}}dt\,ds = \\
\tfrac{1}{b_i-a_i}\int_{a_i}^{b_i}\left(-\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}}\Big|_{\tau-s}^{\infty}\right)ds = \\
\tfrac{1}{b_i-a_i}\int_{a_i}^{b_i}\left(\lim_{t\to\infty}(-\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}}) +\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau-s}{\lambda}}\right)ds = \\
\tfrac{1}{b_i-a_i}\int_{a_i}^{b_i}\ \mathrm{e}^{\frac{s-\tau}{\lambda}}ds = \\
\tfrac{1}{b_i-a_i}\int_{a_i}^{b_i}\ \mathrm{e}^{\frac{s}{\lambda}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\lambda}}ds = \\
\tfrac{1}{b_i-a_i}\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\lambda}}\int_{a_i}^{b_i}\ \mathrm{e}^{\frac{s}{\lambda}}ds = \\
\tfrac{1}{b_i-a_i}\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\lambda}}\left(\lambda\ \mathrm{e}^{\frac{s}{\lambda}}\Big|_{a_i}^{b_i}\right) = \\
\tfrac{1}{b_i-a_i}\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\lambda}}\lambda\left(\ \mathrm{e}^{\frac{b_i}{\lambda}}\ -\ \mathrm{e}^{\frac{a_i}{\lambda}}\right) = \\
\lambda\left(\tfrac{\mathrm{e}^{\frac{b_i-\tau}{\lambda}}-\mathrm{e}^{\frac{a_i-\tau}{\lambda}}}{b_i-a_i}\right)
\end{gathered}
$$

Este ainda não é o resultado desejado pois λ é um parâmetro desconhecido. Para estimá-lo basta lembrar que $E[D_i] = \lambda$. Para cada uma das n apólices com sinistro avisado seja D_i^* o número de dias entre a data de ocorrência e aviso do sinistro. O estimador de λ será simplesmente a média amostral desses valores:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i^* \tag{3-5}$$

Agora já é possível escrever o estimador procurado:

$$\hat{P}(\text{nao foi avisado sinistro i }|\text{ocorreu sinistro i}) = \bar{\lambda}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{b_i-\tau}{\lambda}}\ -\ \mathrm{e}^{\frac{a_i-\tau}{\lambda}}}{b_i-a_i}\right) \tag{3-6}$$

Estimando $P(\text{ocorreu sinistro i})$

É natural pensar que a probabilidade de ocorrer um sinistro em uma certa apólice depende do seu período de exposição e se o este período fosse interminável certamente o sinistro ocorreria. Seja T_i a variável aleatória que representa o tempo entre o início da exposição e o acontecimento de um sinistro na apólice i. Observe que T_i é uma variável aleatória sem memória, ou seja, $P(T_i > t_2|T_i > t_1) = P(T_i > t_2 - t_1)$. Além disso T_i assume somente valores positivos. Por causa dessas propriedades T_i será modelada como uma variável aleatória exponencial de parâmetro β. Dessa forma, sua função densidade de probabilidade é:

$$f(t|\beta) = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta}}\ ,\ t > 0$$

Então, determinar a probabilidade de ter ocorrido um sinistro na apólice i é o mesmo que determinar a probabilidade do tempo entre o início da exposição e o acontecimento de um sinistro ser menor que o período de exposição, isto é, $P(\text{ocorreu sinistro i}) = P(T_i < b_i - a_i)$.

$$P(T_i < b_i - a_i) = \int_0^{b_i - a_i} \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta}} dt = (-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta}})\Big|_0^{b_i - a_i} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{(b_i - a_i)}{\beta}}$$

Para terminar é preciso estimar o parâmetro β. Como $E[T_i] = \beta$ basta obter uma estimativa para a média de T_i.

Observe que existem dois tipos de apólices: aquelas com sinistro e aquelas sem sinistro. Seria possível estimar a média de T_i com a média amostral, supondo apenas as apólices com sinistro. Mas desse jeito informações importantes não estão sendo levadas em consideração.

Se em uma apólice não há sinistro, significa que o tempo de exposição não foi suficiente para ele ocorrer. Nesse caso o valor de T_i não é conhecido, mas sabe-se que ele é maior que o tamanho do intervalo de exposição. Essa informação é fundamental para a estimativa. Por causa disso β será estimado pelo estimador de máxima verossimilhança para dados incompletos através do algoritmo EM, sugerido por Dempster em [3].

A idéia principal do algoritmo é supor possíveis datas de ocorrência do sinistro para as apólice sem sinistro, tais datas serão posteriores à data de fim da exposição. Cada suposição gera uma estimativa para o parâmetro β, e dessa forma será construída uma seqüência de estimativas. Essa seqüência é convergente e o seu limite será a estimativa final para β, como será mostrado a seguir.

Seja A o conjunto dos índices das apólices com sinistro e B o conjunto dos índices das apólices sem sinistros. Sejam n_a e n_b o número de elementos em A e em B, respectivamente. É importante destacar que $n_a > 0$, senão não há estimativa. Para cada $i \in A$ o instante de ocorrência do sinistro será chamado de t_i. A primeira estimativa será chamada de β_0 e trata-se simplesmente da média amostral:

$$\beta_0 = \frac{\sum_{i\in A}(t_i - a_i)}{n_a} \tag{3-7}$$

Em seguida, será suposto, para cada apólice i sem sinistros, a ocorrência de um sinistro em $b_i + \beta_0$. Com isso determina-se uma nova estimativa para β, β_1.

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i\in A}(t_i - a_i) + \sum_{j\in B}(b_j + \beta_0 - a_j)}{n_a + n_b}$$

A seqüência β_k será construída baseado nesta linha de pensamento. Dado o valor de β_k o termo β_{k+1} será o resultado da média amostral supondo que cada apólice sem sinistro possui a ocorrência de um sinistro no instante $b_i+\beta_k$, como pode ser visto na equação 3-8.

$$\beta_{k+1} = \frac{\sum_{i\in A}(t_i - a_i) + \sum_{j\in B}(b_j + \beta_k - a_j)}{n_a + n_b} \tag{3-8}$$

O estimador de β, denotado por $\hat{\beta}$, será o limite desta seqüência. Para fazer essa afirmação é necessário mostrar que a seqüência é convergente, isto será feito provando que ela é crescente e limitada.

Por indução será mostrado que a seqüência é crescente. O primeiro passo é verificar que $\beta_0 \leq \beta_1$.

$$\begin{gathered}
\beta_0 = \tfrac{\sum_{i\in A}(t_i-a_i)}{n_a} \\
\beta_1 = \tfrac{\sum_{i\in A}(t_i-a_i)+\sum_{j\in B}(b_j+\beta_0-a_j)}{n_a+n_b} \\
\beta_1 = \tfrac{\sum_{i\in A}(t_i-a_i)}{n_a+n_b} + \tfrac{\sum_{j\in B}(b_j-a_j)}{n_a+n_b} + \tfrac{n_b\beta_0}{n_a+n_b} \\
\Downarrow \\
\beta_1 - \beta_0 = \tfrac{\sum_{i\in A}(t_i-a_i)}{n_a+n_b} - \tfrac{\sum_{i\in A}(t_i-a_i)}{n_a} + \tfrac{\sum_{j\in B}(b_j-a_j)}{n_a+n_b} + \tfrac{n_b\beta_0}{n_a+n_b} \\
\beta_1 - \beta_0 = -\tfrac{n_b\sum_{i\in A}(t_i-a_i)}{n_a(n_a+n_b)} + \tfrac{\sum_{j\in B}(b_j-a_j)}{n_a+n_b} + \tfrac{n_b\beta_0}{n_a+n_b} \\
\beta_1 - \beta_0 = -\tfrac{n_b\sum_{i\in A}(t_i-a_i)}{n_a(n_a+n_b)} + \tfrac{\sum_{j\in B}(b_j-a_j)}{n_a+n_b} + \tfrac{n_b\sum_{i\in A}(t_i-a_i)}{n_a(n_a+n_b)} \\
\beta_1 - \beta_0 = \tfrac{\sum_{j\in B}(b_j-a_j)}{n_a+n_b} \geq 0
\end{gathered}$$

O fato de $\beta_{k-1} \leq \beta_k$ implica em $\beta_k \leq \beta_{k+1}$, como mostram as contas a seguir. Dessa forma demonstra-se que a sequência é crescente.

$$\beta_{k+1} = \frac{\sum_{i\in A}(t_i - a_i)}{n_a+n_b} + \frac{\sum_{j\in B}(b_j - a_j)}{n_a+n_b} + \frac{n_b\beta_k}{n_a+n_b}$$
$$\beta_k = \frac{\sum_{i\in A}(t_i - a_i)}{n_a+n_b} + \frac{\sum_{j\in B}(b_j - a_j)}{n_a+n_b} + \frac{n_b\beta_{k-1}}{n_a+n_b}$$
$$\Downarrow$$
$$\beta_{k+1} - \beta_k = \frac{n_b}{n_a+n_b}(\beta_k - \beta_{k-1}) \geq 0$$

O próximo passo é mostrar que a seqüência é limitada. Isso será feito verificando que $(n_a + n_b)L$ é uma cota superior, onde L é o tamanho do maior intervalo de exposição. Essa prova também será por indução nessa demonstração.

Como L é o tamanho do maior intervalo, $L \geq t_i - a_i \;\; \forall \;\; i \in A$. Então é verdade que $\beta_0 \leq L \leq (n_a + n_b)L$. Suponha agora que $\beta_k \leq (n_a + n_b)L$. Será visto que isso implica em $\beta_{k+1} \leq (n_a + n_b)L$.

$$\beta_{k+1} = \frac{\sum_{i\in A}(t_i - a_i)}{n_a+n_b} + \frac{\sum_{j\in B}(b_j - a_j)}{n_a+n_b} + \frac{n_b\beta_k}{n_a+n_b}$$
$$\frac{\sum_{i\in A}(t_i - a_i)}{n_a+n_b} + \frac{\sum_{j\in B}(b_j - a_j)}{n_a+n_b} \leq L \quad \text{e} \quad \beta_k \leq (n_a + n_b)L$$
$$\Downarrow$$
$$\beta_{k+1} \leq L + \frac{n_b}{n_a+n_b}(n_a + n_b)L = L + n_bL \leq (n_a + n_b)L$$

Com isso a demonstração é concluída. O estimador para β é:

$$\hat{\beta} = \lim_{k\to\infty} \beta_k \tag{3-9}$$

Agora já é possível apresentar a estimativa de $P(\text{ocorreu sinistro i})$.

$$\hat{P}(\text{ocorrido i}) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{(b_i - a_i)}{\hat{\beta}}} \tag{3-10}$$

Determinação do Estimador

Juntando as equações 3-3 - 3-10, o estimador para o IBNR está concluído e pode ser expresso por:

$$IB\hat{NR}_{novo} = \sum_{i=1}^{N} Y_i \bar{\alpha}\bar{\lambda} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{b_i - \tau}{\lambda}} - \mathrm{e}^{\frac{a_i - \tau}{\lambda}}}{b_i - a_i} \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b_i - a_i}{\hat{\beta}}} \right) \tag{3-11}$$