

2 Formulação Matemática

2.1 Descrição do problema

A fim de analisar o escoamento através de um meio poroso, foi considerado um meio poroso ideal, com uma geometria composta por canais convergentes-divergentes. Dessa forma, obtém-se uma cinemática do escoamento semelhante àquela que ocorre no meio poroso real, quando o fluido escoar através de gargantas e expansões. A Fig. 2.1 mostra um esquema de um meio poroso real. Na Fig. 2.2 mostra-se a geometria do meio poroso ideal composto por canais convergentes-divergentes, analisado neste trabalho.

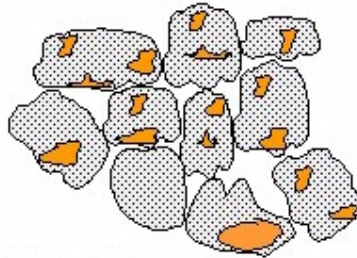


Fig. 2.1 – Meio poroso real.

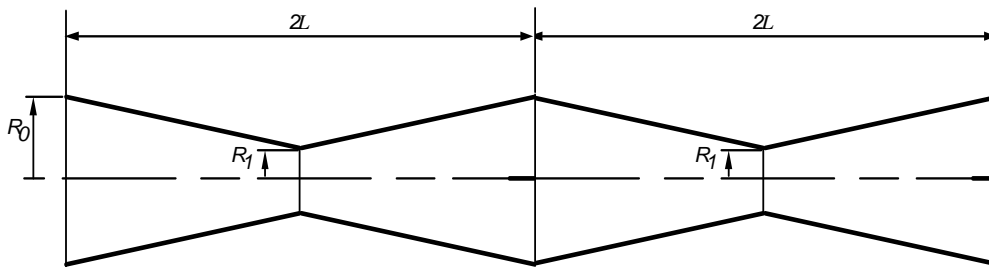


Fig. 2.2 – Meio poroso idealizado.

As equações de conservação para o escoamento são apresentadas abaixo, utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas. Para modelar o escoamento foram

feitas as hipóteses de regime permanente, escoamento axi-simétrico, fluido incompressível e forças externas desprezíveis.

A equação de conservação de massa é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad \text{Eq. (2.1)}$$

onde x é a coordenada axial, r é a coordenada radial e u e v são as componentes da velocidade nas direções radial e axial respectivamente.

As equações de conservação de momento nas direções axial e radial são mostradas a seguir:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{Eq. (2.2)}$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \rho g \quad \text{Eq. (2.3)}$$

onde ρ é a densidade, η é a função viscosidade, p é a pressão, g é a aceleração da gravidade. Foi utilizada a equação constitutiva de Fluido Newtoniano Generalizado, obtida a partir de uma simplificação da equação constitutiva para a modelagem de fluidos viscoelásticos proposta por Thompson *et al.* 1999, e que será apresentada a seguir.

2.2 Equação constitutiva

A equação constitutiva proposta por Thompson *et al.* 1999 considera que o tensor das tensões, \mathbf{T} , seja uma função do tensor da taxa de deformação, \mathbf{D} , e do tensor taxa de rotação relativa, $\overline{\mathbf{W}}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{D}, \overline{\mathbf{W}}) \quad \text{Eq. (2.4)}$$

Um tensor simétrico apresenta funções isotrópicas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T = & \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \cdot \mathbf{D} + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{W}}^2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{D}^2 + \alpha_4 \cdot (\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}) + \alpha_5 (\overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}}) \\
& + \alpha_6 (\mathbf{D}^2 \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}^2) + \alpha_7 (\overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}}^2 - \overline{\mathbf{W}}^2 \cdot \mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}})
\end{aligned}$$

Eq. (2.5)

onde os coeficientes α_i , $i = 1, 2, 3 \dots, 7$ são funções escalares.

2.3 As funções α_i

Thompson *et al.* 1999 fez uma interessante avaliação para explicitar as funções α_i em função do módulo do tensor taxa de deformação $\dot{\gamma} \equiv -\sqrt{\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{D}^2}$ e de um parâmetro classificador do tipo de escoamento R . de forma a simplificar a equação (5), e possibilitar a implementação numérica da equação constitutiva.

O tensor taxa de tensão é definido como: $\mathbf{D} \equiv [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]/2$, o tensor $\mathbf{\Omega}$, é o tensor taxa de rotação do tensor \mathbf{D} na partícula. Se \mathbf{e}_i são os vetores de \mathbf{D} (ou seja, vetores unitários na direção dos principais eixos de \mathbf{D}), a definição de $\mathbf{\Omega}$ é:

$$D\mathbf{e}_i/Dt = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2 \text{ e } 3.$$

Onde D/Dt é a derivada material com relação ao tempo.

O tensor taxa de rotação relativa $\overline{\mathbf{W}}$ é definido da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \mathbf{\Omega}$$

Onde \mathbf{W} é o tensor vorticidade definido como $[\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T]/2$.

Uma vez definido uma medida para a taxa de rotação, ASTARITA (1979) propôs o seguinte critério para classificação de escoamento.

$$\mathbf{R} \equiv -\text{tr} \overline{\mathbf{W}}^2 / \text{tr} \mathbf{D}^2$$

\mathbf{R} é considerado um classificador cinemático por diferenciar escoamento de pura extensão, quando $\mathbf{R} = 0$, de escoamento cisalhante, para $\mathbf{R} = 1$, e ainda para escoamento de corpo rígido quando $\mathbf{D} \rightarrow 0$ e conseqüentemente $\mathbf{R} \rightarrow \infty$.

As funções $\alpha_i = \alpha_i(\dot{\gamma}, R)$ sugeridas por Thompson *et al.* 1999 apresentam a seguinte forma:

$$\alpha_0 = -p \quad \text{Eq. (2.6)}$$

$$\alpha_1 = 2\eta(\dot{\gamma}) \quad \text{Eq. (2.7)}$$

$$\alpha_2 = 2.a_2^{(1-R)} [\psi_1(\dot{\gamma}) + 2\psi_2(\dot{\gamma})] \quad \text{Eq. (2.8)}$$

$$\alpha_3 = 0 \quad \text{Eq. (2.9)}$$

$$\alpha_4 = a_4^{(1-R)} \psi_1(\dot{\gamma}) \quad \text{Eq. (2.10)}$$

$$\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0 \quad \text{Eq. (2.11)}$$

onde p é a pressão, $\eta(\dot{\gamma})$, $\psi_1(\dot{\gamma})$ e $\psi_2(\dot{\gamma})$ representam a função viscosidade, o primeiro e o segundo coeficientes de tensão normal, respectivamente. Estas grandezas são os parâmetros reológicos do fluido, que são obtidos a partir de dados experimentais. Os escalares a_2 e a_4 são parâmetros adimensionais. Assim, a equação constitutiva simplificada assume a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \cdot \mathbf{D} + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{W}}^2 + \alpha_4 \cdot (\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}) \quad \text{Eq. (2.12)}$$

onde os coeficientes α_i , $i = 1, 2, 4$ são dados pelas equações (6) a (9). A fim de simplificar a implementação numérica, neste trabalho decidiu-se não considerar os termos quadráticos da eq. (10). O comportamento viscoelástico do fluido será então limitado aos efeitos extensionais. Esta simplificação se justifica, pois considera-se que na geometria analisada os efeitos extensionais são predominantes, devido a cinemática do escoamento. Desta forma, a equação constitutiva assume a forma do conhecido modelo de Fluido Newtoniano Generalizado (Bird et al., 1987):

$$\mathbf{T}(\mathbf{D}, \overline{\mathbf{W}}) = -p\mathbf{1} + 2\eta\mathbf{D} \quad \text{Eq. (2.13)}$$

onde, a fim de considerar os efeitos extensionais no fluido, a função viscosidade η é modelada como uma média geométrica entre as viscosidade de cisalhamento e extensional $\eta_s(\dot{\gamma})$ e $\eta_u(\dot{\gamma})$, respectivamente (Souza Mendes et al. (1995)):

$$\eta(\dot{\gamma}, R) = \eta_s(\dot{\gamma})^R \cdot \eta_u(\dot{\gamma})^{1-R} \quad \text{Eq. (2.14)}$$

As funções viscosidade de cisalhamento e extensional são características dos fluidos analisados. No presente trabalho, consideramos a viscosidade cisalhante constante. Foram utilizadas duas leis de potência para modelar a viscosidade extensional, a primeira foi equação de Carreau eq. (2.15), e a segunda foi a equação power-law eq. (2.16).

$$\eta_u = \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{(n-1)/2} \quad \text{Eq. (2.15)}$$

$$\eta_u = K_u \dot{\gamma}^{n_u} \quad \text{Eq. (2.16)}$$

2.4

Condições de Contorno

O escoamento através do canal convergente-divergente é considerado como periodicamente desenvolvido. Assim, o domínio computacional é constituído por apenas um bloco convergente-divergente, de acordo com a Fig. 2.3 e consideramos como condição de contorno na entrada do escoamento ($x=0$) um perfil de velocidade igual ao da saída ($x=2L$). Nas paredes do canal consideram-se as condições de impermeabilidade e não deslizamento ($\underline{v}=0$). Na linha de centro consideramos a condição de simetria.

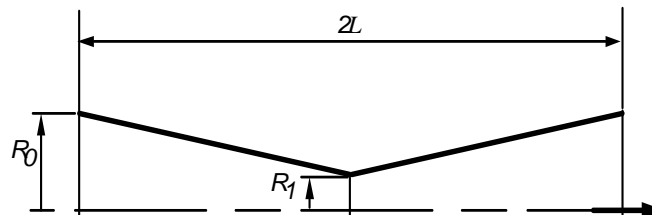


Fig. 2.3 - Domínio

2.5

O Modelo Teórico:

Souza Mendes e Naccache (2002) propuseram uma relação simplificada entre vazão e queda de pressão, para escoamentos de fluidos viscoelástico através de meio poroso, semelhante a Lei de Darcy para fluidos Newtonianos. A relação foi desenvolvida em duas etapas. Primeiramente a relação perda de carga / vazão de um meio poroso ideal foi obtida utilizando um canal convergente-divergente e considerando um fluido puramente extensional, onde a viscosidade é dada por:

$$\eta = K \dot{\epsilon}^n \quad \text{Eq. (2.17)}$$

onde K e n são os parâmetros reológicos e $\dot{\epsilon}$ é a taxa de extensão.

A vazão volumétrica de um fluido Newtoniano dentro de um tubo circular é expressa por:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz} \quad \text{Eq. (2.18)}$$

Considerando uma aproximação de lubrificação, a equação pode ser estendida para tubo convergente-divergente da seguinte forma:

$$Q = -\frac{\pi R(z)^4}{8\eta} \frac{dp}{dz} \quad \text{Eq. (2.19)}$$

onde $R(x)$ é o raio do canal, dado por:

$$R(x) = \begin{cases} R_0 + (R_1 - R_0) \cdot \frac{x}{L}, & 0 \leq x \leq L \\ R_1 + (R_0 - R_1) \cdot \frac{(x-L)}{L}, & L \leq x \leq 2L \end{cases}$$

Assumindo fluido não Newtoniano, modelado pela equação constitutiva de Fluido Newtoniano Generalizado, com a viscosidade dada pela equação (15), e a taxa de deformação igual a taxa de extensão, $\dot{\epsilon} \approx du/dz$, a vazão através do tubo convergente-divergente é expressa por:

$$Q = N\pi R_1^3 \left\{ \frac{3(n+1)L_*^{(n-1)}}{2^{(n+4)} K (1 - R_*^{3(n+1)})} (\Delta p)_{cycle} \right\}^{\frac{1}{(n+1)}} \quad \text{Eq. (2.20)}$$

onde,

$$N = \frac{3A\phi(1-R_*)}{\pi R_0^2 (1-R_*^3)}; \quad (\Delta p)_{cycle} = p(0) - p(2L); \quad R_* = R_1 / R_0; \quad L_* = L / (R_0 - R_1) \text{ e}$$

ϕ = Porosidade

Analogamente à Lei de Darcy, podemos expressar a equação da seguinte forma:

$$\frac{Q}{A} = M \frac{\Delta P}{L} \quad \text{Eq. (2.21)}$$

onde Q é a vazão e $\Delta p/L = (\Delta p)_{ciclo}/2L$ é a média do gradiente de pressão (L é o comprimento total da amostra do poro). A mobilidade M é expressa da seguinte forma:

$$M = \left\{ 6\phi R_0^2 L_* \frac{R_*^3 (1-R_*)^2}{(1-R_*^3)} \right\} \cdot K^{1/n+1} \cdot \left\{ \frac{3(n+1)2^{-(2n+4)}}{L_* R_0^n (1-R_*)^n (1-R_*^{3(n+1)})} \right\}^{\frac{1}{(n+1)}} \cdot \left\{ \frac{\Delta p}{L} \right\}^{\frac{n}{(n+1)}} \quad \text{Eq. (2.22)}$$

O primeiro fator é puramente geométrico, enquanto o segundo fator é puramente reológico. O terceiro e quarto fatores são respectivamente interações geométrico-reológico e gradiente de pressão-reológico.