

2

Distribuições de Probabilidade

2.1

Distribuição Gaussiana

Para uma caracterização completa do processo estocástico seguido por uma variável aleatória é necessário determinar algumas de suas propriedades, como sua distribuição de frequência de ocorrência e a existência de correlações na série temporal.

É comum utilizar como primeira aproximação ou primeira tentativa de modelagem das distribuições empíricas uma distribuição Gaussiana, ou distribuição normal. Essa distribuição aparece em diversos fenômenos na natureza, e em particular em processos relacionados à difusão normal ou Browniana. A razão da presença praticamente universal da distribuição Gaussiana se deve a ela emergir naturalmente como uma distribuição limite para processos aleatórios, como consequência do Teorema do Limite Central (TLC): a soma de variáveis aleatórias independentes com segundo momento finito é descrita pela distribuição normal [14]. Esta formulação do T.L.C. pode ser estendida para variáveis fracamente dependentes e para distribuições não muito heterogêneas, isto é, onde não haja domínio da variância de uma distribuição em relação às das outras. Sendo invariante por agregação de variáveis aleatórias, a distribuição Gaussiana é estável. O TLC explica assim porque distribuições com segundo momento finito convergem gradualmente para a distribuição estável Gaussiana.

A distribuição Gaussiana é caracterizada por dois parâmetros: média μ e o desvio-padrão σ . A notação para variável x governada por uma distribuição Gaussiana é $x \sim N(\mu, \sigma)$.

A função densidade de probabilidade da variável aleatória com distribuição normal é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2.1)$$

Usualmente considera-se a distribuição Gaussiana padronizada, onde a variável aleatória X tem média zero e desvio-padrão unitário.

Teremos assim:

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} X^2\right). \quad (2.2)$$

A variável X pode representar uma variável normalizada, obtida da variável original observada x a partir de:

$$X = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad (2.3)$$

Embora os valores $|x| < \sigma$ da parte central da distribuição possuam maior probabilidade de ocorrência, são as caudas das distribuições que fornecem informações relativas aos valores extremos. Assim, em qualquer modelagem de distribuição de retorno de preços é fundamental a análise das caudas das distribuições, pois permite estimar lucros e prejuízos relevantes para o mercado financeiro.

Para verificarmos a probabilidade de ocorrência de valores extremos em um mercado regido pela distribuição Gaussiana, apresentamos a tabela a seguir que mostra a probabilidade $P(|X| \geq n)$, que equivale, de acordo com (2.3), à probabilidade de ocorrência de um valor de retorno, descontada a média, ser maior ou igual em valor absoluto a n vezes o desvio padrão histórico da série.

A partir da tabela 2.1 podemos concluir que a distribuição Gaussiana é inadequada para análise do mercado financeiro. Por exemplo, a probabilidade estimada de se observar uma flutuação de preços pelo menos 5 vezes maior do que a flutuação típica σ é de uma vez a cada 7 milênios, o que torna tal observação praticamente impossível. No entanto, valores de retornos desta ordem têm sido observados nas séries reais, conforme ilustrado pela figura 1.4.

n	$P(X \geq n)$	N	Tempo
1	0,317	3	3 dias
2	0,045	22	1 mês
3	0,0027	370	1,5 ano
4	$6,3 \times 10^{-5}$	15.787	63 anos
5	$5,7 \times 10^{-7}$	$1,7 \times 10^6$	7 milênios
6	$2,0 \times 10^{-9}$	$5,1 \times 10^8$	2 milhões de anos

Tabela 2.1 – A primeira coluna mostra valores de n de 1 a 6. A segunda coluna mostra a probabilidade do módulo do retorno em relação ao valor médio ser maior do que n vezes o desvio padrão, segundo a distribuição normal. A terceira coluna apresenta esta probabilidade em número equivalente N de eventos que se deve observar para encontrar uma vez tal retorno. Considerando a ocorrência de cada evento em escala diária, a quarta coluna traduz este resultado em tempo de negócio, onde 1 mês equivale à 22 dias de pregão e 1 ano equivale à 252 dias.

Em geral, a frequência de ocorrência de valores extremos nas séries financeiras apresenta desvio quase universal da normalidade, sendo ordens de grandeza maior do que a prevista pela distribuição Gaussiana. Diz-se que as distribuições empíricas de retornos de preços possuem “*fat tails*” ou ainda “*heavy tails*” para designar distribuições com caudas mais longas do que a distribuição normal.

Vamos a seguir analisar as propriedades de algumas distribuições que foram utilizadas na modelagem de variáveis financeiras, principalmente de retornos de preços. Elas servirão como guias comparativos para o modelo proposto na presente dissertação.

2.2

Distribuição Log-Normal

Sendo a distribuição Gaussiana invariante por adição de variável aleatória, é solução estacionária da equação diferencial do tipo (1.9) onde o ruído é aditivo. Por outro lado, a distribuição Log-normal é invariante por multiplicação de variável aleatória, sendo assim útil na análise de processos estocásticos com ruído multiplicativo.

A distribuição Log-normal surge no mercado financeiro a partir do modelo padrão para a flutuação de preços, no qual o retorno dos preços é descrito pelo

movimento Browniano Geométrico, dado por (1.11) e que pode ser reescrito da forma:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.4)$$

caracterizando um processo estocástico multiplicativo.

Utilizando-se o Lema de Itô [15] para mudança de variável estocástica $x_t = \log S_t$, obtém-se:

$$dx_t = \mu' dt + \sigma dW_t \quad (2.5)$$

com $dW_t \sim N(0, dt)$ e $\mu' = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

A equação (2.5) corresponde ao movimento Browniano Aritmético, cuja solução para a distribuição de probabilidade da variável estocástica x_t no tempo t é dada pela distribuição Gaussiana de média $\mu't$ e variância $\sigma^2 t$:

$$P(\Delta x_t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp \left[-\frac{1}{2t} \left(\frac{\Delta x_t - \mu' t}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (2.6)$$

onde $\Delta x_t = x_t - x_0$.

Da relação entre distribuições por mudança de variável,

$$\tilde{P}(S) dS = P(x) dx \quad (2.7)$$

obtém-se:

$$\tilde{P}(S_t) = \frac{1}{S_t} P \left[\log \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \right]. \quad (2.8)$$

Identificando $\Delta x_t \equiv \log S_t - \log S_0$ ou $\Delta x_t \equiv \log \left(\frac{S_t}{S_0} \right)$ em (2.6), obtém-se a

distribuição de preços na forma log-normal :

$$\tilde{P}(S_t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t} S_t} \exp \left[-\frac{1}{2t} \left(\frac{\log(S_t / S_0) - \mu't}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

Muitos estudos utilizam também a distribuição log-normal para a análise da variável financeira conhecida como volatilidade [13,16]. Para alguns mercados financeiros, a distribuição de preços de fechamento¹ de ações (de empresas ou de índices de bolsas) normalizados pelo volume negociado, é muito bem descrita pela distribuição log-normal [17], como mostrado na figura abaixo.

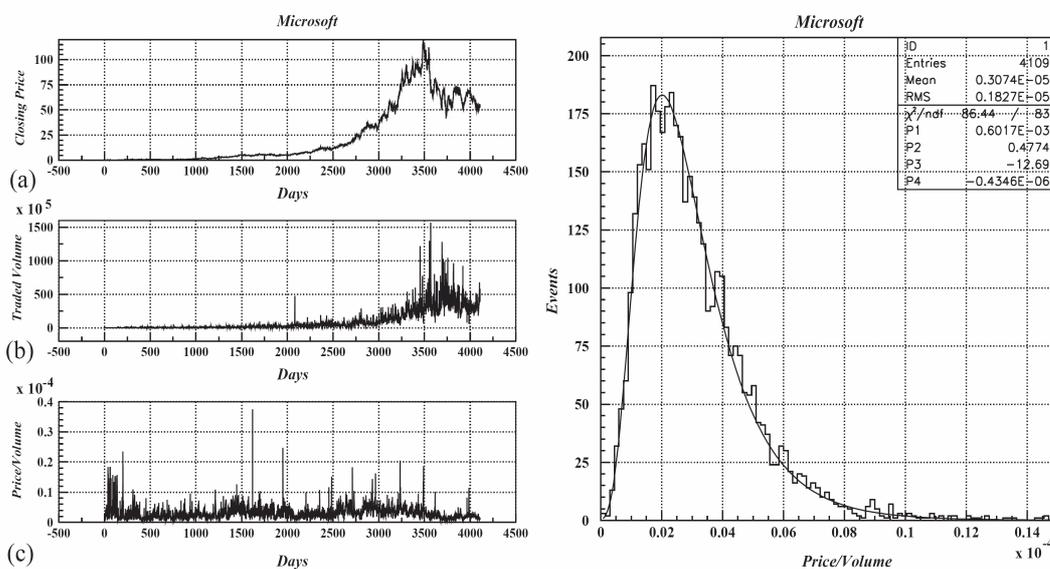


Figura 2.1– Gráficos à esquerda (de cima para baixo): (a) série de preços de fechamento das ações da Microsoft; (b) volume diário negociado; (c) série de preços de fechamento das ações normalizados pelo volume diário negociado. Gráfico à direita: distribuição de preços de fechamento diário das ações da Microsoft normalizados pelo volume negociado e a distribuição log-normal aproximada [17].

Como vimos, a equação (2.5) descreve as variações logarítmicas dos preços na escala temporal dt segundo o modelo padrão. Por outro lado, dx_t equivale ao retorno logarítmico $Z_4(t)$, dado por (1.5). Assim, de (2.6), o modelo padrão também prevê que os retornos logarítmicos de preços nas diversas escalas temporais são descritos por distribuições Gaussianas com média e dispersão proporcionais ao intervalo de tempo.

¹ Valor do índice de um ativo no final de um dia de pregão.

Dados empíricos de retornos de preços, no entanto, apresentam distribuições com caudas mais longas do que a da Gaussiana, como mostrado no capítulo 1. Conseqüentemente, a distribuição empírica de preços (sem normalização por volume de negociação) em geral não corresponde à distribuição log-normal, (2.9) previsto pelo modelo padrão. Vamos a seguir então analisar outras distribuições “fat tailed” utilizadas na modelagem de variáveis financeiras.

2.3

Distribuição de Lévy

Existem muitos processos na natureza que são regidos por distribuições de Lévy, como o ritmo cardíaco de indivíduos saudáveis ou a fotocondutividade em semicondutores amorfos. Sua expressão, na forma simétrica e com média zero, é dada a partir da função característica [5]:

$$L_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\eta q^{\alpha}) \cos(qx) dq \quad (2.10)$$

com parâmetro de Lévy α ($0 < \alpha \leq 2$) e um fator de escala positivo γ . Para $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ temos respectivamente a distribuição Gaussiana e a Lorentziana.

O comportamento assintótico da distribuição pode ser obtido a partir da expansão para $|x| \gg 1$ em (2.10). Considerando-se $\gamma = 1$ e sendo $\Gamma(x)$ a função de Euler tem-se que:

$$L_{\alpha}(|x|) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{|x|^{\alpha k + 1}} \text{sen} \left[\frac{k\pi\alpha}{2} \right] + O(|x|^{-\alpha(n+1)-1}) \quad (2.11)$$

$$L_{\alpha}(|x|) \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} \quad (0 < \alpha < 2) \quad (2.12)$$

Assim, para grandes valores de x , a distribuição de Lévy tem comportamento em lei de potência. Verificamos também que o segundo momento:

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 L_{\alpha}(x) dx \approx \int x^2 x^{-(\alpha+1)} dx \approx \int x^{1-\alpha} dx \quad (2.13)$$

é divergente para processos com $0 < \alpha < 2$.

As distribuições de Lévy são importantes porque são também distribuições limites de processos envolvendo soma de variáveis i.i.d.. Segundo o T.L.C. generalizado [18], uma distribuição com segundo momento divergente com cauda em lei de potência dada por (2.12) converge para a distribuição de Lévy de mesmo parâmetro α . Estas distribuições formam também uma classe de distribuições estáveis, sendo invariantes por agregação de variáveis aleatórias.

A importância das distribuições Gaussianas e de Lévy para o mercado financeiro deve-se à propriedade de que ambas possuem de serem invariantes pela soma de variáveis aleatórias fracamente dependentes.

Note que o retorno em escala temporal $2dt$ equivale a uma soma de retornos sucessivos na escala dt :

$$Z_{2dt}(t) = \log S(t+2dt) - \log S(t) = [\log S(t+2dt) - \log S(t+dt)] + [\log S(t+dt) - \log S(t)]$$

$$Z_{2dt}(t) = Z_{dt}(t+dt) + Z_{dt}(t) \quad (2.14)$$

Assim, cada retorno de dois minutos é a soma de dois retornos sucessivos de 1 minuto, cada retorno de cinco minutos é a soma de cinco retornos sucessivos de 1 minuto, cada retorno de dois dias é a soma de dois retornos sucessivos de 1 dia, etc. Em outras palavras, retornos em escala temporal $\tau = n \Delta t$, sendo Δt uma escala temporal de referência, equivalem a variáveis formadas pela agregação de n variáveis aleatórias da escala temporal de referência.

A análise de Mandelbrot do mercado americano de algodão [4] mostrou que a distribuição de retorno dos preços tinha mesma forma funcional para diversas escalas de tempo, ou seja, as distribuições possuíam propriedade de invariância por mudança de escala temporal. Além disso, estas distribuições possuíam caudas com comportamento em lei de potência, mais longas do que as distribuições Gaussianas. Baseado nestas duas propriedades, ele sugeriu que as distribuições empíricas fossem modeladas pelas distribuições estáveis de Lévy.

Mais recentemente, conforme podemos verificar na figura 2.2., a análise de dados do S&P 500 [6] mostrou que as distribuições de retorno de alta frequência, quando reescalados de forma conveniente, colapsam em uma mesma curva mestra podendo assim ser modeladas por uma distribuição de Lévy.

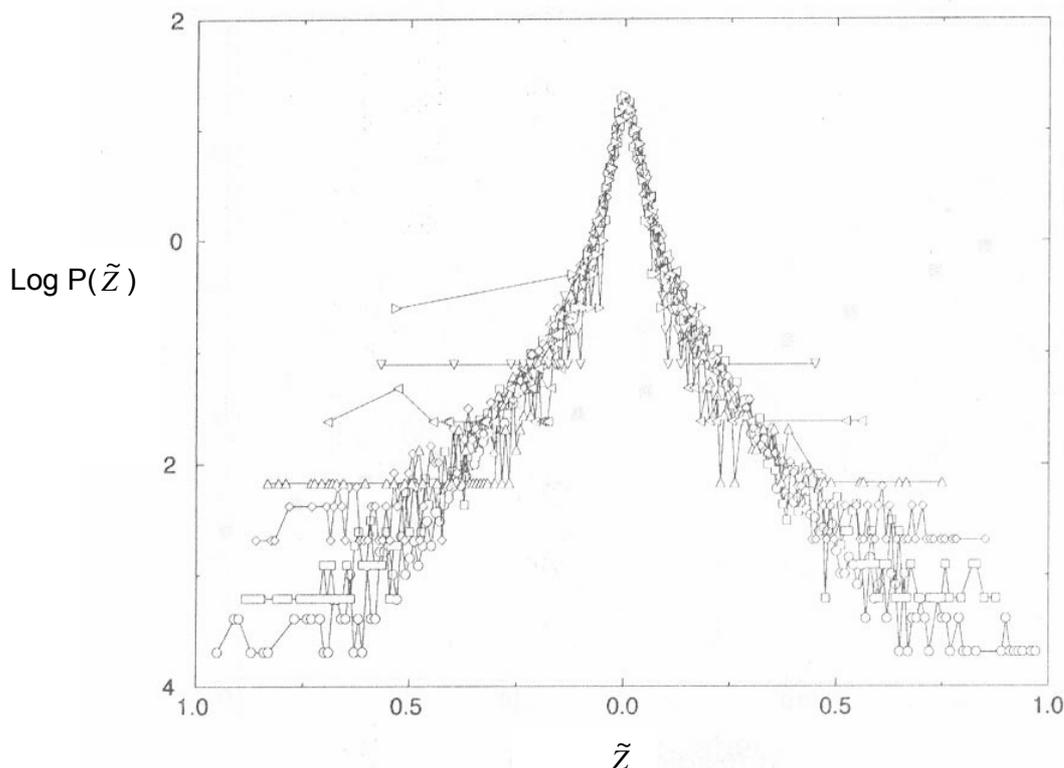


Figura 2.2 – Função densidade de probabilidade para retornos reescalados de alta frequência do S&P 500 em horizontes de tempo $\Delta t = 1,3,10,32,100,316$ e 1000 minutos [6].

A observação das distribuições de retorno em diversas escalas temporais $\tau = n.\Delta t$, sendo Δt uma escala temporal de referência, permite analisar a convergência das distribuições empíricas à luz do TLC generalizado para a soma de n variáveis aleatórias independentes. Portanto, propriedades de invariância por mudança de escala temporal que são observadas nas distribuições empíricas de retorno sugerem modelagem por distribuições estáveis. Espera-se assim que para longos horizontes temporais as distribuições converjam para distribuições estáveis Gaussianas, devido ao segundo momento finito das distribuições empíricas. Para horizontes de tempo curtos, devido às caudas longas em lei de potência, podemos observar também uma invariância de curto prazo da forma funcional dos dados empíricos devido à estabilidade das distribuições de Lévy. No entanto, esta estacionariedade de curto prazo é quebrada, havendo uma transição (“*crossover*”) do regime de Lévy para o regime Gaussiano de longo prazo, devido à finitude dos dados reais.

Por outro lado, o TLC se baseia na hipótese de dependência fraca das variáveis aleatórias, que no caso do mercado financeiro é violada em escalas de

tempo intradiária ultra-curtas, como mostrado através da figura 1.8 para a correlação linear de retornos. A existência de correlação temporal entre dados sucessivos retarda a convergência segundo o TLC, permitindo ainda a observação de novas formas de distribuições estáveis em horizonte temporal intradiário. As distribuições de Tsallis, que recentemente modelaram os dados de altíssima frequência do mercado americano, mostrado no capítulo 1, são exemplos de distribuições estáveis em uma dinâmica de preços com correlação, como será mostrado no capítulo 3. Estas distribuições terão suas propriedades básicas descritas a seguir.

2.4

Distribuição de Tsallis

Em problemas tradicionais da mecânica estatística de equilíbrio, a energia e a entropia são quantidades extensivas. Para que estes resultados sejam válidos é necessário que diferentes regiões do sistema sejam independentes. Existem sistemas com interação de longo alcance, no entanto, para os quais não é possível assumir esta independência como por exemplo, estrelas interagindo sob a influência da atração gravitacional. Da mesma forma, sistemas complexos cujo estado fundamental é altamente degenerado ou que possuem memória microscópica de longo alcance apresentam tempo de relaxação ao equilíbrio muito longo e não podem ser na prática descritos pela mecânica estatística extensiva de Boltzmann-Gibbs (BG).

Recentemente, foi proposto [19] um formalismo para a análise desses sistemas baseado em uma mecânica estatística não-extensiva. Deste formalismo, emerge a distribuição de probabilidades dada pela equação (2.15) abaixo,

$$p_q(x) = (Z_q^{-1}) [1 - \beta(1-q)x^2]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.15)$$

na qual o índice q é um parâmetro real que caracteriza a estatística não-extensiva do sistema, β é um parâmetro de escala e Z_q é a constante de normalização.

O índice $+$ em (2.5) indica que $p_q(x) = 0$ se a expressão entre colchetes é não-positiva, o que só ocorre se $q < 1$. Neste caso, tem-se uma distribuição com cauda nula a partir do valor $|x_{MAX}| = [\beta(1-q)]^{-1/2}$. Para a descrição das

distribuições de preço portanto, só consideraremos casos onde $q \geq 1$. Para $1 < q < 3$, Z_q em (2.15) é dado por:

$$Z_q^{-1} = \left[\frac{\beta(q-1)}{\pi} \right]^{1/2} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{(q-1)}\right]}{\Gamma\left[\frac{(3-q)}{2(q-1)}\right]} \quad (1 < q < 3) \quad (2.16)$$

Estas distribuições são conhecidas como distribuições de Tsallis ou ainda como q -Gaussianas. A obtenção destas distribuições a partir do formalismo não-extensivo será justificada no capítulo 3, mas aqui apresentaremos algumas de suas propriedades.

Ao modificar o parâmetro q , mantendo-se o parâmetro de escala β fixo, verificamos (ver figura 2.3) que este controla a forma da distribuição, tornando-a mais plana quanto maior seu valor. No limite superior do parâmetro, $q=3$ tem-se uma distribuição totalmente plana. Assim, para valores do parâmetro $q \geq 3$, a condição de normalização não é satisfeita.

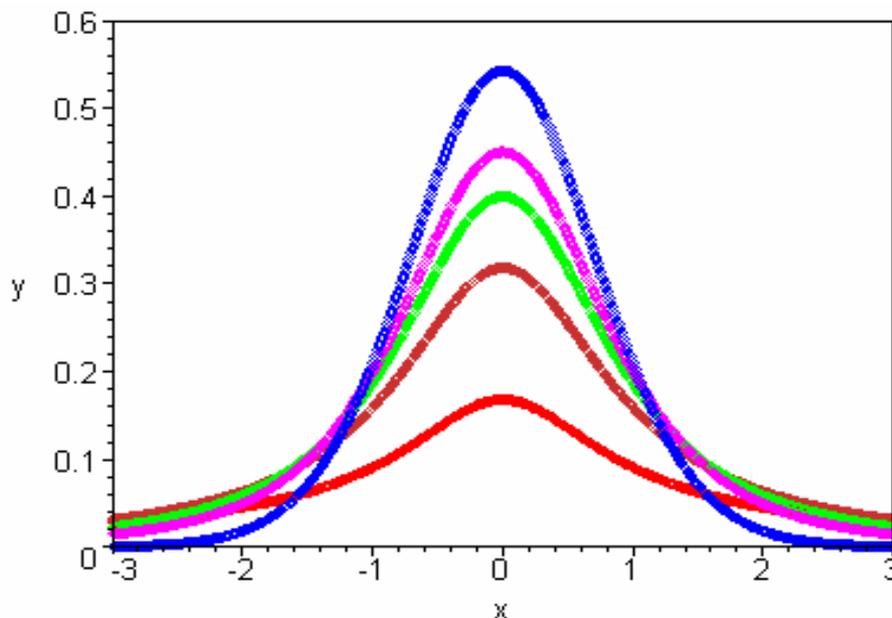


Figura 2.3 – Distribuição de probabilidade $p_q(x)$ para vários valores de $1 < q < 3$ ($\beta=1$): $q=1,1$ (azul), $q=1,5$ (rosa), $q=1,7$ (verde), $q=2,0$ (marrom) e $q=2,5$ (vermelho).

O caso particular $q=2$ representa a distribuição Lorentziana. Podemos também facilmente verificar através das etapas seguintes que a distribuição de Tsallis possui como limite do parâmetro $q \rightarrow 1$ a distribuição Gaussiana. De (2.15),

$$p_q(x)^{(1-q)} = Z^{-(1-q)} [1 - \beta(1-q)x^2] \quad (2.17a)$$

$$(1-q) \ln p_q(x) = (1-q) \ln Z_q^{-1} + \ln [1 - \beta(1-q)x^2] \quad (2.17b)$$

$$\ln p_q(x) \cong \ln Z_q^{-1} - \beta x^2 \quad (q \rightarrow 1) \quad (2.17c)$$

$$p_q(x) = Z_q^{-1} \exp(-\beta x^2) \quad (q \rightarrow 1) \quad (2.17d)$$

Analogamente, no limite de $x \ll 1$, as distribuições de Tsallis (2.15) se comportam como uma Gaussiana :

$$p_q(x) = Z_q^{-1} \exp(-\beta x^2) \quad (2.18)$$

O outro parâmetro da distribuição, β , controla a largura, e conseqüentemente, pelo vínculo de normalização, a altura da distribuição. A influência deste parâmetro é ilustrada através da figura 2.4: dado um q fixo, quanto maior o valor de β , mais alta e estreita fica a distribuição.

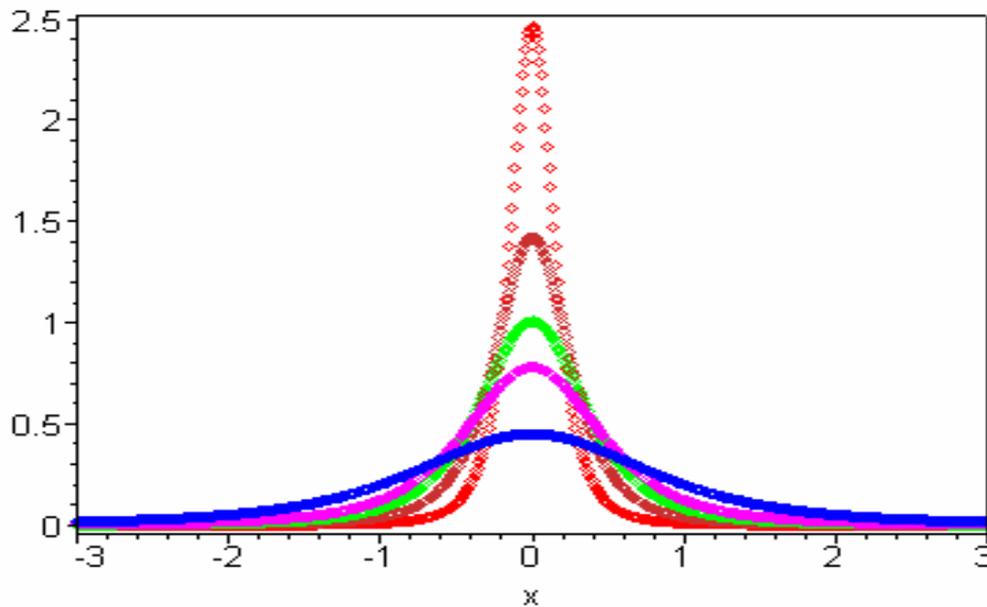


Figura 2.4 – Ilustração do comportamento da q -Gaussiana ($q = 1,5$) de acordo com o parâmetro β : $\beta=1,0$ (azul), $\beta=3,0$ (rosa), $\beta=5,0$ (verde), $\beta=10,0$ (marrom) e $\beta=30,0$ (laranja).

A relação entre o parâmetro β e largura da distribuição pode ser obtida através da variância das q-Gaussianas dadas por:

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int x^2 p_q(x) dx \equiv \sigma^2 \quad (2.19)$$

Substituindo-se a equação (2.15) em (2.19) obtêm-se que:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\beta(5-3q)} \quad (q < 5/3) \quad (2.20a)$$

$$\sigma^2 \rightarrow \infty \quad (q \geq 5/3) \quad (2.20b)$$

Logo, de (2.20), encontra-se que o parâmetro β caracteriza-se por um parâmetro de escala, sendo inversamente proporcional à variância da distribuição, no caso de ela ser finita.

Assintoticamente a distribuição de Tsallis com $q > 1$ tem comportamento em lei de potência. De (2.15), com $x \gg 1$:

$$p_q(x) \approx x^{\frac{-2}{q-1}} \approx x^{-\delta} \quad (2.21)$$

Comparando-se (2.21) com o comportamento assintótico em lei de potência da distribuição de Lévy (2.12), chegamos à relação entre os parâmetros q de Tsallis e α de Lévy para que as duas distribuições tenham decaimento com mesma lei de potência:

$$q = \frac{3+\alpha}{1+\alpha} \quad (2.22a)$$

ou

$$\alpha = \frac{3-q}{q-1} \quad (2.22b)$$

Para parâmetro α correspondente ao regime de Lévy ($0 < \alpha < 2$), obtêm-se parâmetro de Tsallis $5/3 < q < 3$, consistente com o resultado de variância divergente obtida em (2.20b).

Apesar de mesmo comportamento assintótico em lei de potência, as distribuições de Tsallis e de Lévy possuem formas diferentes. A comparação entre estas distribuições com parâmetros q e α dados por (2.22) é mostrada na figura a seguir, em gráfico linear, ilustrando a diferença significativa de comportamento das duas distribuições.

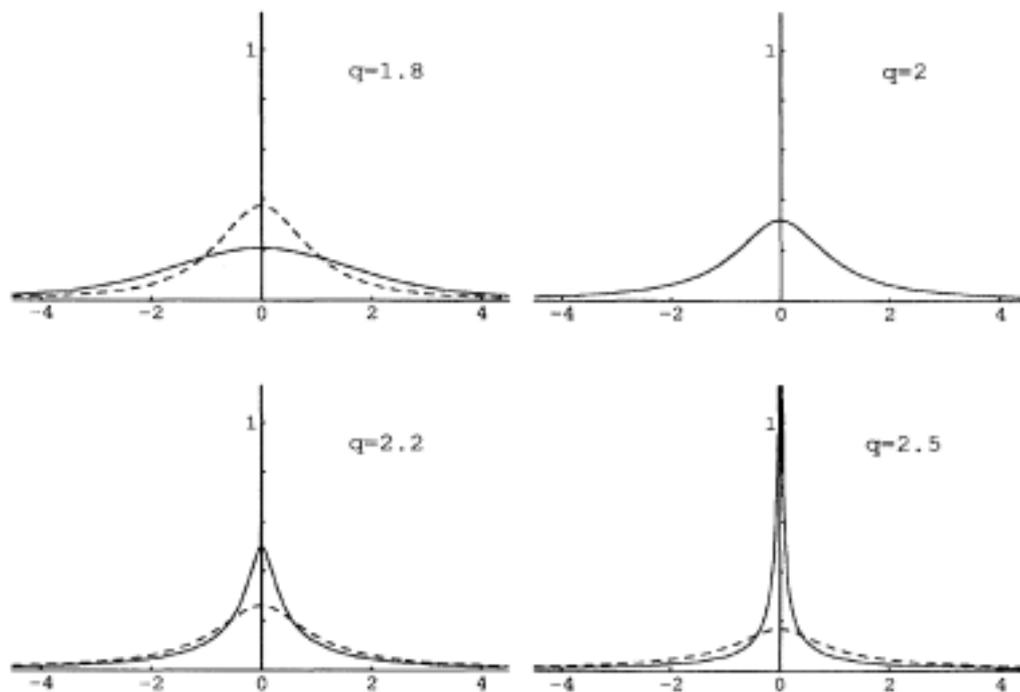


Figura 2.5 – Distribuições de Tsallis com $5/3 < q < 3$ (linha pontilhada) e de Lévy com $0 < \alpha < 2$ (linha cheia) [20]. Parâmetros (q, α) relacionados por (2.22) de forma que as duas distribuições possuam decaimento em lei de potência com mesmo expoente. As distribuições coincidem para $q=2$ (Lorentziana).

Assim, na região de parâmetros $5/3 < q < 3$, as q -Gaussianas têm segundo momento divergente e convergem por convolução, de acordo com o TLC generalizado, para a distribuição de Lévy com parâmetro α satisfazendo à (2.22b). Por outro lado, de (2.21), q -Gaussianas com parâmetro $q < 5/3$ tem decaimento em lei de potência mais forte ($\delta > 3$), possuem segundo momento finito (2.20a) e consequentemente, têm como distribuição limite, por convolução, a distribuição Gaussiana ($\alpha=2$).

Para $q < 1$, lembramos que a expressão (2.15) é nula a partir de um ponto de corte. Portanto, nesta região de parâmetro não-extensivo, as q -Gaussianas também evoluem para a distribuição Gaussiana.

Desta forma, as q -Gaussianas permitem unificar os regimes Gaussiano e de Lévy em um único formalismo, sendo $q_c = 5/3$ o limite entre os dois regimes, como representado no diagrama a seguir:

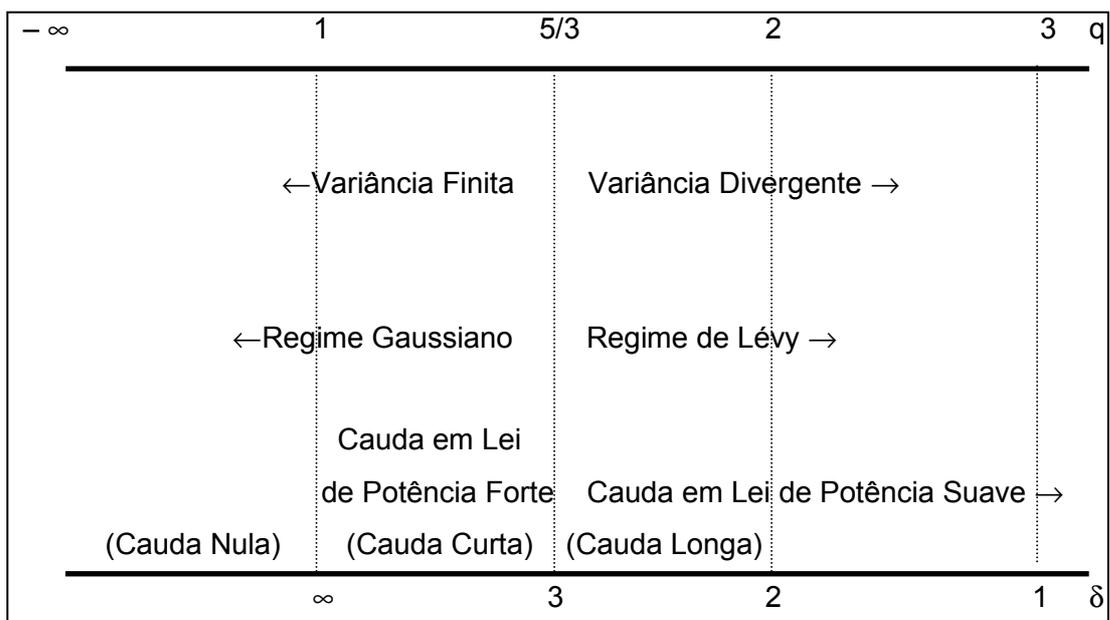


Figura 2.6 - Diagrama do comportamento das q -Gaussianas de acordo com o parâmetro q de Tsallis. O parâmetro δ descreve o decaimento assintótico em lei de potência (2.21)

2.5

Distribuições Truncadas

Algumas distribuições apresentadas possuem desvio padrão divergente, mas os sistemas físicos reais possuem desvio padrão finito. Ao modelarmos um sistema com essas distribuições, devemos realizar um truncamento após um determinado valor da variável aleatória, para tornar o desvio padrão finito. O truncamento pode ser abrupto ou gradual, e é realizado conforme (2.23), sendo C um fator de normalização, $P(x)$ a distribuição original e $f(x)$ a função de truncamento.

$$P_T(x) = CP(x)f(x) \tag{2.23}$$

O truncamento mais simples é o truncamento abrupto com função de truncamento dado por (2.24), onde x_C é o ponto limite a partir do qual efetiva-se o truncamento.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq x_C \\ 0 & |x| > x_C \end{cases} \quad (2.24)$$

As distribuições empíricas também podem ser modeladas através de um truncamento gradual, utilizando por exemplo função de truncamento exponencial da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq x_C \\ \exp\left[-\left(\frac{|x| - x_C}{\xi}\right)^B\right] & |x| > x_C \end{cases} \quad (2.25a)$$

com B , ξ e x_C parâmetros a serem determinados. Quanto menor o valor de ξ , ou maior o valor de B , mais forte o truncamento.

O truncamento gradual pode também ser feito através de uma função de truncamento em lei de potência da forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq x_C \\ (|x| - x_C)^{-\eta} & |x| > x_C \end{cases} \quad (2.25b)$$

com x_C e $\eta > 3$ parâmetros a serem determinados. Quanto maior o valor de η , mais forte o truncamento.

Ambos os tipos de truncamento (2.24) e (2.25), por gerarem distribuições com variância finita, irão convergir para uma distribuição Gaussiana em escala de tempo longa.

O retorno diário de preços do IBOVESPA entre 1986-2000 foi modelado [21] utilizando a distribuição de Lévy com truncamento exponencial nas caudas (ver figura 2.7) ou seja, truncamento dado por (2.25) com $B=1$. Obteve-se ainda convergência para o regime Gaussiano em aproximadamente 20 dias (ver figura 2.8).

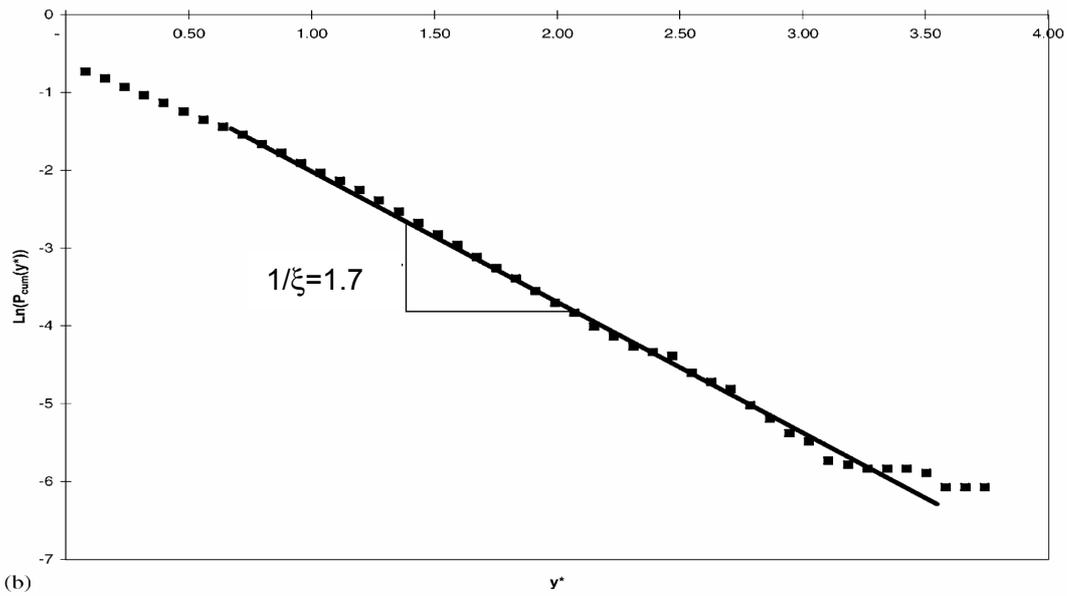


Figura 2.7 – Gráfico semi-logarítmico da distribuição acumulada de retornos diários normalizados do IBOVESPA entre 1986-2000. Obtém-se cauda exponencial com parâmetro $1/\xi=1.7$ [21]

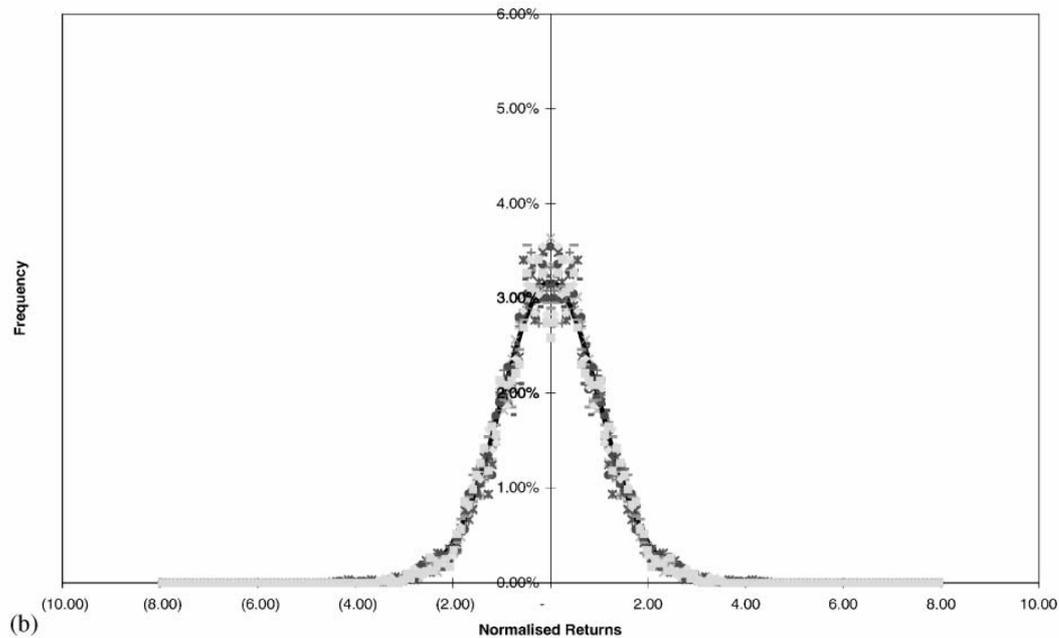


Figura 2.8 – Comparação da distribuição de freqüência de retorno normalizado diário do IBOVESPA com a distribuição Gaussiana de desvio padrão unitário para janela temporal maior do que 20 dias. [21]

Um dos objetivos desta dissertação é similar: modelar a distribuição de retorno de preços do IBOVESPA, assim como a evolução temporal das distribuições, porém, na escala intradiária.