2

Teorema no caso de espaço amostral finito

O principal objetivo deste capítulo é rever o Teorema Fundamental do Aprecamento no caso de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ onde Ω finito é o espaço de estados do mundo e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ com $\mathbf{P}(\omega) > 0$.

2.1

Exemplo

Afim de ilustrar o teorema e os conceitos envolvidos, vamos considerar o exemplo mais simples não trivial do Teorema que iremos demonstrar.

Para isso vamos trabalhar com o *modelo binomial uniperiódico* que consiste de dois ativos e dois instantes ($t = 0$ e $t = 1$). O primeiro ativo B_t é um bônus e o outro S_t é uma ação. Vamos supor $B_0 = 1$ e conseqüentemente $B_1 = 1 + r$. Assim, S_1 é variável aleatória binomial em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ onde $\Omega = \{\omega_a, \omega_b\}$ e $\mathbf{P}(S_1 = S_0a) = p = 1 - \mathbf{P}(S_1 = S_0b)$.

Neste caso temos que:

$$V_0(\theta) = \alpha B_0 + \beta S_0 = \alpha + \beta S_0$$

$$V_1(\theta) = \alpha B_1 + \beta S_1 = \alpha(1 + r) + \beta S_1 = \begin{cases} \alpha(1 + r) + \beta S_0a & , \text{ com prob } p \\ \alpha(1 + r) + \beta S_0b & , \text{ com prob } 1 - p \end{cases}$$

Proposição 2.1 *O modelo binomial uniperiódico é viável $\Leftrightarrow b < 1 + r < a$. Nesse caso, existe uma distribuição de probabilidade $\mathbf{P}^*$ tal que:*

$$S_0 = \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}^*[S_1]$$

onde, $\mathbb{E}^*$ é a esperança com respeito a $\mathbf{P}^*$.

Observação: Note que geralmente esperaríamos ter $S_0 < \frac{1}{1+r} \mathbb{E}[S_1]$ se estivéssemos trabalhando com a medida $\mathbf{P}$, tendo em vista a valorização do investimento de risco. Se pudéssemos sem risco obter S_0 não iríamos nos

arriscar. Esse princípio é conhecido como *aversão ao risco* que é natural de se supor. A nova medida $\mathbf{P}^*$ é chamada de *distribuição neutra ao risco*.

Demonstração:

Suponha a viabilidade. Vamos supor, por absurdo, que $1 + r \geq a$. Então: $S_0(1 + r) \geq S_0a > S_0b$ e veremos que a carteira $\theta = (S_0, -1)$ é de arbitragem. Temos:

$$V_0(\theta) = S_0 + (-1)S_0 = 0$$

$$V_1(\theta) = (1 + r)S_0 + (-1)S_1 = \begin{cases} (1 + r)S_0 - S_0a \geq 0 & , \text{ com prob. } p \\ (1 + r)S_0 - S_0b > 0 & , \text{ com prob. } 1 - p \end{cases}$$

Logo:

$$\mathbf{P}(V_1(\theta) \geq 0) = 1 \text{ e } \mathbf{P}(V_1(\theta) > 0) = 1 - p > 0,$$

i.e, é uma oportunidade de arbitragem, logo absurdo. Então devemos ter $1 + r < a$. Analogamente, $b < 1 + r$.

Por outro lado, suponha $b < 1 + r < a$. Seja $\theta = (\alpha, \beta)$ uma carteira tal que $V_0(\theta) = 0$, então $0 = \alpha + \beta S_0 \Rightarrow \alpha = -\beta S_0$.

No instante $t = 1$, temos:

$$V_1(\theta) = \begin{cases} \alpha(1 + r) + \beta S_0a = \beta S_0[a - (1 + r)] & , \text{ com prob. } p \\ \alpha(1 + r) + \beta S_0b = \beta S_0[b - (1 + r)] & , \text{ com prob. } 1 - p \end{cases}$$

Suponha $\beta > 0$, então $\beta S_0[a - (1 + r)] > 0$, mas para que θ seja carteira de arbitragem devemos ter:

$$\beta S_0[b - (1 + r)] \geq 0 \Rightarrow b \geq 1 + r$$

Contradição. Analogamente para $\beta < 0$, e assim a equivalência está provada. Vamos mostrar o que obtemos nesse caso.

Como $b < 1 + r < a$ então existe $q \in (0, 1)$ tal que $1 + r = qa + (1 - q)b$, o que significa que $1 + r$ é combinação convexa de a e b . Assim, $S_0(1 + r) = qS_0a + (1 - q)S_0b = \mathbb{E}^*[S_1]$ se q for o peso de uma nova distribuição de probabilidade da variável aleatória S_1 , ou seja,

$$\mathbf{P}^*(S_1 = S_0a) = q = 1 - \mathbf{P}^*(S_1 = S_0b)$$

Logo, $S_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*[S_1]$ onde:

$$q = \frac{1+r-b}{a-b}, \quad 1-q = \frac{a-(1+r)}{a-b}.$$

□

Pode-se obter uma fórmula de apreçamento através do seguinte resultado:

Proposição 2.2 *Considere o modelo binomial uniperiódico. Então sob A.O.A., o preço justo de um derivativo X_1 em $t = 0$ é dado por:*

$$X_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*[X_1]$$

Para a prova, ver [9].

Note que como

$$\mathbb{E}^*[\bar{S}_1 | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^* \left[\frac{S_1}{1+r} \middle| \mathcal{F}_0 \right] = S_0 = \bar{S}_0,$$

$\{\bar{S}_n\}_{n=0,1}$ é um martingal com relação a $\mathbf{P}^*$.

Este é um resultado especial do Teorema Fundamental que enunciaremos a seguir.

Precisaremos também definir uma medida de martingal equivalente que será a condição necessária e suficiente para a ausência de arbitragem.

Definição 2.3 *Uma medida de probabilidade $\mathbf{P}^*$ em um espaço de probabilidade é dita equivalente a $\mathbf{P}$ se, para todo evento $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}^*(A) = 0$. No caso de Ω finito, discreto com $\mathcal{F}$ sendo todos os subconjuntos de Ω medidas equivalentes associam probabilidade positiva aos mesmos eventos. Assim, se $\mathbf{P}(\omega) > 0$, $\mathbf{P}^*$ é equivalente a $\mathbf{P}$ se $\mathbf{P}^*(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.*

Definição 2.4 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F}, \Pi, S)$. Uma medida $\mathbf{P}^* \sim \mathbf{P}$ e tal que o processo $\bar{S}$ é $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ -martingal é chamada uma medida de martingal equivalente (M.M.E.) ou medida neutra ao risco.*

Agora, vejamos o Teorema no caso multiperiódico mas com Ω ainda finito:

Teorema 1 (Teorema Fundamental do apreçamento) *Seja Ω espaço amostral finito, $\mathcal{F}$ o conjunto dos eventos, $\mathbf{P}$ medida de probabilidade, $\mathbb{F}$ uma filtração, $\Pi = \{0, 1, 2, \dots, T\}$ espaço do tempo e S vetor de preços. O modelo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F}, \Pi, S)$ é viável se, e só se, existe uma Medida de Martingal Equivalente.*

2.2

Prova da necessidade

Para provarmos o teorema acima, precisaremos dos dois lemas abaixo, sendo o segundo chamado de Teorema do Plano Separador. As demonstrações podem ser encontradas em [9].

Lema 2 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ fechado e convexo e tal que $0 \notin C$. Então existe um funcional linear $l : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ e um número real $\alpha > 0$ tal que $\forall x \in C, l(x) \geq \alpha$. Em particular, o hiperplano $l(x) = 0$ não intercepta C .*

Lema 3 *Em $\mathbb{R}^n$, sejam K um conjunto compacto e convexo e V um subespaço vetorial. Se $K \cap V = \emptyset$ então existe um funcional linear $l : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que*

$$1. \forall x \in K : l(x) > 0$$

$$2. \forall x \in V : l(x) = 0$$

(Logo V está contido num hiperplano que não intercepta K)

Demonstração da necessidade:

Lembre que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ e $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) > 0 \quad i = 1, \dots, m$. Então identificamos uma X variável aleatória com seus valores $(X(\omega_1), \dots, X(\omega_m))$, ou seja, se W é o conjunto de todas as variáveis aleatórias em Ω identificamos W com o $\mathbb{R}^m$.

Considere os espaços:

$$\begin{aligned} V &= \{X \in W; V_0(\theta) = 0 \text{ e } X = V_N(\theta) \text{ para alguma } \theta \in \Theta\} \\ &= \{V_N(\theta) \in W; V_0(\theta) = 0 \text{ e } \theta \text{ é predizível e auto-financiadora}\} \end{aligned}$$

i.e., conjunto das variáveis aleatórias replicáveis via $\theta \in \Theta$ com valor inicial nulo, e

$$K = \{X \in W; X \geq 0 \text{ com } \mathbb{E}[X] = 1\}.$$

Então $K \cap V = \emptyset$. Caso contrário, existiria $\theta \in \Theta$ com $V_0(\theta) = 0$ e $V_N(\theta) \geq 0$ e $\mathbb{E}[V_N(\theta)] > 0 \Rightarrow \mathbf{P}(V_N(\theta) > 0) > 0$, i.e., θ é oportunidade de arbitragem. Contradição com a viabilidade. Além disso, K é convexo e compacto e V é espaço vetorial, logo aplicamos o Teorema do Plano Separador, obtendo um funcional linear $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$1. \forall X \in K : L(X) > 0.$$

$$2. \forall X \in V : L(X) = 0.$$

onde L é representado por $(\lambda(\omega_1), \dots, \lambda(\omega_m)) \in \mathbb{R}^m$. Portanto, podemos reescrever:

$$(1') \forall X \in K : \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0.$$

$$(2') \forall X \in V : \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) = 0.$$

De (1') segue que $\lambda(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$. De fato, basta escolher $X_i(\omega) = \frac{1}{p_i} 1_{\{\omega_i\}} \geq 0$ e $\mathbb{E}[X_i] = 1 \quad i = 1, \dots, m$ e

$$\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) = \frac{1}{p_i} \lambda(\omega_i) > 0 \Rightarrow \lambda(\omega_i) > 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Defina a medida de probabilidade $\mathbf{P}^*$ em $(\Omega, \mathcal{F})$ por:

$$\mathbf{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\tilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\tilde{\omega})} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^* \sim \mathbf{P}.$$

Resta checar que $\mathbf{P}^*$ é Medida de Martingal equivalente (MME). Para isso, precisamos do seguinte resultado:

Proposição 2.5 *Dado $V_0(\theta) \in \mathcal{F}_0$ e $(\theta_n^1, \theta_n^2, \dots, \theta_n^d); n = 1, \dots, N$ predizível, então existe um único processo $\{\theta_n^0; n = 1, \dots, N\}$ tal que $\theta = \{(\theta_n^0, \theta_n^1, \theta_n^2, \dots, \theta_n^d); n = 1, \dots, N\}$ é uma estratégia auto-financiadora com valor inicial V_0 nulo.*

Demonstração:

Escolha $\theta_0^0 \in \mathcal{F}_0$ tal que $\theta_0^0 = 0$ e para $n \geq 1$ define-se θ_n^0 de tal forma que seja válida a condição de auto-financiamento com valor inicial nulo:

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(\theta) &= \theta_n^0 + \theta_n^1 \bar{S}_n^1 + \dots + \theta_n^d \bar{S}_n^d = \sum_{j=1}^n (\theta_j^1 \Delta \bar{S}_j^1 + \dots + \theta_j^d \Delta \bar{S}_j^d) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_j^1 \Delta \bar{S}_j^1 + \dots + \theta_j^d \Delta \bar{S}_j^d) + \theta_n^1 \Delta \bar{S}_n^1 + \dots + \theta_n^d \Delta \bar{S}_n^d. \end{aligned}$$

Cancelando os termos obtemos:

$$\theta_n^0 = \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_j^1 \Delta \bar{S}_j^1 + \dots + \theta_j^d \Delta \bar{S}_j^d) + [-\theta_n^1 \bar{S}_{n-1}^1 - \dots - \theta_n^d \bar{S}_{n-1}^d],$$

de onde se conclui que $\theta_n^0 \in \mathcal{F}_{n-1}$. Assim, conseguimos uma estratégia auto-financiadora, com valor inicial nulo e que é predizível.

□

Pela (2) , $\forall X \in V$, $X = V_N(\theta)$; $\theta \in \Theta$ e

$$0 = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) \Rightarrow \frac{\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) V_N(\theta)}{\sum_{\tilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\tilde{\omega})} = 0 \Rightarrow \sum_{\omega \in \Omega} V_N(\theta) \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\tilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\tilde{\omega})} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^*[V_N(\theta)] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}^*[\bar{V}_N(\theta)] = 0$$

Mas,

$$\bar{V}_N(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{n=1}^N \langle \theta_n, \Delta \bar{S}_n \rangle$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^* \left[\sum_{n=1}^N \langle \theta_n, \Delta \bar{S}_n \rangle \right] = 0 \quad (2-1)$$

para $\{(\theta_n^1, \dots, \theta_n^d) : n \geq 1\}$ predizível.

Seja $\{\varphi_n^0\}_{n=1}^N$ tal que $\tilde{\theta}_n = \varphi^{(i)} = \{(\varphi_n^0, 0, \dots, \varphi_n^i, 0, \dots, 0); n \geq 1\}$ é predizível, auto-financiadora com valor inicial nulo.

Então, substituindo φ em 2-1 :

$$0 = \mathbb{E}^* \left[\sum_{n=1}^N \langle \tilde{\theta}_n, \Delta \bar{S}_n \rangle \right]$$

$$= \mathbb{E}^* \left[\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^d \langle \tilde{\theta}_n^j, \Delta \bar{S}_n^j \rangle \right]$$

$$= \mathbb{E}^* \left[\sum_{n=1}^N \langle \varphi_n^i, \Delta \bar{S}_n^i \rangle \right]$$

$$= \mathbb{E}^* \left[(\varphi^i \cdot \Delta \bar{S}^i)_n \right] \quad i = 1, \dots, d.$$

Logo,

$$\mathbb{E}^* \left[(\varphi^i \cdot \Delta \bar{S}^i)_n \right] = 0 \quad i = 1, \dots, d.$$

e pelo Teorema de caracterização de martingais, $\{\bar{S}_n^i\}_{n=0}^N$ é um $(\mathbf{P}^*, \mathbb{F})$ -martingal, $i = 1, \dots, d$. Logo $\bar{S}$ é $(\mathbf{P}^*, \mathbb{F})$ - martingal . □

2.3

Prova da suficiência

Demonstração da suficiência: Suponha que $\bar{S} = \{\bar{S}_n = (1, \bar{S}_n^1, \bar{S}_n^2, \dots, \bar{S}_n^d); n \in \Pi\}$ é um $(\mathbf{P}^*, \mathbb{F})$ -martingal; queremos mostrar que não existe oportunidade de arbitragem.

Por hipótese,

$$\mathbb{E}^* \left[\Delta \bar{S}_n^i | \mathcal{F}_{n-1} \right] = 0 \quad i = 1, \dots, d \quad \forall n \geq 1.$$

Dizemos então que $\mathbf{P}^*$ é uma *medida de martingal* para $\bar{S}$. Dada $\theta \in \Theta; \theta = \{\theta_n = (\theta_n^0, \dots, \theta_n^d); n \geq 1\}$ temos:

$$\bar{V}_n(\theta) = \frac{1}{S_n^0} V_n(\theta) = \beta_n V_n(\theta) = \langle \theta_n, \bar{S}_n \rangle \quad (2-2)$$

$$= V_0(\theta) + \sum_{m=1}^n \langle \theta_m, \Delta \bar{S}_m \rangle \quad (2-3)$$

$$= V_0(\theta) + \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^d \theta_m^i \Delta \bar{S}_m^i, \quad (2-4)$$

para cada $n \geq 1$ onde $V_0(\theta) = \langle \theta_0, S_0 \rangle \in \mathcal{F}_0$, i.e., $\bar{V}_n(\theta)$ é uma soma de transformadas de martingal.

Assim, $\bar{V}_{(\cdot)}(\theta)$ é um $(\mathbf{P}^*, \mathbb{F})$ -martingal com valor inicial $V_0(\theta)$, portanto

$$\mathbb{E}^*[\bar{V}_N(\theta)] = \mathbb{E}^*[\bar{V}_0(\theta)] = V_0(\theta). \quad (2-5)$$

Mas isso nos diz que não há oportunidade de arbitragem (o modelo é viável). De fato, seja $\theta \in \Theta$ com $V_0(\theta) = 0$ e tal que $\mathbf{P}^*(\bar{V}_N(\theta) \geq 0) = 1$. Então por (2.4):

$$\mathbb{E}^*[\bar{V}_N(\theta)] = V_0(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^*(\bar{V}_N(\theta) = 0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}^*(V_N(\theta) = 0) = 1,$$

logo

$$\mathbf{P}^*(V_N(\theta) \geq 0) = 1 \Rightarrow \mathbf{P}^*(V_N(\theta) = 0) = 1,$$

que é a definição de θ não ser oportunidade de arbitragem.

□