1
Motivação e Histórico

1.1
Mercado Financeiro

No mercado financeiro, agentes interagem entre si e reagem às informações externas para determinar o melhor preço de um dado ativo financeiro. O mercado financeiro pode ser caracterizado como um sistema complexo devido ao grande número e heterogeneidade de seus agentes, assim como na forma com que interagem entre si, podendo existir cooperação e competição entre eles. Os movimentos de preços são efeitos coletivos macroscópicos observáveis gerados a partir dessas interações microscópicas entre os agentes. Por essas características, o sistema financeiro pode ser descrito com as ferramentas da Física Estatística.

Assim, modelos matemáticos e estatísticos provenientes da descrição de sistemas físicos são utilizados para realizar previsões sobre o comportamento dos sistemas financeiros, obtendo leis para descrever seu comportamento esperado (médio) assim como as flutuações em torno deste comportamento padrão.

Há um grande interesse científico e econômico, em avaliar o risco dos negócios, em tentar prever o comportamento do mercado. A nossa expectativa é que, ao analisar a série de preços, possamos obter modelos que expliquem a estrutura do mercado financeiro, a formação de preços e sua dinâmica.

Existem três tipos principais de ativos: o circulante, o fixo e o financeiro. Ativo circulante é o dinheiro que a companhia tem em caixa, ou o que possa ser transformado em dinheiro vivo imediatamente. Ativo fixo são bens duráveis, como prédios, móveis, máquinas e equipamentos. Ativo financeiro são as aplicações feitas no mercado financeiro, como títulos de renda fixa públicos ou privados, caderneta de poupança, ações, ouro, moedas estrangeiras, entre outros.

A partir de 1970 mudanças significativas ocorreram no mercado das finanças, com o começo do mundo globalizado. Desde os anos 80, com a negociação eletrônica dos ativos financeiros e a armazenagem eletrônica dos dados, pôde-se dispor de uma quantidade muito grande de informação para

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

análise, com a armazenagem de dados consecutivos em intervalos de apenas alguns segundos.

As bolsas de valores coletam, organizam e divulgam uma série de informações sobre os negócios realizados em cada pregão. Os principais indicadores referem-se a preços e volumes das ações negociadas, que traduzem a liquidez do mercado. As ações são apenas um tipo de ativo.

Na tentativa de retratar o comportamento médio dos preços das ações e servir de parâmetro para identificação das tendências gerais de um mercado, foram desenvolvidos os índices do mercado acionário, que hoje, são considerados como autênticos termômetros das expectativas pelos investidores em relação ao futuro desempenho da economia.

Esses índices de mercado são formados por uma média dos preços das ações mais negociadas, ponderadas pelo volume da transação. Podem ser caracterizados como a medida da performance do mercado.

No final de um pregão apura-se um índice que representa o volume de negócios e a tendência geral do mercado – de queda ou valorização. Esse índice é calculado com base no comportamento das principais ações negociadas na bolsa. Para cada ação é conferido um peso, determinado pelo volume de negócios daquele título. A comparação entre as transações naquele dia com o peso (revisto em períodos regulares) dá um determinado número de pontos. Comparados aos do dia anterior, resultam numa variação percentual que traduz o comportamento da bolsa.

Os índices mais importantes do mundo que já possuem estudos são:

New York Stock Exchange Composite Index NYSE (28/05/1964) – É a Bolsa de Valores de Nova York, a maior e mais importante Bolsa de Valores do mundo. Localizada na Wall Street, Nova York, e ali são negociados títulos e ações das principais empresas dos Estados Unidos e do mundo. No índice NYSE as ações são ponderadas de acordo com os respectivos valores de mercado das empresas emissoras.

Dow Jones Industrial Average (7/10/1896) – é o principal indicador de desempenho do mercado de ações dos Estados Unidos. O índice reflete a valorização média das 30 ações mais negociadas da Bolsa de Nova York (NYSE). É considerado o indicador mais tradicional utilizado nos mercados financeiros.

S&P 500 (1/7/1976) – Índice calculado pela consultoria americana Standard & Poor´s que reflete o desempenho de 500 maiores empresas industriais norte-americanas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

Nikkei (16/5/1946) – Índice da Bolsa de Valores de Tóquio, que reflete o preço das 225 ações mais negociadas no mercado japonês.

Nasdaq – Criada nos Estados Unidos, em 1971, a National Association of Security Dealers Automated Quotation System foi a primeira bolsa do mundo a negociar exclusivamente ações de empresas de Internet, informática e tecnologia. Como as operações de compra e venda são feitas por meio de computadores, a Nasdaq ficou conhecida como a "bolsa eletrônica".

Podemos ainda citar as bolsas de valores de outros mercados importantes, como por exemplo, a bolsa CAC francesa, a bolsa de Hong Kong, Hang Seng, e a bolsa alemã DAX.

A Bolsa de Valores de São Paulo [1], ou Bovespa é o local onde se negociam títulos emitidos por empresas privadas ou estatais no Brasil. O título dá ao portador o direito de propriedade sobre uma quantia em dinheiro, pela qual responde o emissor do documento.

Fundada em 23 de agosto de 1890, a Bolsa de Valores de São Paulo tem uma longa história de serviços prestados ao mercado de capitais e à economia brasileira. Até meados da década de 60, a Bovespa e todas as outras bolsas brasileiras que existiam na época eram entidades oficiais corporativas, vinculadas às secretarias de finanças dos governos estaduais e compostas por corretores nomeados pelo poder público.

Com as reformas do sistema financeiro nacional e do mercado de capitais implementadas em 1965/66, as bolsas assumiram a característica institucional que mantêm até hoje, transformando-se em associações civis sem fins lucrativos, com autonomia administrativa, financeira e patrimonial. A antiga figura individual do corretor de fundos públicos foi substituída pela da sociedade corretora, empresa constituída sob a forma de sociedade por ações nominativas ou por cotas de responsabilidade limitada. A Bolsa de Valores de São Paulo é uma entidade auto-reguladora, que opera sob a supervisão da Comissão de Valores Mobiliários.

Em 1972, a Bovespa foi a primeira bolsa brasileira a implantar o pregão automatizado com a disseminação de informações on-line e em tempo real, através de uma ampla rede de terminais de computador. No final da década de 70, a BOVESPA foi também pioneira na introdução de operações com opções no Brasil; nos anos 80 implantou o Sistema Privado de Operações por Telefone (SPOT). Em 1990, foram iniciadas as negociações através do Sistema de Negociação Eletrônica - CATS (Computer Assisted Trading System) que operava simultaneamente com o sistema tradicional de Pregão Viva Voz. Em 1997, foi

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

implantado com sucesso o novo sistema de negociação eletrônica da BOVESPA, o Mega Bolsa. Além de utilizar um sistema tecnológico altamente avançado, o Mega Bolsa amplia o volume potencial de processamento de informações e permite que a BOVESPA consolide sua posição como o mais importante centro de negócios do mercado latino-americano.

A ampliação do uso da informática foi a marca das atividades da BOVESPA em 1999, com o lançamento do After-Market, sistema de negociação que ocorre após o horário normal do pregão, oferecendo a sessão noturna de negociação eletrônica. Além de atender aos profissionais do mercado, este mecanismo também é interessante para os pequenos e médios investidores, pois permite que enviem ordens por meio da Internet até as 22 horas. Atualmente, a BOVESPA é o maior centro de negociação com ações da América Latina, destaque que culminou com um acordo histórico para a integração de todas as bolsas brasileiras em torno de um único mercado de valores - o da BOVESPA.

A Bovespa funciona com o sistema de Pregão Eletrônico em sessão contínua das 10h às 17h, para todas as empresas listadas no mercado, sendo:

- 9h45 às 10h - leilão de pré-abertura - entrada de ofertas para a formação do preço teórico de abertura;
- 16h55 às 17h - Chamada de fechamento - no Sistema Eletrônico, para todas as empresas negociadas no mercado à vista do Pregão Viva Voz e para os demais papéis que fazem parte da carteira teórica do Índice Bovespa.

O sistema Pregão Viva Voz funciona das 10h às 16h45, com interrupção entre as 13h e 14h.

O sistema After-Market é negociado exclusivamente no Sistema Eletrônico, com o seguinte horário de funcionamento:

- 17h30 às 18h - fase de pré-abertura, na qual será permitido o cancelamento das ofertas registradas no período normal;
- 18h às 22h - fase de negociação, dentro dos parâmetros estabelecidos para este segmento do mercado.

O Índice BOVESPA, ou IBOVESPA, é o indicador da evolução média das cotações das ações brasileiras. Ele equivale ao valor em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações. Esta carteira teórica é integrada pelas ações que, em conjunto, representaram 80% do volume transacionado à vista nos doze meses anteriores à formação da carteira. Para que sua representatividade se mantenha ao longo do tempo, é feita uma reavaliação quadrimestral, alterando-se a composição e peso da carteira. Considerando-se seu rigor metodológico e o fato

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

de que a Bovespa é responsável por 100% das ações transacionadas no mercado brasileiro, trata-se do mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro, permitindo tanto avaliações de curtíssimo prazo, como observações de expressivas séries de tempo. O IBOVESPA é uma ferramenta indispensável para quem investe em ações, quer para acompanhar o mercado, quer para avaliar comparativamente o desempenho de sua própria carteira. Também possui uma forte tradição – não sofreu modificações metodológicas desde sua implementação em 1968. A Bovespa divulga também o IBX - Índice Brasil, que mede o retorno de uma carteira de ações integrada pelas 100 ações mais negociadas.

O IBOVESPA é calculado em tempo real, considerando instantaneamente os preços de todos os negócios efetuados no mercado à vista com as ações componentes da carteira.

Matematicamente, o IBOVESPA é o somatório dos valores das ações integrantes de sua carteira teórica (quantidade teórica da ação multiplicada pelo último preço da mesma). Assim sendo, pode ser apurado, a qualquer momento, através da seguinte fórmula:

$$\text{IBOVESPA}_t = \sum_{i=1}^{n} P_{i,t} Q_{i,t} \qquad (1.1)$$

onde:

IBOVESPA_t = Índice Bovespa no instante t

n = número total de ações componentes da carteira teórica

$P_{i,t}$ = último preço da ação i no instante t

$Q_{i,t}$ = quantidade teórica da ação i na carteira no instante t

A seguir apresentamos a série temporal histórica do Índice Bovespa para o período analisado, de novembro de 2002 a junho de 2004, totalizando 20 meses seguidos e ininterruptos de pregão. A freqüência de gravação dos índices para a construção da série temporal utilizou tomadas de dados a cada 30 segundos.

No período analisado, não foram observados valores de retorno relativos extremamente grandes, como os que ocorrem em *"crashes"* ou em fase de grande *"boom"* econômico. Desta forma, a análise apresentada neste estudo não é designada para capturar tais valores extremos e seus efeitos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

Uma série temporal é uma série de medidas tomadas a intervalos regulares em sua sucessão natural no tempo. Ela reflete em suas propriedades globais as características intrínsecas do mercado que a gerou, além de fatores externos.

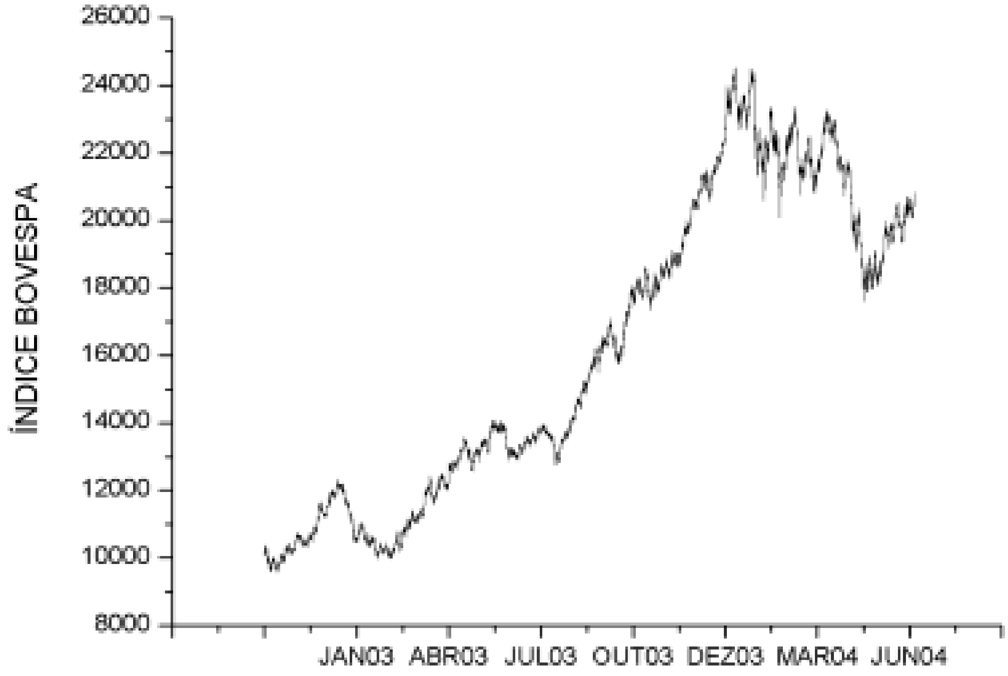

Figura 1.1 – Série dos valores do IBOVESPA intradiário

A série do IBOVESPA mostrada na figura 1.1 ilustra este fato. Verificamos que o índice reflete a situação econômica, e os fatores políticos relevantes ocorridos neste período específico. Observa-se, por exemplo, uma tendência de crescimento positivo até dezembro de 2003, após uma mudança de governo federal, cuja política econômica agradou ao mercado internacional e gerou uma procura maior por papéis da IBOVESPA. O impacto e a euforia do mercado cessou no entanto a partir dos primeiros meses do ano de 2004, devido ainda à instabilidade internacional gerada com o desenrolar de nova guerra no Iraque.

O IBOVESPA sofreu, sem prejuízo de sua metodologia de cálculo, onze correções devido à inflação, mas nenhuma delas se encontra no nosso período de estudo.

Este trabalho consiste da análise de propriedades estatísticas do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo, em especial, da função distribuição do retorno

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

dos preços para dados em alta freqüência[1] e na análise de sua evolução temporal. São recentes os trabalhos científicos em Econofísica sobre a dinâmica de alta freqüência de retornos de preços, e em particular, para o mercado brasileiro, as análises são ainda incipientes.

1.2
Definições de Retorno de Preços

Um dos principais problemas para a realização de análises empíricas e teóricas dos dados financeiros é o da escala de preço a ser utilizada. Como tratamos de preços e índices relacionados à moeda, verificamos que estes possuem flutuações no tempo que são inerentes ao processo econômico. A unidade monetária analisada pode sofrer alterações devido a diversos fatores, como crescimento ou recesso da economia, influência de outros mercados devido à globalização e inflação, por exemplo.

É possível escolher entre muitas definições de variáveis estocásticas para analisar o mercado. Considerando S(t) o preço de um ativo ou o valor de um índice e Z(t) a variável que descreve a mudança de preços, flutuação de preços ou retorno, as escolhas mais utilizadas são:

- A variação direta dos preços dos índices ou dos ativos, $Z_1(t)$. Porém, mudanças que normalmente acontecem no longo prazo, como inflação e ajustes de mercado, afetam o retorno consideravelmente:

$$Z_1(t) = S(t+\Delta t) - S(t) \qquad (1.2)$$

- A variação deflacionada dos preços dos índices, $Z_2(t)$, ou seja, descontando a inflação do período com um fator D(t). Com essa aproximação, os preços passam a refletir apenas a variação de seu valor intrínseco. Mas como existem muitos órgãos que utilizam diferentes metodologias para o cálculo da inflação, fornecendo valores diferentes para D(t), esta definição também possui desvantagens:

$$Z_2(t) = [S(t+\Delta t) - S(t)]D(t) \qquad (1.3)$$

[1] Assim chamado os dados observados em escala de tempo intradiária.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

- O chamado retorno clássico $Z_3(t)$. Essa definição tem a vantagem de fornecer o lucro ou prejuízo percentual, informação mais adequada para os investidores, pois fornece o retorno do investimento relativo ao capital empregado:

$$Z_3(t) = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)} = \frac{Z_1(t)}{S(t)} \tag{1.4}$$

- O retorno logarítmico dos preços $Z_4(t)$. Esta definição fornece medida em escala logarítmica da variação percentual dos preços:

$$Z_4(t) = \ln S(t+\Delta t) - \ln S(t) = \ln \frac{S(t+\Delta t)}{S(t)} \tag{1.5}$$

$Z_4(t)$ mede também a variação relativa dos preços. De (1.2), (1.4) e (1.5):

$$Z_4(t) = \ln \frac{S(t+\Delta t)}{S(t)} = \ln \frac{S(t) + Z_1(t)}{S(t)} = \ln\left[1 + \frac{Z_1(t)}{S(t)}\right] = \ln[1 + Z_3(t)] \tag{1.6}$$

Em dados de alta-freqüência (Δt pequeno), tem-se pequenos valores de retorno ($Z_1(t) << S(t)$). A partir de (1.6), pode-se então fazer a aproximação:

$$Z_4(t) = \ln\left[1 + \frac{Z_1(t)}{S(t)}\right] \approx \frac{Z_1(t)}{S(t)} = Z_3(t) \tag{1.7}$$

Portanto, de (1.7), para dados de alta freqüência, as definições $Z_3(t)$ e $Z_4(t)$ fornecem resultados equivalentes. De (1.2) e (1.3), as definições $Z_1(t)$ e $Z_2(t)$ também oferecem resultados muito próximos para curtos períodos de tempo ou em períodos longos, se a inflação não for muito grande, pois temos $D(t) \cong 1$.

Neste trabalho, consideraremos o retorno logarítmico $Z_4(t)$, que será chamado simplesmente de Z(t). Esta é a abordagem mais utilizada em artigos e trabalhos científicos.

Será utilizado ainda o retorno normalizado, definido como o valor de retorno observado subtraído da média empírica μ e dividido pelo desvio padrão σ da série da série temporal histórica:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

$$Z_{NORM}(t) = \frac{Z(t) - \mu}{\sigma} \qquad (1.8)$$

Os parâmetros μ e σ são obtidos a partir da série temporal histórica, cujo período total de observação T é longo, por:

$$\mu = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z(t) \qquad (1.8a)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(Z(t) - \mu\right)^2} \qquad (1.8b)$$

A nova série temporal de retornos normalizados tem média nula e desvio padrão unitário sendo assim adequada para análise comparativa de retornos em escalas temporais Δt diferentes.

1.3
Histórico da Modelagem de Preços

Os processos estocásticos seguidos pelas variáveis financeiras em diversas escalas de tempo têm sido objeto de diversas modelagens. O primeiro modelo para o processo estocástico dos preços foi proposto por Louis Bachelier em sua tese de doutorado sobre a Teoria da Especulação na Bolsa de Paris em 1900 [2], na qual os preços são descritos por uma marcha aleatória, ou “random walk” sem correlação, com flutuações regidas por uma distribuição Gaussiana.

Formalmente, a variação de preço dS_t no intervalo de tempo pequeno entre *t* e *t*+*dt* é dada por:

$$dS_t = \mu dt + \sigma\, dW_t \qquad (1.9)$$

O termo μdt caracteriza uma variação temporal de preços determinística ou típica, com taxa média no tempo μ. O termo σ dW_t caracteriza a variação estocástica dos preços, cuja amplitude σ é dada pelo desvio padrão das

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

variações históricas de preço. dW_t é o ruído estocástico gaussiano caracterizado por um processo de Wiener com propriedades $\langle dW_t \rangle = 0$ e $\langle dW_t^{\,2} \rangle = dt$. (A notação utilizada é $dW_t \sim N(0, dt)$). A equação (1.9) caracteriza o processo Browniano Aritmético, que fornece como solução para a distribuição de variações de preços a distribuição Gaussiana, com dispersão proporcional à raiz quadrada do tempo.

Mais recentemente, uma explicação importante da hipótese de *random walk* foi apresentada por Fama e Samuelson [3] na década de 70, que consiste na formulação da "Hipótese do Mercado Eficiente", e que se tornou um paradigma utilizado até hoje.

A *Hipótese do Mercado Eficiente* estabelece que o preço atual da ação reflete todas as informações e expectativas dos participantes do mercado. Conseqüentemente, nenhum lucro pode ser obtido a partir de negociações baseadas em informações do mercado, pois estas já foram absorvidas no preço. Assim, o retorno esperado de investimento futuro é nulo. Formalmente,

$$E(S_{t+1} \mid I_t) = S_t \qquad (1.10)$$

ou seja, o valor esperado da ação no tempo *t+1*, condicionado às informações *I* conhecidas no tempo *t* corresponde ao valor atual da ação. Baseado nesta hipótese, o movimento da cotação de uma ação seria completamente imprevisível a partir de informações tais como preço e volume de transação passados.

Assim, segundo essa teoria, a propriedade de ajustamento instantâneo dos preços das ações devido às informações públicas implica na independência entre variações sucessivas de preços na seqüência das negociações. Um mercado que apresenta tal comportamento é, por definição, um mercado *random walk*, onde a série de mudanças de preços não tem memória, isto é, a história passada da série não pode ser usada para prever o futuro.

Neste mercado informacionalmente eficiente, onde todos os participantes detêm o mesmo nível de informação e agem racionalmente, ajustando os preços imediatamente, não haveria espaço para que os fundamentalistas obtivessem lucros acima da média do mercado. Da mesma forma, os grafistas também não poderiam antecipar nenhuma nova tendência ou movimento de preços em formação. Neste caso, somente restariam os fatos imprevisíveis a comandar as quebras de expectativas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

No entanto, no mercado real, a atualização dos preços não é instantânea e as negociações têm custo. O grau de ineficiência do mercado é o que permite oportunidades de lucro que compensam os investidores dos custos das transações e da obtenção de informação. O mercado real segue portanto apenas aproximadamente o mercado eficiente, pois caso contrário, qualquer esforço de previsão baseada em análise da série histórica seria inútil.

Apesar da *Hipótese do Mercado Eficiente* ser uma idealização economicamente irrealizável, ele serve como referência para outras modelagens do processo estocástico dos preços.

A distribuição Gaussiana do modelo de Bachelier permite preços negativos, o que viola as leis do mercado. Mais tarde esta modelagem foi generalizada para a descrição dos lucros relativos dS_t / S_t , uma grandeza de especial interesse para os investidores, pois permite uma estimativa do lucro ou prejuízo em relação ao capital empregado. Este modelo, conhecido como “modelo padrão” é até hoje utilizado como modelo de referência para o processo estocástico das flutuações de preço. As variações relativas de preços são regidas pela equação diferencial estocástica abaixo, que caracteriza o movimento Browniano Geométrico:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma . dW_t \qquad (1.11)$$

onde $dW_t \sim N(0, dt)$. Logo, para um pequeno intervalo de tempo *dt* podemos interpretar as variações relativas de preços (retornos ou lucros relativos) como sendo geradas por uma variação média μdt acrescida de uma variação estocástica σdW_t , dada pela volatilidade[2] do mercado σ multiplicada pelo ruído gaussiano aleatório. A solução para a distribuição de preços cujas variações são caracterizadas pela equação (1.11) é dada pela distribuição log-normal, que será descrita no capítulo 2. Também será mostrado que, ainda de acordo com este modelo, os retornos logarítmicos de preço (Z_4(t)) teriam distribuição Gaussiana.

No entanto, ainda na década de 60, Mandelbrot [4], ao analisar o mercado americano de algodão, verificou que as distribuições de retornos dos preços se

[2] A volatilidade está associada ao desvio padrão dos retornos de preço ao longo de um período de tempo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

comportavam segundo as distribuições de Lévy[5], também descritas no capítulo 2, que possuem caudas mais pronunciadas que as distribuições Gaussianas.

Numerosas observações a partir de então nos mercados por todo o mundo mostraram que as caudas das distribuições de diversos ativos, tais como *"commodities"*[3], taxas de câmbio e retorno de preços de ações, são mais longas do que a da distribuição Gaussiana prevista pelo modelo padrão. Muitos modelos têm sido propostos até hoje para caracterizar a distribuição de retornos nestes mercados, em várias escalas de tempo, utilizando distribuições leptocúrticas[4]. Faremos referência a alguns destes modelos ao longo deste trabalho.

A figura 1.2 apresenta a distribuição empírica para os retornos normalizados do índice S&P 500 na escala de tempo de Δt=1 minuto e compara-a com as distribuições Gaussiana e de Lévy [6]. O período de observação considerado foi de seis anos, de Janeiro de 1984 a Dezembro de 1989. Verifica-se que a distribuição Gaussiana é inadequada para descrever a distribuição empírica. Além disso, os dados reais são bem fitados em sua parte central pela distribuição de Lévy, porém a distribuição empírica possui cauda com comportamento intermediário entre a distribuição Gaussiana e a distribuição de Lévy.

Para uma correta descrição do comportamento do mercado é necessário encontrar modelos que forneçam distribuições que descrevam adequadamente as distribuições empíricas desde pequenos até valores extremos da variável aleatória. Uma alternativa é modelar o centro da distribuição de retornos pela

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

---

[3] "Commodities" são mercadorias, bens de valor econômico tais como (i) produtos agrícolas ou minerais, (ii) artigos comerciais, especialmente quando entregues para embarque, ou ainda (iii) produtos não especializados produzidos em massa. O significado mais prático ou mais usual para esse termo é para referir-se genericamente aos bens negociados nas bolsas de mercadorias.

[4] Leptocúrtica é um adjetivo que descreve uma distribuição com curtose alta, isto é, curtose maior do que a da distribuição normal. A curtose de uma distribuição da variável aleatória x é definida como $Kurt(x) = \frac{\langle (x-\mu)^4 \rangle}{\sigma^4}$, onde μ e σ são a média e o desvio padrão de x. A distribuição normal tem curtose igual a 3. Comparando-se duas distribuições com mesmo desvio padrão, a distribuição com maior curtose possui caudas mais longas e simultaneamente parte central mais pronunciada. *Lepto* significa *fino* em grego e se refere à parte central da distribuição,

distribuição de Lévy, e realizar um truncamento em sua cauda, com o objetivo de reduzi-la, adequando-a mais às distribuições empíricas.

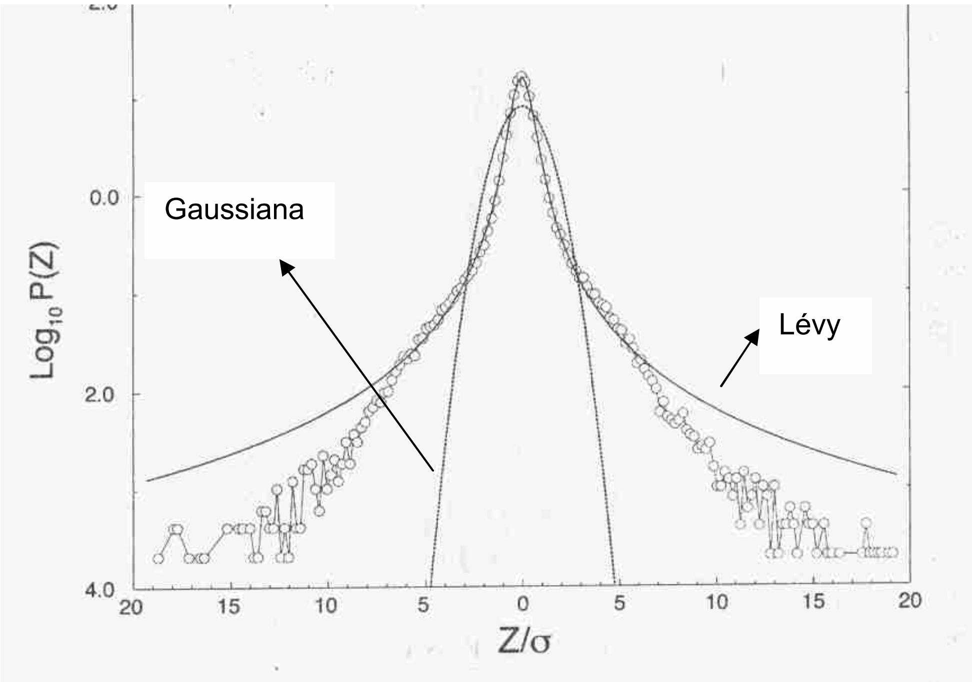

Figura 1.2 – Comparação do histograma de retornos normalizados para Δt=1minuto do S&P 500 (período 84-89) com as distribuições Gaussiana e de Lévy em gráfico semi-logarítmico [6]

Nas distribuições de retorno, têm sido observadas caudas em lei de potência e em forma exponencial. Para a análise das caudas utiliza-se a distribuição acumulada definida por:

$$P_{ACUM}(x) = \int_{x}^{\infty} P(x)dx \qquad (1.12)$$

Com a análise desta grandeza, procura-se diminuir os erros estatísticos devido à baixa freqüência dos dados experimentais nas caudas. Além disso, a probabilidade acumulada preserva a forma funcional da cauda, seja ela exponencial ou em lei de potência.

Na figura 1.3 apresentamos a distribuição acumulada de retornos normalizados de 10 minutos do índice S&P 500 no período 1986-1987 [7]. Observa-se um comportamento central consistente com distribuição de Lévy com parâmetro α = 1.7 e comportamento da cauda da distribuição com um decaimento

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

em lei de potência $P_{ACUM}(x) \sim x^{-\alpha}$. As estimativas do expoente α comprovam caudas mais leves do que as previstas pelas distribuições de Lévy, que requerem $0<\alpha<2$, conforme será mostrado no capítulo 2.

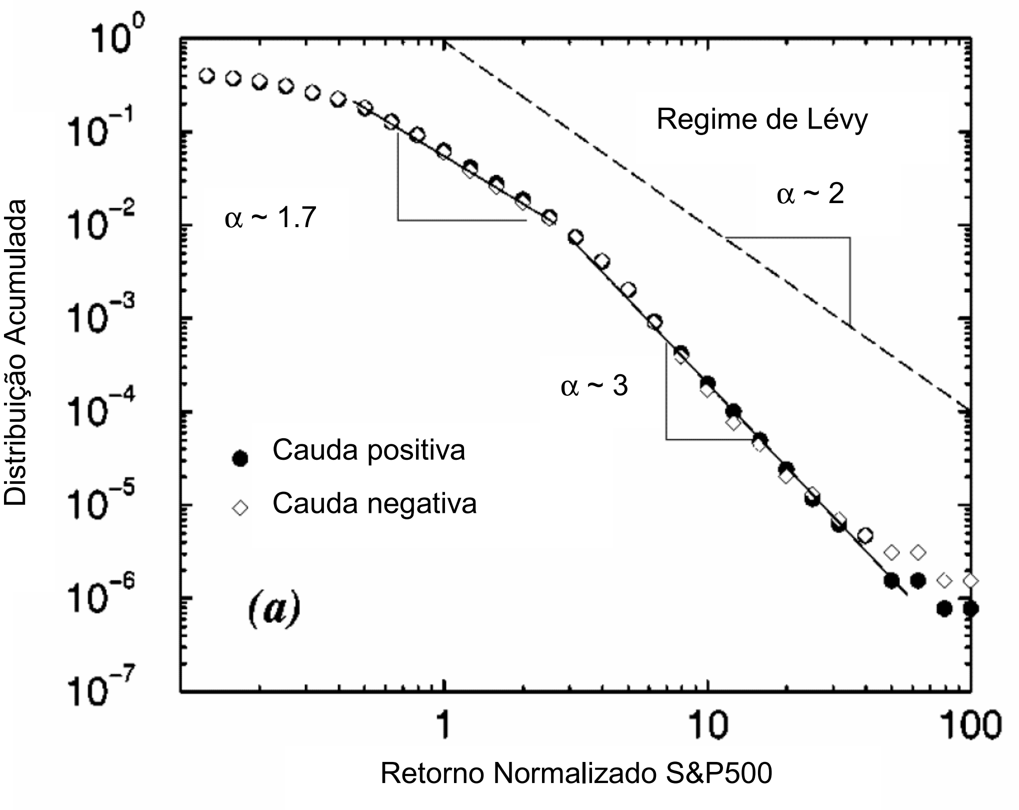

Figura 1.3 – Distribuição acumulada de retornos normalizados do índice S&P 500 no período 1986-1987 [7] em gráfico log-log, mostrando um decaimento em lei de potência $P_{ACUM}(x) \sim x^{-\alpha}$. A linha pontilhada demarca o limite de comportamento de cauda compatível com as distribuições de Lévy (ver capítulo 2).

As distribuições com caudas em lei de potência atingiram o *status* de “fato estilizado”[5], pois esta lei tem sido obtida da análise de vários tipos de títulos financeiros e em diferentes mercados, com expoente tipicamente na faixa $2<\alpha<5$. Contudo, distribuições com caudas exponenciais também têm sido reportadas para alguns mercados mundiais Na figura 1.4 mostramos o gráfico semi-logarítmico da distribuição acumulada de retornos normalizados, na escala $\Delta t=1$ dia, para três tipos de títulos financeiros no período 1991-1995 [8]. Observa-se claramente a natureza exponencial das caudas das distribuições.

[5] Costuma-se chamar de fato estilizado, a característica da distribuição que pode ser encontrada em uma grande gama de análises de mercados.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

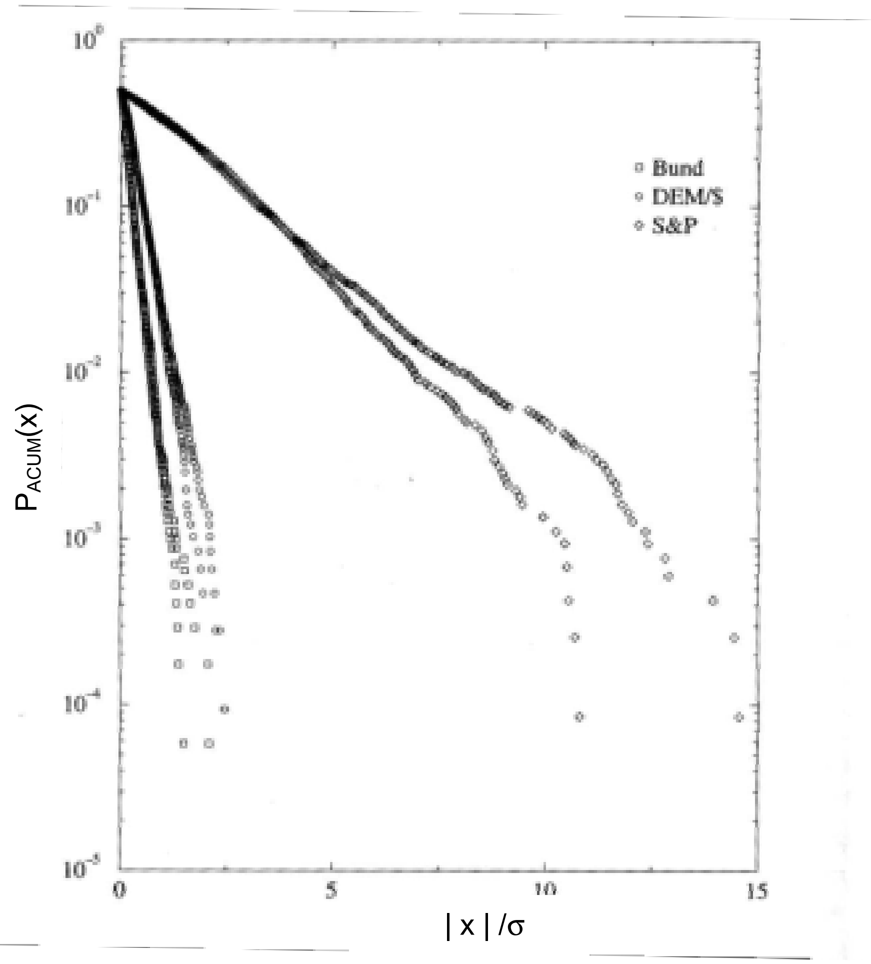

Figura 1.4 – Gráfico semi-logarítmico da distribuição acumulada de retornos normalizados, em escala Δt=1 dia, para três tipos de títulos financeiros, no período 1991-1995: S&P 500, câmbio marco-dólar (DEM/$), e letras e taxa de juros do mercado alemão (Bund) [8].

Recentemente, foi proposto um modelo [9] para a dinâmica de preços governada pelo movimento Browniano Geométrico com volatilidade estocástica, regida pela equação diferencial:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t . dW_t \qquad (1.13)$$

com σ_t representando a volatilidade aleatória.

A solução para a distribuição assintótica do modelo prevê comportamento Gaussiano para pequenos valores de retorno e comportamento exponencial para grandes valores de retorno. Na figura 1.5 apresentamos em gráfico semilogarítmico a distribuição acumulada dos dados intradiários de quatro

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

grandes empresas americanas no período 1993-2000 [10]. Vê-se que as curvas experimentais são bem descritas pela previsão deste modelo.

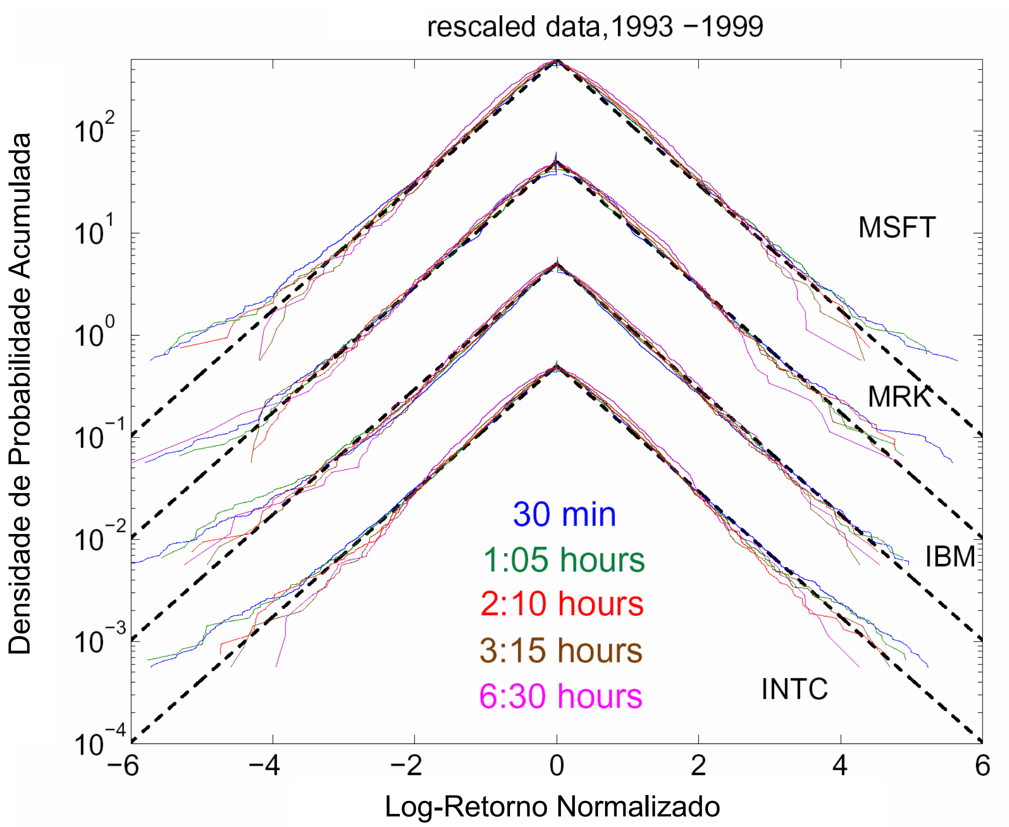

Figura 1.5 – Gráfico semilogarítmico da distribuição acumulada dos retornos intradiários normalizados de quatro grandes empresas americanas: Intel (INTC), Microsoft (MSFT), IBM, Merck (MRK), no período 1993-2000. Os gráficos estão deslocados para melhor visualização. Para x > 0, é mostrado $P_{ACUM}(x)$ e para x < 0, 1- $P_{ACUM}(x)$ [10].

Recentemente foi apresentada uma modelagem [11,12] para os dados de alta freqüência do mercado americano utilizando distribuições de Tsallis com parâmetro *q* (ou *q-Gaussianas*), que serão descritas no capítulo 2. As figuras 1.6 e 1.7 mostram respectivamente as distribuições empíricas para o NYSE e para da bolsa eletrônica NASDAQ em 2001. As distribuições são bem descritas por *q-Gaussianas* com parâmetro ótimo $q \cong 1,4$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

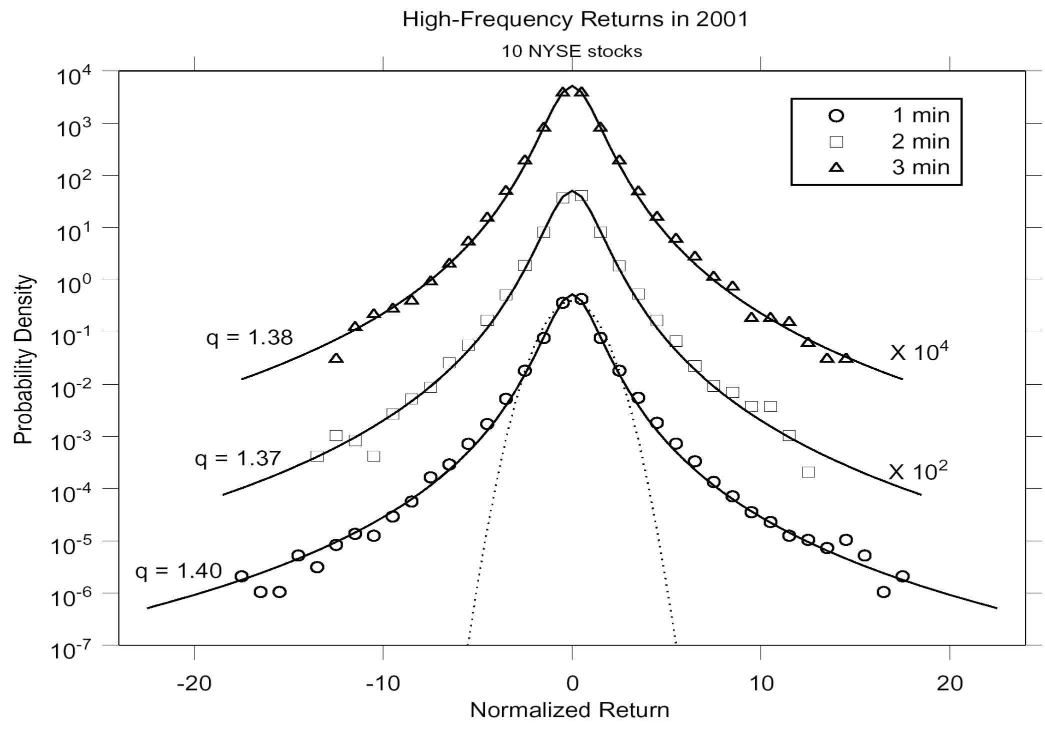

Figura 1.6 – Distribuições empíricas e *q-Gaussianas* (linhas cheias) para retornos normalizados das dez empresas com maior volume de negociação na NYSE em 2001 [11]. A linha pontilhada representa a distribuição Gaussiana.

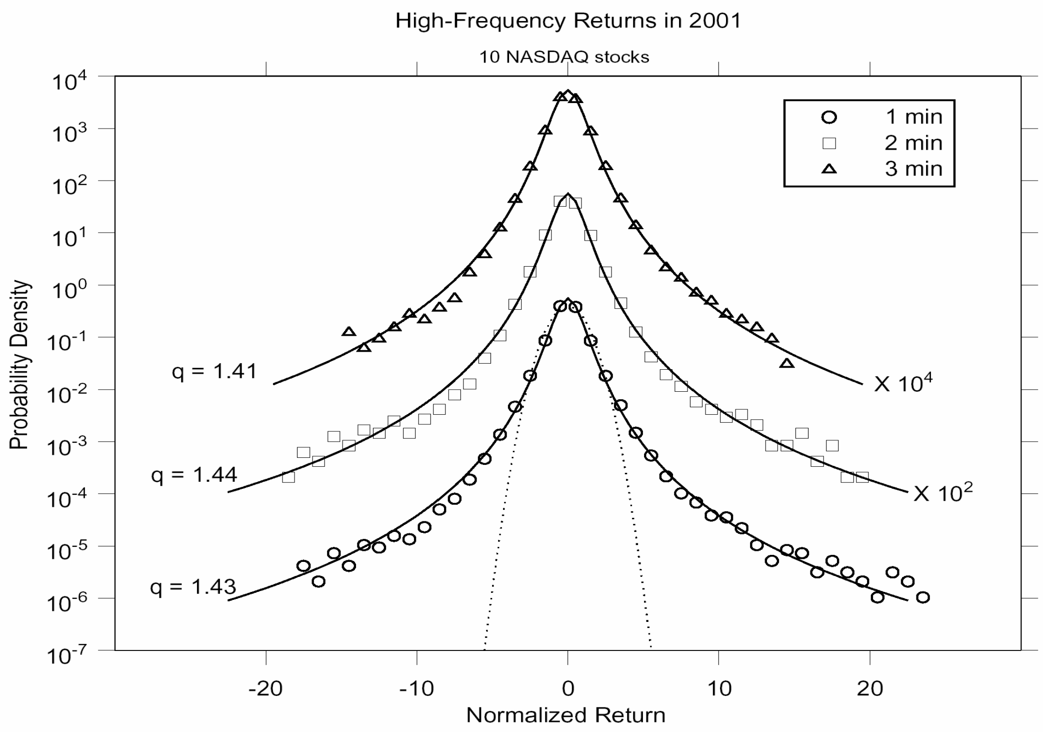

Figura 1.7 – Distribuições empíricas e *q-Gaussianas* (linhas cheias) para retornos normalizados das 10 empresas com maior volume de negociação na NASDAQ em 2001 [11]. A linha pontilhada representa a distribuição Gaussiana.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

Atualmente vários estudos buscam uma descrição estatística completa das variações dos preços dos diversos ativos financeiros. Para isso, são analisadas séries temporais cada vez maiores e em diversas escalas de tempo. Como mostrado até aqui, diferentes comportamentos têm sido obtidos, o que torna esta área bastante fértil para análise.

Nos últimos anos houve um crescente interesse na análise de distribuições de variáveis financeiras de alta freqüência, como volume de transação, retornos e volatilidade, facilitado pela disponibilidade de dados. Esta dissertação tem como um dos objetivos a descrição da distribuição de retornos de alta-freqüência para o mercado acionário brasileiro.

1.4
Correlação Temporal

Para uma caracterização precisa do comportamento do mercado e uma análise consistente, é necessário, além de verificarmos o aspecto da distribuição que descreve o processo estocástico, descobrir o grau de correlação existente entre os dados da série geratriz.

Para análise de um processo estocástico que gera a série *x(t)*, utilizamos algumas definições que envolvem o cálculo do valor esperado, entre elas:

$$E\{x(t)\} \equiv \mu(t) \qquad (1.14a)$$

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} \equiv R(t_1, t_2) \qquad (1.14b)$$

A função de autocorrelação ou simplesmente correlação é dada por $R(t_1,t_2)$. Para um processo estacionário, temos:

$$\mu(t) = \mu \qquad (1.15a)$$

$$R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) \qquad (1.15b)$$

Definimos também a função de autocovariância $C(t_1 - t_2)$, útil para processos com média não nula:

$$C(t_1 - t_2) \equiv R(t_1 - t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2) \qquad (1.16)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

De (1.15) e (1.16), para processos estacionários tem-se $C(0) \equiv R(0) - \mu^2$. De (1.14) tem-se $E\{x^2(t)\} \equiv R(0)$. Logo,

$$C(0) = \left\langle \left(x(t)\right)^2 \right\rangle - \mu^2 \equiv \sigma^2 \qquad (1.17)$$

Para processos correlacionados, $C(\tau)$ é uma função decrescente do intervalo temporal entre medidas τ, indo de $C(0) = \sigma^2$ até $C(\tau) \to 0$ para distância temporal longa. Em nosso estudo, as variáveis analisadas serão retornos normalizados que possuem, por definição, média zero e variância $\sigma^2=1$. Assim, as funções de autocorrelação e autocovariância são equivalentes e, de (1.17), *C(0)*=1.

Podemos determinar o alcance da memória de um processo, ao verificar se a função de correlação é integrável. Neste caso, a memória do processo é de curto alcance e o valor da integral fornece uma medida da escala de tempo típica de correlação do processo τ_C. Por outro lado, se a função de correlação for não integrável significa que os eventos do passado tem influência significativa sobre o presente, qualquer que seja o intervalo temporal, ou seja, que o processo tem memória de longo alcance.

No mercado financeiro, a função de correlação linear de retornos decai rapidamente, sendo significativa apenas em intervalos da ordem de minutos. Para o mercado americano, foi obtido que $R(\tau) \sim \exp -(\tau/\tau_C)$ como mostrado na figura 1.8.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

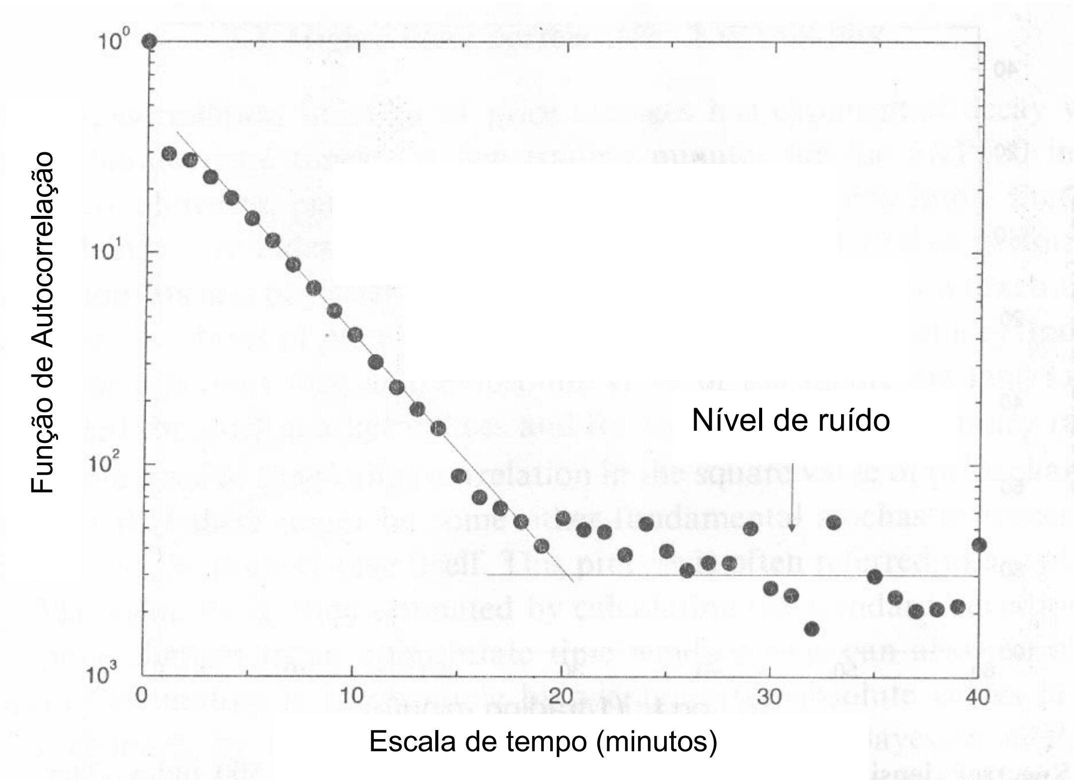

Figura 1.8 – Função de autocorrelação para o S&P 500 em gráfico semilogarítmico. A linha reta corresponde a um decaimento exponencial com tempo crítico τ_C = 4 minutos. A correlação intradiária neste mercado dura cerca de 20 minutos. [13]

No entanto, vários estudos feitos por físicos e economistas mostraram que a autocorrelação de funções não lineares de retornos de preços, tais como o valor absoluto ou o valor quadrático, têm memória de longo alcance. A figura 1.9 mostra a autocovariância dos valores absolutos de retornos do S&P 500 que apresenta um decaimento assintótico em lei de potência $C(\tau) \sim \tau^{-\eta}$ com $\eta \cong 0,3$. O fato de este expoente ser menor do que um implica que o processo tem memória de longo alcance. Isto significa que na verdade, os retornos não são independentes, violando a hipótese de mercado eficiente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA

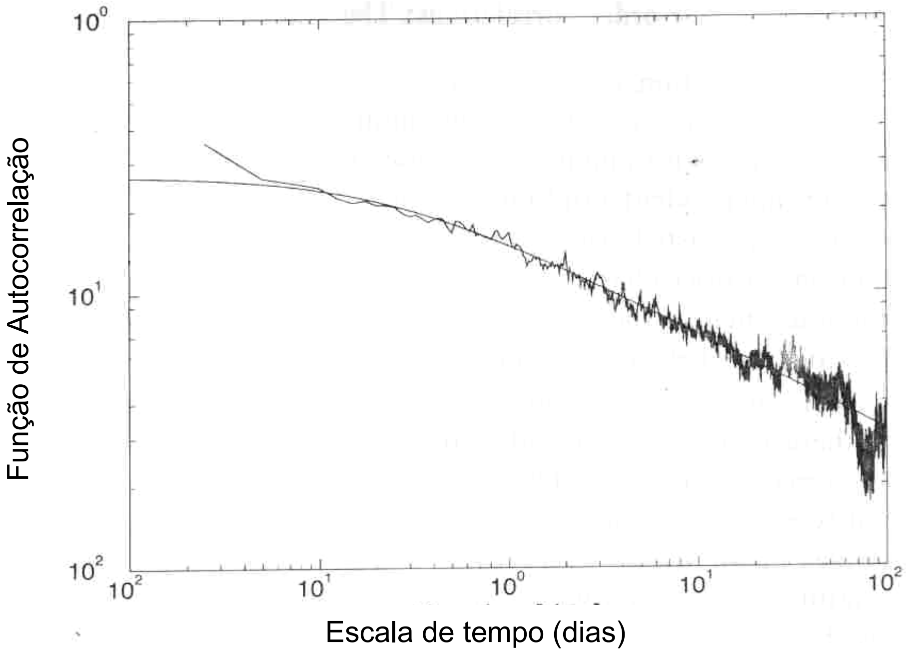

Figura 1.9 – Função de autocorrelação de módulo de retornos em gráfico log-log para os mesmos dados da figura 1.2 , mostrando correlação em lei de potência com expoente $\eta \cong 0.3$ [13]. A correlação persiste até a escala de alguns meses.

A hipótese de mercado eficiente, que prevê que as flutuações de preço são não correlacionadas no tempo, é verificada em boa aproximação através de medidas de correlação linear das flutuações de preços reais, conforme mostrado na figura 1.8. Apesar disso, a amplitude dessas flutuações ou volatilidade, é fortemente correlacionada no tempo, conforme mostrado na figura 1.9. Este fenômeno é chamado de *"clustering "* de volatilidade, ou seja , se o mercado perfaz uma grande mudança de preço em um dia, tem a tendência de repetir uma grande mudança no próximo dia, apesar do sinal desta mudança ser imprevisível.

Desta forma, é necessário encontrar modelos para a dinâmica dos preços que incluam a existência de memória. Neste trabalho, a descrição estatística das flutuações de preços intradiários do IBOVESPA baseiam-se nas distribuições q-Gaussianas. Estas distribuições, como será mostrado no capítulo 3, são consistentes com a existência de memória entre flutuações sucessivas de preços, proveniente de um mecanismo de *feedback* na dinâmica estocástica de formação destes preços.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0313431/CA