

3

Mecânica Não-extensiva

3.1

Entropia de Informação e Princípio da Máxima Entropia

A compreensão e utilização do conceito de entropia são fundamentais na análise de sistemas estatísticos. Ela fornece a ponte entre a descrição microscópica e a descrição macroscópica.

O conceito de entropia, associado à medida do grau de desordem em sistemas termodinâmicos, é devido a Boltzmann, que no final do século XIX introduziu a expressão:

$$S = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad (3.1)$$

Onde p_i é a probabilidade do sistema ser encontrado no microestado i e W é o número total de microestados acessíveis, dados os vínculos macroscópicos do problema. Para estados equiprováveis temos $p_i = 1/W$, e assim obtém-se a famosa fórmula $S = \ln W$ (aqui tomamos a constante de Boltzmann $K_B=1$). Para um contínuo de estados possíveis x , a entropia pode ser expressa como:

$$S = -\int p(x) \ln p(x) dx \quad (3.2)$$

Utilizaremos nesta dissertação o conceito de entropia de informação, que generaliza o conceito de entropia termodinâmica de Boltzmann para uma classe geral de problemas estocásticos, envolvendo medida de desordem, diversidade, incerteza, etc. Quando a informação é sobre a energia, tem-se a entropia termodinâmica, quando a informação é sobre preços, tem-se a entropia econômica, etc.

O texto fundamental sobre o conceito e medida da entropia de informação é devido a Claude Elwood Shannon (1948) intitulado "*The Mathematical Theory of*

Communication." [22]. Trata-se de uma publicação técnica da empresa norte-americana de telecomunicações Bell Telephone Laboratories, apresentando uma sistematização do conhecimento necessário ao entendimento da eficiência em sistemas de comunicação. Desde então suas idéias permanecem mais conhecidas sob o nome de teoria da informação, no sentido largo desta expressão. Nela, temos o conceito de entropia significando incerteza de informação.

Na descrição estatística de sistemas macroscópicos, a cada observável X é associada uma probabilidade $p(x)$ de ser medido o valor $X=x$. A cada distribuição $p(x)$ podemos associar uma medida de incerteza associada à informação (ou à falta de informação) sobre o sistema que esta distribuição representa ou, em outras palavras, ter uma medida da ignorância de nosso estágio de conhecimento. Esta incerteza é de natureza probabilística. A medida de Shannon para a incerteza de uma distribuição é dada por:

$$S[p] = -\int p(x) \ln p(x) dx \quad (3.3)$$

A incerteza probabilística também é chamada de entropia de informação $S[p]$ devido à sua expressão matemática ser análoga a da entropia termodinâmica, dada pela equação (3.2).

Assim, diferentes distribuições têm diferentes entropias de informação associadas. Note que, no caso da distribuição de probabilidade prever a observação de apenas um valor particular x_0 , isto é, $p(x) = \delta(x-x_0)$, esta expressão fornece $S[p]=0$, significando incerteza nula na obtenção de resultado de medida, ou seja, total previsibilidade. Para qualquer outra distribuição $S[p]>0$. Logo, a entropia é sempre positiva quando o resultado não é totalmente previsível.

Na análise de qualquer fenômeno, temos incertezas inerentes ao próprio sistema, e outras devido à falta de informação ou a informações incompletas sobre o sistema. A cada estágio de conhecimento sobre o sistema, dentre o conjunto de possíveis descrições estatísticas $p(x)$ consistentes com estes vínculos, tem-se um valor máximo $S_{MAX}[p]$ e um valor mínimo $S_{MIN}[p]$. A inclusão de mais informações ou vínculos restringe o conjunto de distribuições consistentes com todos eles. Portanto, com a utilização de todas as informações disponíveis ou vínculos conhecidos sobre o sistema, restringe-se ao máximo este conjunto de distribuições, gerando o menor valor possível para o intervalo $\Delta = S_{MAX}[p] - S_{MIN}[p]$ de valores de entropia de informação, conforme ilustrado no diagrama abaixo:

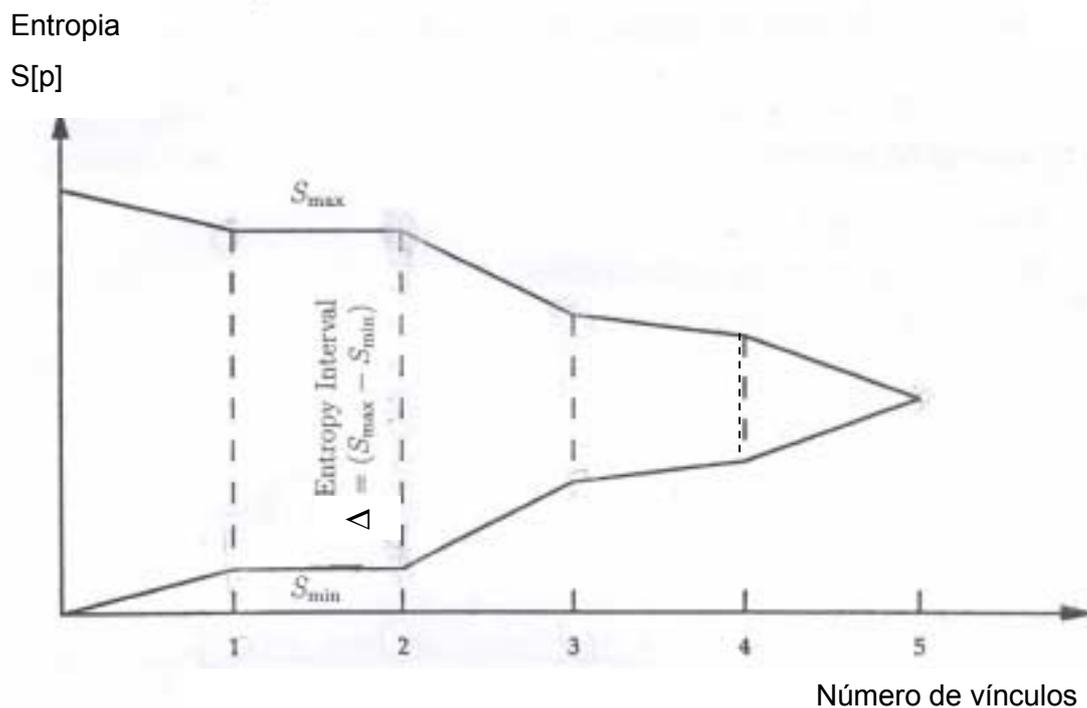


Figura 3.1 – Representação diagramática da redução do intervalo de entropia de informação $\Delta = S_{MÁX}[p] - S_{MIN}[p]$ das distribuições de probabilidade $p(x)$ que satisfazem às informações dadas, à medida que acrescentamos mais informações sobre o sistema.

Deve-se ressaltar que o parâmetro Δ não descreve a incerteza do resultado particular de uma medida e sim a incerteza sobre o valor da probabilidade associada a cada medida.

Após a utilização de todas as informações conhecidas, ainda não temos certeza de qual é a distribuição que descreve estatisticamente o sistema, havendo um intervalo de entropia de informação Δ residual. Esta incerteza é devido justamente às informações desconhecidas.

Dentro do princípio de incerteza máxima sobre o que desconhecemos, devemos escolher, dentre as distribuições compatíveis com os vínculos do problema, a distribuição associada à máxima entropia. De acordo com o diagrama da figura 3.1, devemos encontrar a distribuição que maximiza a entropia da informação fornecendo $S_{MÁX}[p]$, dadas todas as informações disponíveis.

Maximizar a entropia (3.3) significa assumir que o sistema é o mais aleatório possível, dentro dos vínculos do problema. Em outras palavras, a distribuição de probabilidade que tem a máxima entropia (incerteza) permitida pela informação

disponível é a que deve ser usada para se fazer inferências baseadas em informações incompletas. Qualquer outra distribuição associada a uma entropia menor significaria a utilização de algum tipo de informação extra ou “escondida”.

Usando estes princípios da teoria de informação, podemos analisar por exemplo, o problema da difusão, fenômeno que descreve o espalhamento macroscópico suave de um conjunto de partículas que se movem aleatoriamente. O protótipo desse problema é o movimento Browniano. A distribuição das posições x das partículas após um intervalo temporal do processo difusivo é descrito em termos estatísticos através da distribuição $p(x)$.

Dada uma mesma condição inicial x_0 para a localização de cada partícula (considerando o caso unidimensional), as partículas se espalham, significando que a incerteza em suas posições ao longo do tempo aumenta, e tende a um máximo no equilíbrio termodinâmico.

Sendo uma forma de transporte, a difusão é um processo de não-equilíbrio. Porém, a dinâmica assintótica de longa escala temporal num *ensemble* de partículas pode ser descrita pela mecânica estatística de equilíbrio. O formalismo da máxima entropia prevê assim a ligação natural entre os processos de não-equilíbrio e os estados assintóticos de equilíbrio termodinâmico.

Neste formalismo, o problema da difusão se reduz a maximizar a entropia de Shannon, sujeita aos vínculos do sistema. Neste caso, existem apenas dois vínculos. O primeiro é a condição de normalização de $p(x)$:

$$\int p(x)dx = 1 \quad (3.4)$$

O segundo, de que as partículas, mesmo difundindo-se, não se afastam muito de sua posição inicial, ou seja, de que a variância de $p(x)$, que caracteriza a largura da distribuição deve ser finita. Considerando distribuições de média nula:

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 p(x)dx = \sigma^2 \quad (3.5)$$

A maximização da entropia sujeita a vínculos pode ser obtida através da técnica dos multiplicadores de Lagrange [23]. Sob as n condições de vínculo $F_i[p(x)] = 0$, a maximização de $S[p]$ equivale à maximização da Lagrangeana $L[p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$:

$$L(p, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = S[p] - \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i[p], \quad (3.6)$$

onde λ_i , ($i = 1, \dots, n$) são os multiplicadores de Lagrange. Usando a entropia de Shannon (3.3) e os vínculos (3.4) e (3.5), tem-se:

$$L[p, \lambda_1, \lambda_2] = - \int p(x) \ln p(x) dx - \lambda_1 \left[\int p(x) dx - 1 \right] - \lambda_2 \left[\int x^2 p(x) dx - \sigma^2 \right] \quad (3.7)$$

Pode-se mostrar que $L[p, \lambda_1, \lambda_2]$ possui máximo global [24]. Considerando variações $\delta p(x)$ arbitrárias em relação à distribuição que maximiza $L[p, \lambda_1, \lambda_2]$:

$$\frac{\delta L}{\delta p} \delta p = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\delta L}{\delta p} = 0 \quad (3.8a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta p} = & - \int \delta p(x) \ln p(x) dx - \int p(x) \frac{\delta p(x)}{p(x)} dx \\ & - \lambda_1 \int \delta p(x) dx - \lambda_2 \int x^2 \delta p(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.8b)$$

$$\int \delta p(x) [\ln p(x) + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x^2] dx = 0 \quad (3.8c)$$

$$\ln p(x) + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 0 \quad (3.8d)$$

$$p(x) = \exp - (1 + \lambda_1) \exp - (\lambda_2 x^2) \quad (3.8e)$$

Aplicando-se os vínculos (3.4) e (3.5) à equação (3.8d), obtém-se:

$$(1 + \lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \quad (3.9a)$$

$$e \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (3.9b)$$

ou seja, os multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 estão associados respectivamente à constante de normalização e à variância da distribuição ótima. De (3.8e) e (3.9):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.10)$$

Verificamos assim que a solução deste problema fornece a distribuição Gaussiana como a distribuição ótima, ou seja, que as propriedades macroscópicas da difusão são regidas pela distribuição Gaussiana, de acordo com a descrição de Einstein de 1905 para o movimento Browniano [25].

Em resumo, através deste formalismo, a distribuição Gaussiana foi obtida de acordo com dois paradigmas da Física Estatística: o primeiro é de que a entropia do sistema tende a um máximo, ou seja, assumindo a validade de um princípio variacional, e segundo, que o vínculo da variância garante que tal distribuição atratora ótima é a Gaussiana, de acordo com o T.L.C.

3.2

Obtenção da Distribuição de Tsallis

Nos problemas clássicos de mecânica estatística, a entropia é uma quantidade extensiva. Isto significa que quando o volume do sistema varia, a entropia varia proporcionalmente ao volume devido às diferentes regiões do sistema serem independentes.

A expressão (3.3) para a entropia garante que ela é uma grandeza extensiva. Assim, dados dois sistemas independentes, descritos pelas distribuições p_A e p_B respectivamente, a entropia do sistema combinado, descrito pela probabilidade conjunta $p=p_A \cdot p_B$, é simplesmente a soma das entropias individuais (ver apêndice):

$$S[p] = S[p_A] + S[p_B] \quad (3.11)$$

No entanto, a hipótese de extensividade da entropia não é verificada para sistemas com interações de longo alcance ou em eventos que envolvem um tempo de relaxação longo, cuja aproximação ao equilíbrio é tão lenta que a

extensividade não é encontrada na prática. Sistemas descritos pela mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) têm ainda em comum a característica de serem ergódicos em todo o espaço de fase, ou seja, é igualmente provável que sejam encontrados em qualquer estado possível. Levando-se em conta a possibilidade de que, de acordo com as condições iniciais ou devido à não-homogeneidade do sistema, como por exemplo, estruturas porosas ou fractais, alguns subespaços sejam preferenciais, é necessário generalizar a expressão (3.3).

Desde a década de 60, dentro do campo de teoria da informação têm sido feitas propostas de generalização desta expressão. Em 1961 por exemplo, foi proposta a medida de entropia de Renyi [26] dada por:

$$S_q[p] = \frac{1}{1-q} \ln \int [p_q(x)]^q dx \quad (3.12)$$

onde q é um parâmetro real.

Em 1988 [19], a partir de métodos heurísticos foi introduzido o funcional da entropia não-extensiva de Tsallis:

$$S_q[p] = \frac{1 - \int [p(x)]^q dx}{q-1} \quad (3.13)$$

onde q é um parâmetro real caracterizando a estatística particular e interpretado como parâmetro de não-extensividade, que depende do alcance da interação ou quão longe do equilíbrio o sistema se encontra. Quando $q > 1$, esta expressão dá peso maior às regiões mais prováveis e peso menor às regiões menos prováveis para o cálculo da entropia. Quando $q < 1$, o oposto ocorre.

O funcional de entropia (3.13) possui as propriedades usuais de positividade, concavidade, etc. e generaliza a propriedade de aditividade de Shannon [27]. Deve-se ressaltar que, apesar da semelhança entre os funcionais entrópicos (3.12) e (3.13), que em particular produzem como distribuição ótima, sob vínculos apropriados, q -Gaussianas, a expressão (3.13) é a única que satisfaz um conjunto de condições que generalizam os axiomas de Shannon e Kinchin [28].

A partir da expressão:

$$p^{q-1} = \exp[\ln(p^{q-1})] = \exp[(q-1)\ln p] \quad (3.14a)$$

no limite $q \rightarrow 1$, obtém-se:

$$p^{(q-1)} = 1 + (q-1)\ln p + O(q-1)^2 + \dots \quad (3.14b)$$

e ainda:

$$\int p(x)^q dx = \int p(x)[1 + (q-1)\ln p(x)]dx \quad (3.14c)$$

$$\int p(x)^q dx = 1 + (q-1)\int p(x)\ln p(x)dx \quad (3.14d)$$

Assim, de (3.13 e 3.14d) :

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q(p) = \frac{-(q-1)\int p(x)\ln p(x)dx}{(q-1)} = -\int p(x)\ln p(x)dx = S_1(p) \quad (3.15)$$

Para a entropia generalizada dada pela equação (3.13), pode-se mostrar que sendo p_A e p_B as distribuições de dois sistemas independentes, a entropia de informação do sistema acoplado satisfaz a (ver apêndice):

$$S_q[p] \equiv S(p_A * p_B) = S_q[p_A] + S_q[p_B] + (1-q)S_q[p_A]S_q[p_B] \quad (3.16)$$

A entropia é portanto, super-extensiva para $q < 1$, sub-extensiva para $q > 1$ e recupera-se a extensividade para $q = 1$. A expressão (3.13) fornece assim a possibilidade de unificação de todos os regime difusivos em um único formalismo.

Usando procedimento análogo ao da seção 3.1 para a descrição de sistemas não-extensivos, devemos maximizar a entropia de Tsallis, sujeita aos vínculos do problema. A difusão generalizada é descrita através da condição de normalização (3.4), mas relaxando-se o vínculo de variância (3.5), utilizando $[p(x)]^q$ como peso estatístico. Define-se assim a variância generalizada:

$$\langle x^2 \rangle_q = \int x^2 [p(x)]^q dx = \sigma_q^2 \quad (3.17)$$

Este novo vínculo permite a obtenção de soluções leptocúrticas em contraste com a família de exponenciais que são soluções típicas da maximização da entropia de Shannon. Distribuições leptocúrticas com variância divergente podem ser soluções ótimas da estatística não-extensiva desde que a variância generalizada seja finita. Isto se deve ao peso generalizado $[P(x)]^q$ na expressão (3.17), que para $q > 1$, diminui a contribuição relativa das caudas das distribuições quando comparada ao cálculo da variância usual (3.5).

Utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange e os vínculos (3.4) e (3.17), (3.6) se escreve como:

$$L(p, \lambda_1, \lambda_2) = S_q[p] - \lambda_1 \left[\int p(x) dx - 1 \right] - \lambda_2 \left[\int x^2 [p(x)]^q dx - \sigma^2 \right] \quad (3.18)$$

Substituindo (3.13), a maximização de (3.18) usando (3.8a), temos as seguintes etapas:

$$\frac{-1}{(q-1)} \int q [p(x)]^{(q-1)} \delta p(x) dx - \lambda_1 \int \delta p(x) dx - \lambda_2 \int x^2 q [p(x)]^{(q-1)} \delta p(x) dx = 0 \quad (3.19a)$$

$$\int \left\{ \frac{-q}{(q-1)} [p(x)]^{(q-1)} - \lambda_1 - \lambda_2 x^2 q [p(x)]^{(q-1)} \right\} \delta p dx = 0 \quad (3.19b)$$

$$- [p(x)]^{(q-1)} \left(\frac{q}{(q-1)} + \lambda_2 x^2 q \right) - \lambda_1 = 0 \quad (3.19c)$$

$$[p(x)]^{(q-1)} = \frac{-\lambda_1}{\frac{q}{(q-1)} (1 + \lambda_2 x^2 (q-1))} \quad (3.19d)$$

$$[p(x)]^{(q-1)} = \frac{-\lambda_1 (q-1)}{q} \frac{1}{(1 + \lambda_2 x^2 (q-1))} \quad (3.19e)$$

Verificamos assim que a distribuição ótima tem a forma funcional de q-Gaussianas, análoga a (2.15):

$$p_q(x) = Z_q^{-1} [1 + (q-1)\lambda_2 x^2]^{-1/(q-1)} \quad (3.20)$$

Aplicando-se o vínculo de normalização (3.4) à solução (3.20) e identificando $\lambda_2 \equiv \beta$, obtém-se, para $1 < q < 3$, a constante de normalização Z_q^{-1} dado pela equação (2.16). Aplicando-se o vínculo de variância generalizada (3.17) a (3.20), obtém-se que [20]:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma_q^2} \left[\frac{\sqrt{(q-1)}}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)} \right]^{\frac{2(q-1)}{(3-q)}} \quad (1 < q < 3) \quad (3.21)$$

ou seja, o multiplicador de Lagrange $\lambda_2 \propto \sigma_q^{-2}$.

A versão mais correta da obtenção da estatística não-extensiva utiliza valores médios generalizados normalizados. Assim, a expressão (3.17) para o vínculo da variância é substituída por:

$$\langle x^2 \rangle_q \equiv \frac{\int x^2 [p(x)]^q dx}{\int [p(x)]^q dx} = \sigma_q^2 \quad (3.22)$$

No entanto, os resultados apresentados até aqui são qualitativamente os mesmos [29]. As distribuições de Tsallis (3.20) otimizam a entropia generalizada (3.13) sujeita aos novos vínculos, havendo em particular a simplificação da expressão (3.21).

Como vimos no capítulo 2, as q-Gaussianas (3.20) para $q > \frac{5}{3}$, possuem caudas longas, violando a condição de variância finita dos processos difusivos normais descritos anteriormente. Isto significa que estas distribuições produzem com alta probabilidade passos muito grandes, indicando a possibilidade de um mecanismo de transporte mais eficiente do que a difusão normal, caracterizado por um comportamento anômalo superdifusivo.

3.3

Dinâmica dos Retornos de Preços e Equação de Fokker-Planck

Processos estocásticos que envolvem difusão normal, e por consequência, ausência de correlação, tipicamente tem evolução temporal da distribuição da variável aleatória descrita por equações de Fokker-Planck (EFP) lineares. Por outro lado, as variáveis estocásticas descritas por q-Gaussianas devem possuir forte dependência temporal, uma vez que a estatística não-extensiva sugere sistemas com interação ou memória de longo alcance. No mercado financeiro, deve-se esperar efeito de memória na formação de preços intradiários devido à interação dos investidores.

Processos estocásticos com difusão anômala correlacionada podem ser descritos por EFP não-lineares. Uma classe de EFP não-linear tem sido recentemente analisada [30,31,32] e será objeto de nosso interesse. Nesses estudos, um importante resultado é que as soluções estacionárias são distribuições derivadas da estatística não-extensiva de Tsallis.

Vamos analisar generalizações de EFPs no ambiente não-extensivo, e investigar a evolução temporal das suas soluções. Considere a equação diferencial não-linear generalizada que descreve um processo puramente difusivo:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} [P(x,t)]^{2-q} \quad (3.23)$$

com D sendo o coeficiente de difusão positivo. Esta equação equivale à uma EFP não-linear quando $q = 1$.

A equação (3.23) descreve vários processos de transporte como, por exemplo, a difusão de gases em meios porosos.

Dada a condição inicial $P(x,0) = \delta(x)$, a equação (3.23) possui como solução dependente do tempo uma q-Gaussiana [30] :

$$P_q(x,t) = Z_q^{-1}(t) \left[1 + (q-1) \frac{x^2}{\Lambda_q^2(t)} \right]_+^{1/(1-q)} \quad (3.24)$$

com $Z_q^{-1}(t)$, a constante de normalização e $\Lambda_q(t)$, o parâmetro de escala da distribuição, dado por:

$$\Lambda_q(t) = [\gamma_q D t]^{1/(3-q)} \quad (3.25)$$

com γ_q um pré-fator dependente de q .

O parâmetro $\Lambda_q(t)$ em (3.24) controla o valor da distribuição à “meia altura”, podendo ser considerado uma medida da largura da distribuição. A partir da dependência temporal (3.25), obtém-se que $\Lambda_q^2(t)$ satisfaz à relação de escala:

$$\Lambda_q^2(kt) = k^{2/(3-q)} \Lambda_q^2(t) \quad (3.26)$$

com k , um fator arbitrário de mudança de escala temporal. De (3.26), vê-se que de acordo com o valor de q , $\Lambda_q^2(t)$ escala mais lentamente do que t , linearmente com t ou mais rapidamente do que t , indicando respectivamente um comportamento subdifusivo para $q < 1$, difusão normal para $q = 1$ e comportamento superdifusivo para $q > 1$.

Até aqui, os processos de difusão anômala com correlação foram descritos a nível macroscópico, sendo regidos por EFPs não-lineares. A nível microscópico, os processos são descritos por equações de Langevin. A equação diferencial estocástica de Itô-Langevin [15] correspondente a (3.23) é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = G(x,t)\eta(t) \quad (3.27)$$

com $\eta(t)$ um ruído branco caracterizado por $\langle \eta(t) \rangle = 0$ e $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t-t')$. A amplitude do ruído estocástico é dada por:

$$G(x,t) = (2D)^{1/2} [P(x,t)]^{1-q/2} \quad (3.28a)$$

A amplitude (3.28a) corresponde a um processo multiplicativo especial, pois depende da própria distribuição de probabilidade, ou seja, evolui de acordo com um processo de “*feedback*” estatístico do nível macroscópico, representado pela distribuição $P(x,t)$ [33].

Através da equação de Itô-Langevin associada (3.27) e (3.28a), vê-se que a EFP não-linear (3.23) descreve um processo difusivo cujo coeficiente de difusão efetivo é dado por:

$$D_{ef}(x,t) = DP^{1-q}(x,t) \quad (3.28b)$$

Analisando as trajetórias da variável estocástica x descritas pela equação de Itô-Langevin (3.27), o tamanho dos impulsos sofridos $G(x,t)$ dependem da frequência $P(x,t)$ de observação dos valores de x . De acordo com (3.28a), se $q > 1$, a amplitude do ruído é maior para valores proibidos de x (de baixa probabilidade) e vice-versa. Conseqüentemente, um passo x pouco provável tende a ser seguido por uma grande variação no próximo intervalo de tempo. Este é o mecanismo responsável pelo comportamento superdifusivo das soluções (3.24) com $q > 1$, mostrados anteriormente.

Vamos agora considerar uma classe particular de processos difusivos anômalos correlacionados descritos por EFPs não-lineares generalizadas do tipo:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [K(x)P(x,t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} [P^{2-q}(x,t)] \quad (3.29)$$

onde $P(x,t)$ é a função de distribuição, $K(x) = -dV(x)/dx$ é a força externa (*drift*) associada ao potencial $V(x)$ e D é um coeficiente de difusão positivo. Esta equação combina o efeito da evolução da distribuição de probabilidade devido à uma força $K(x)$ e o seu espalhamento devido à difusão. O termo difusivo em (3.29) tal qual em (3.23), depende da densidade de probabilidade e representa efeitos não-lineares que podem ser interpretados como devido à presença de memória no sistema. Da mesma forma, (3.29) descreve um processo difusivo cujo coeficiente de difusão efetivo é dependente no tempo dado por (3.28b).

A equação estocástica de Itô-Langevin [15] correspondente a (3.29) é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = K(x) + G(x,t)\eta(t) \quad (3.30)$$

com amplitude de ruído branco dada por (3.28a). Neste caso, além do termo estocástico gerando flutuações arbitrárias da variável x , existe um termo de amortecimento determinístico dado por $K(x)$, que permite a estabilização do processo.

Deve-se observar que o termo de difusão em (3.29) (termo envolvendo a segundo derivada em x) descreve a diferença entre o valor de $P^{2-q}(x)$ e o valor médio nas vizinhanças de x ($\overline{P^{2-q}}$), contribuindo positivamente ou negativamente para $\frac{\partial P}{\partial t}$ se $P^{2-q}(x)$ for menor ou maior do que $\overline{P^{2-q}}$, respectivamente. Assim, para $(2-q) > 0$, o termo de difusão contribui para eliminar as flutuações locais em $P(x)$. Neste caso, espera-se que para potenciais $V(x)$ confinantes, obtenha-se situação estacionária de equilíbrio $P^*(x)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Vamos mostrar que equações do tipo (3.29) admitem como soluções estacionárias as q -Gaussianas [31]. Podemos interpretar (3.29) como uma equação de continuidade, onde a mudança temporal de $P(x,t)$ é igual ao negativo da divergência da corrente de probabilidade. Dessa forma, a EFP se torna:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0, \quad (3.31)$$

onde

$$j(x,t) = K(x)P(x,t) - D \frac{\partial}{\partial x} P^{2-q}(x,t). \quad (3.32)$$

A solução estacionária $P^*(x)$ é dada por $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = 0$, o que implica, a partir de (3.31), que $\frac{\partial j}{\partial x} = 0$, ou seja, $j = f(t)$. Utilizando como condições naturais de contorno $P(x,t) \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$, temos que $j(x \rightarrow \pm\infty, t) = 0$, o que nos leva à $j(x) = 0$. Assim, de (3.32):

$$K(x)P^*(x) - D \frac{dP^{*2-q}(x)}{dx} = 0 \quad (3.33)$$

Considere as etapas abaixo, com $V(x) = -\int_{x_0}^x K(x')dx'$ e constante de integração C positiva. A equação (3.33) se reescreve como:

$$\frac{1}{D} K(x)dx = \frac{dP^{*2-q}(x)}{P^*(x)} = (2-q) \frac{P^*(x)^{1-q} dP^*(x)}{P^*(x)} = (2-q) P^*(x)^{-q} dP^*$$

$$\frac{1}{D}[-V(x)] = \frac{(2-q)}{(1-q)} \left[P^*(x)^{1-q} - C^{1-q} \right]$$

Logo:

$$P^{*1-q}(x) = -\frac{(1-q)}{D(2-q)}V(x) + C^{1-q} \quad (3.34a)$$

$$P^{*1-q}(x) = C^{1-q} \left[1 - \frac{(1-q)}{D(2-q)C^{1-q}}V(x) \right] \quad (3.34b)$$

Definindo:

$$\beta = \frac{1}{D(2-q)C^{1-q}}, \quad (3.35)$$

obtém-se:

$$P^*(x) = C \left[1 - \beta(1-q)V(x) \right]^{1/(1-q)} \quad (3.36)$$

Verificamos assim que a EFP não linear (3.29) possui como solução estacionária a distribuição de máxima entropia para a Mecânica Estatística generalizada.

Note que, de (3.35), $\beta > 0$ se $q < 2$, de acordo com a análise anterior que considerou a condição $(q-2) > 0$ para obtenção da solução estacionária. Podemos constatar ainda que no limite $q \rightarrow 1$, $\beta = D^{-1}$, e a solução estacionária tem a forma exponencial:

$$P^*(x) = C \exp \left[-\frac{1}{D}V(x) \right] \quad (3.37)$$

Vamos considerar um caso muito importante de força, caracterizada por $K(x) = a - bx$, com $b \geq 0$. Esta forma de força corresponde a um potencial quadrático cuja solução estacionária para $q = 1$, de (3.37), é a distribuição Gaussiana. Este caso corresponde ao conhecido processo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck de reversão à média [15].

Em analogia com a solução (3.24) para a E.F.P. (3.23), a solução dependente do tempo de (3.29) com $K(x) = a - bx$ é [32] :

$$P(x,t) = \frac{1}{Z_q(t)} \left\{ 1 - \beta(t) [(1-q)(x - \bar{x}(t))^2] \right\}^{1/(1-q)} \quad (3.38)$$

Da equação de Itô-Langevin (3.30), o valor médio $\bar{x}(t)$ satisfaz a:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{K}(x) = a - b\bar{x} \quad (3.39a)$$

Logo,

$$\bar{x}(t) = \frac{a}{b} + \left[\bar{x}(t_0) - \frac{a}{b} \right] \exp(-b(t - t_0)) , \quad (3.39b)$$

com t_0 um instante inicial.

Assintoticamente, no limite $t \rightarrow \infty$, (3.39b) fornece para o valor médio da solução de equilíbrio $\bar{x}(t) \rightarrow \bar{x}^* = a/b$. Assim, o termo de força linear $K(x) = a - bx$ equivale a $K(x) = -b(a - \bar{x}^*)$, onde b é a taxa no tempo de reversão à média de longo prazo \bar{x}^* . De (3.39b), vê-se que o termo constante na expressão da força linear $K(x)$ tem o efeito de alterar o valor médio de longo prazo da variável estocástica.

Substituindo-se (3.38) em (3.29), obtém-se que $Z_q(t)$ deve satisfazer a:

$$-\frac{1}{(3-q)} \frac{dZ^{3-q}(t)}{dt} + 2(2-q)D\beta(t_0)Z^2(t_0) - bZ^{3-q} = 0 \quad (3.40)$$

A solução de (3.40) é obtida substituindo-se $\tilde{Z}_q(t) = [Z_q(t)]^{3-q}$:

$$Z_q(t) = Z_q(t_0) \left[(1 - \Delta_q) \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right) + \Delta_q \right]^{1/(3-q)} \quad (3.41)$$

com
$$\tau = \frac{1}{b(3-q)} \quad (3.42a)$$

e
$$\Delta_q = \frac{2(2-q)D\beta(t_0)[Z_q(t_0)]^{q-1}}{b} \quad (3.42b)$$

A partir da dependência da constante de normalização Z_q com o parâmetro β dado em (2.16) obtém-se a relação abaixo:

$$\frac{\beta(t)}{\beta(t_0)} = \left(\frac{Z_q(t_0)}{Z_q(t)} \right)^2 \quad (3.43)$$

De (3.41) e (3.43) obtém-se que:

$$\left[\frac{\beta(t)}{\beta(t_0)} \right]^{-\frac{(3-q)}{2}} = \left[\frac{Z_q(t_0)}{Z_q(t)} \right]^{-(3-q)} = \left\{ (1 - \Delta_q) \exp\left[-\frac{(t-t_0)}{\tau} \right] + \Delta_q \right\} \quad (3.44a)$$

$$[\beta(t)]^{-\frac{(3-q)}{2}} = [\beta(t_0)]^{-\frac{(3-q)}{2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(t-t_0)}{\tau} \right] + \Delta_q \{1 - \exp\left[-\frac{(t-t_0)}{\tau} \right]\} \right\} \quad (3.44b)$$

Substituindo os valores de τ e Δ_q dados por (3.42), obtém-se:

$$\begin{aligned} \beta(t)^{-\frac{(3-q)}{2}} &= \beta(t_0)^{-\frac{(3-q)}{2}} \exp(-b(3-q)(t-t_0)) \\ &+ 2Db^{-1}(2-q)[\beta(t_0)Z^2(t_0)]^{\frac{q-1}{2}} \{1 - \exp[-b(3-q)(t-t_0)]\} \end{aligned} \quad (3.44c)$$

A partir da dependência de (3.29) com o parâmetro q , fica evidente a relação entre a não-extensividade associada à distribuição de Tsallis e a não-linearidade da EFP. Esta não-linearidade se traduz através das propriedades de difusão caracterizadas pelo comportamento no tempo do parâmetro de escala $\beta(t)$ (3.44c).

Esta equação pode ser utilizada como teste da evolução temporal de uma q -Gaussiana estacionária (com valor de q fixo).

Apresentamos na figura 3.2 os resultados da aplicação desta modelagem para os dados de alta-freqüência no mercado americano [34]. Os valores dos parâmetros de (3.44c) encontrados foram $D = 0,217 \pm 0,003$ e $b = 0,047 \pm 0,004$, com parâmetro não-extensivo estacionário ótimo das distribuições de retorno $q = 1,64 \pm 0,02$.

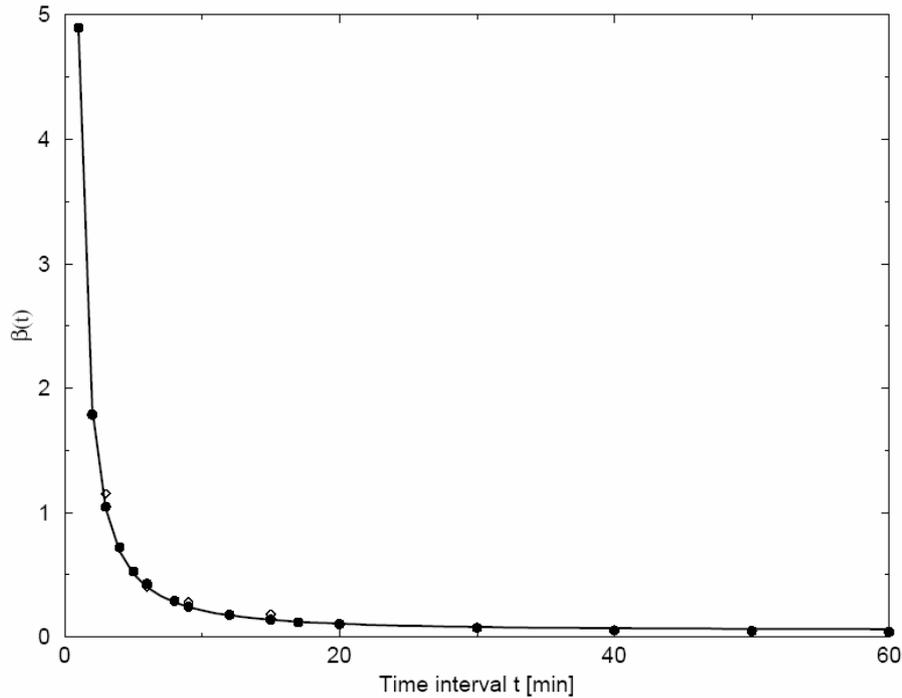


Figura 3.2 – Evolução temporal do parâmetro $\beta(t)$ para os dados do S&P 500 de julho de 2000 a janeiro de 2001 e previsão de comportamento segundo a E.F.P. não-linear (3.29) ótima.

A expressão (3.44c) independe do parâmetro de reversão à média a significando que o processo difusivo (alargamento da distribuição ao longo do tempo) não é afetado por este parâmetro.

No entanto, a taxa de reversão à média b é crucial para a obtenção da solução de equilíbrio. No limite $t \rightarrow \infty$, (3.34c) se reduz à:

$$\beta^* = \left(\frac{b}{2D(2-q)} \right)^{2/(3-q)} [\beta(t_0)Z^2(t_0)]^{-(q-1)/(3-q)} \quad (3.45)$$

Podemos também analisar o processo difusivo no limite de pequenos valores do parâmetro b . Neste caso, (3.44c) se reduz a:

$$\beta(t)^{-(3-q)/2} = \beta(t_0)^{-(3-q)/2} [1 + 2D(2-q)(3-q)\beta(t_0)Z^{q-1}(t_0)(t-t_0)] \quad (3.46a)$$

A equação (3.46a) pode ser reescrita como:

$$\beta(t) = \beta(t_0) \left[1 + \frac{(t-t_0)}{\Gamma_q} \right]^{-2/(3-q)} \quad (3.46b)$$

onde Γ_q é a escala temporal para obtenção do regime assintótico:

$$\Gamma_q = 2D(2-q)(3-q)\beta(t_0)Z^{q-1}(t_0) \quad (3.47)$$

Para tempos “longos”, isto é, $(t-t_0) \gg \Gamma_q$, obtém-se que:

$$\frac{\beta(t)}{\beta(t_0)} \propto (t-t_0)^{-2/(3-q)} \quad (3.47)$$

Sendo $\beta(t)$ equivalente a $\Lambda_q^{-2}(t)$ em (3.24), o resultado acima reproduz, no limite de taxa de reversão fraca, o comportamento encontrado em (3.26) no caso de processo difusivo livre ($K(x) = 0$).

Em resumo, mostramos que processos difusivos correlacionados podem ser modelados por uma classe de equações de Fokker-Planck não-lineares, nas quais, tanto no caso livre quanto no caso de força externa de reversão à média, fornecem q-Gaussianas como soluções invariantes por mudança de escala temporal.

De acordo com o valor do parâmetro de não-linearidade q destas equações, descrevem-se diferentes regimes difusivos. Em particular, para $1 < q < 3$, que é o caso de interesse para as aplicações no mercado financeiro desta dissertação, obtêm-se processos superdifusivos, apesar das q-Gaussianas terem variância finita para $q < 5/3$. Isto deve à presença de correlações de longo alcance na dinâmica do processo (representada pela não-linearidade do termo de difusão na EFP), que viola as condições do TLC.