

**Renato Alencar Adelino da Costa**

**Teorema Fundamental do  
Apreçamento via transformada de  
Esscher**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
Programa de Pós-graduação em Matemática

Rio de Janeiro  
Agosto de 2005

**Renato Alencar Adelino da Costa**

**Teorema Fundamental do Apeçamento via  
transformada de Escher**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Sérgio Bernardo Volchan

Rio de Janeiro  
Agosto de 2005



**Renato Alencar Adelino da Costa**

**Teorema Fundamental do Apeçamento via  
transformada de Escher**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Sérgio Bernardo Volchan**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Leonardo Rocha Souza**

PUC-Rio

**Prof. Hélio Côrtes Lopes**

PUC-Rio

**Prof. Max Oliveira de Souza**

UFF

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 19 de Agosto de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Renato Alencar Adelino da Costa**

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na UERJ(Universidade Estadual do Rio de Janeiro) em 2001.

#### Ficha Catalográfica

Costa, Renato Alencar Adelino da

Teorema Fundamental do Apeçamento via transformada de Esscher/ Renato Alencar Adelino da Costa; orientador: Sérgio Bernardo Volchan. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2005.

v., 43 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Teorema Fundamental do Apeçamento. 3. Martingais 4. Probabilidade 5.Transformada de Esscher . 6. Finanças .I. Volchan, Sérgio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Ao professor Sérgio Volchan pela orientação, seriedade, dedicação, compreensão e paciência.

À minha namorada Cristiane Gomes Silva, cujo amor e compreensão tornaram possível a realização deste curso, abdicando de momentos comigo para que eu pudesse estudar.

Aos meus pais José Adelino da Costa e Regina Maria Alencar da Costa e a minha irmã Roberta Alencar Adelino da Costa Lopes Correia, avós e familiares pelo apoio dado por todos esses anos de minha vida.

Ao meu tio Ricardo Borges Alencar pelo apoio moral, amizade, alegria e simpatia.

Aos meus futuros sogro e sogra Laurenísio Ferreira da Silva e Elenice de Souza Gomes Silva pelo apoio e companheirismo nos últimos anos.

A Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) pelo acolhimento. Ao CNPQ e ao Icatu Hartford pelas bolsas de Mestrado.

Aos professores do Departamento de Matemática da PUC-Rio pelo valioso apoio.

Ao professor Hélio Côrtes Lopes que muito contribuiu para o meu encaminhamento ao longo do Mestrado.

Aos meus amigos Adrian Heringer Pizzinga, Adriana Regina Oliveira, Afonso Paiva Neto, Aldo Ferreira da Silva, Bernardo Kulnig Pagnoncelli, Carla Jardim Dias, Cristiane Azevedo Ferreira, Cynthia Oliveira L. Ferreira, Débora Freire Mondaine, Felipe Tâmega, Ila Maria L. Fernandes, Jéssica Quintanilha Kubrusly, João Domingos G.S. Júnior, Jorge Luiz de Oliveira S. Godoy, Leandro Tavares da Silva, Luzia da Costa Tonon, Marcos Aurélio Citeli da Silva, Marcos de O. Lage Ferreira, Paula Monteiro Baptista, Rafael Kaufmann Nedal, Regina Kazumi Fukuda, Renner Pereira de Castro, Sérgio Almaraz, Tânia Vieira e Thomas Lewiner pela ajuda, incentivo e companheirismo nesta jornada. Aos amigos Anderson Mazolli Lisboa, Décio Marques de Paiva, Rafael Ferreira Brasil e Lennon Lopes Corrêa, pela amizade de longos anos.

Às Secretárias e aos Auxiliares Administrativos do Departamento de Matemática da PUC-Rio pela prestatividade de sempre.

## Resumo

Costa, Renato Alencar Adelino da; Volchan, Sérgio. **Teorema Fundamental do Apreçamento via transformada de Esscher**. Rio de Janeiro, 2005. 43p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesta dissertação fazemos uma exposição do Teorema Fundamental do Apreçamento para modelos em tempo discreto, o qual afirma que, sob certas hipóteses, a ausência de oportunidades de arbitragem equivale a existência de uma medida de martingal equivalente. Discutimos inicialmente o resultado no caso de espaços amostrais finitos e posteriormente o caso geral, através da técnica da Transformada de Esscher.

## Palavras-chave

Teorema Fundamental do Apreçamento; Probabilidade; Medida de martingal equivalente; arbitragem; viabilidade; carteira; Martingais; estratégia; Transformada de martingal; Apreçamento de ativos.

## Abstract

Costa, Renato Alencar Adelino da; Volchan, Sérgio. **Fundamental Asset pricing via Esscher Transform** . Rio de Janeiro, 2005. 43p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This dissertation is concerned with the Fundamental Asset Pricing Theorem for discrete-time models which asserts that, under suitable hypothesis, absence of arbitrage opportunities is equivalent to the existence of an equivalent martingale measure. We first discuss the case of finite sample spaces and then the general case, by the use of the Esscher Transform technique.

## Keywords

Probability; Equivalent Martingale Measures; portfolio; viability; Arbitrage; Martingale; strategy ; Martingale Transform; Asset Pricing ; Fundamental Asset Pricing Theorem.

## Sumário

1	Introdução	8
1.1	Revisão de Probabilidade	9
1.2	Conceitos de finanças e introdução do modelo	15
2	Teorema no caso de espaço amostral finito	<b>22</b>
2.1	Exemplo	22
2.2	Prova da necessidade	25
2.3	Prova da suficiência	28
3	Teorema Fundamental do Apreçamento via transformada de Esscher	<b>29</b>
3.1	Prova da necessidade	29
4	Conclusão e trabalhos futuros	<b>39</b>
	Referências Bibliográficas	<b>40</b>
5	Apêndice	<b>41</b>