

8 Aplicações e exemplos

Este capítulo mostra algumas aplicações práticas dos modelos e aponta outras, de tantos exemplos existentes na literatura.

Os modelos apresentados têm implicações para os agentes que atuam nos mercados de commodities. Estas implicações ocorrem tanto no curto como no longo prazos. No primeiro caso atuam os agentes que buscam no mercado futuro proteção para suas posições. Destacam-se os compradores e vendedores da commodity. Tais agentes podem também atuar no mercado de derivativos dos mercados futuros. Já no longo prazo, destacam-se os investidores e financiadores dos projetos de produção destas commodities. Portanto, é claro que tais modelos podem ser úteis na análise de proteção (*hedging*) e na orçamentação de capital, ou seja, na análise de decisões de investimentos dentro da disciplina denominada Opções Reais¹.

Em suma, pode-se dizer que há duas grandes vertentes que podem fazer uso dos modelos apresentados. A primeira área é a de orçamentação de capital onde está situada a disciplina de Opções Reais que trata da valoração dos projetos de desenvolvimento ou aproveitamento destas commodities. A segunda é a área de Finanças propriamente, onde se destacam as operações de proteção e apreçamento de derivativos de futuros. O capítulo possui duas seções, em cada uma é abordado um dos temas mencionado.

8.1 Implicações para a área de Opções Reais

Uma nova disciplina surgiu a partir da evolução dos conhecimentos em Finanças a partir da década de 80. Trata-se da Teoria das Opções Reais que abriga

¹ Veja em Dixit e Pindyck (1994) e em Trigeorgis (1996) um desenvolvimento completo dos conceitos desta nova disciplina.

as questões referentes à valoração dos ativos reais ou projetos de investimentos. Esta disciplina ganhou impulso na década de 90 no meio acadêmico e gradativamente torna-se mais popular na indústria. Dezenas de livros, artigos técnicos e páginas na internet são dedicados ao tema. Um dos pioneiros artigos em Opções Reais foi publicado por Brennan e Schwartz (1985). Nele os autores tratam dos três pontos mais relevantes da disciplina: a valoração do ativo, o instante ótimo de investir e o gerenciamento ótimo da produção do projeto.

Em geral, os estudos dentro deste tema consideram que o valor de um projeto é função do preço da commodity e do tempo. Assim, $V = V(S, t)$ retrata o valor do projeto em função do preço à vista e do tempo. Em consequência, a evolução do preço S afeta o valor V . Isto significa que o comportamento estocástico da commodity é fundamental na valoração do projeto. Neste artigo mencionado acima, foi analisada a valoração de uma mina de cobre. O valor deste ativo está ligado ao processo estocástico do cobre. Os autores consideraram apenas uma fonte de incerteza, isto é, apenas uma variável estocástica, o preço à vista S . A derivação do modelo resultou em uma EDP linear de segunda ordem. Em geral estas equações diferenciais não possuem soluções analíticas fechadas. A solução deve ser implementada numericamente, como é o caso do valor da mina de cobre.

Nem sempre o valor V do ativo está ligado somente a uma fonte de incerteza. No caso de commodities, o mais realista é considerar duas fontes de incertezas. Em Gibson e Schwartz (1990) os autores apresentam o preço à vista e o retorno de conveniência como variáveis estocásticas. Então o valor V será tal que $V = V(S, \delta, t)$ onde δ é o retorno de conveniência. Como resultado, a derivação do modelo implica em uma EDP que é função destas duas variáveis de estado. Neste caso a EDP resultante é linear e de segunda ordem. Sua solução também foi implementada numericamente. À medida que aumentam as fontes de incertezas (ou variáveis estocásticas), o problema tende para soluções mais complexas. Existem outras pesquisas que tratam de diferentes fontes de incerteza com em Aiube (1995) onde o valor do projeto é função do preço à vista e do volume da reserva: $V = V(S, R, t)$, onde R é uma variável estocástica pois o volume da jazida não é conhecido com precisão, e ao longo do tempo o

conhecimento deste volume pode acarretar em acréscimos ou reduções. Neste trabalho o valor do projeto resultou em uma EDP de segunda ordem e não linear.

Além do valor do ativo, a Teoria das Opções Reais trata do problema do investimento como uma opção que pode ser exercida agora ou postergada. O investimento é irreversível. Se este é o caso, uma vez exercida a opção de investir, o proprietário recebe em troca o ativo projeto. A opção significa um custo, pois quando exercida, perde-se definitivamente o direito de exercê-la novamente. A regra clássica da decisão de investir ensina que o investimento é viável quando $V > I$. Agora deve-se levar em consideração o valor da opção de investir. E a regra da decisão de investimento passa a ser $V \geq H + I$, onde H é o valor da opção de esperar. O valor da opção é função das variáveis que carregam as incertezas: $H = H(S, \delta, t)$ para Gibson e Schwartz (1990) ou $H = H(S, R, t)$ para Aiube (1995), por exemplo. Isto mostra que a decisão de investimento é influenciada pelo processo estocástico seguido pela commodity, ou ainda de forma mais geral, pelas fontes de incertezas ligadas ao modelo. Portanto, o instante ótimo de investir S^* , altera-se como consequência do processo seguido pelo preço.

Em Schwartz (1997) o artigo é finalizado com uma aplicação no campo da Teoria das Opções Reais. A valoração de um projeto e o instante ótimo de investir são calculados para o caso clássico (fluxo de caixa descontado) e para os três modelos analisados no artigo. Os resultados mostram que o investimento ótimo é muito “cedo” (S^* pequeno) quando é usada a teoria clássica da decisão de investimento. Quando é considerada a metodologia em que o retorno de conveniência é constante e o preço à vista um processo geométrico Browniano, o instante ótimo de investir é mais “tarde” (S^* é mais elevado). Os três modelos analisados no artigo para os preços das commodities recaem em uma situação intermediária entre os dois casos acima.

Em Schwartz e Smith (2000) é apresentada outra aplicação para a valoração de projetos. São analisados dois projetos distintos: (i) um projeto de longo prazo em que se considera o tempo para a construção de três anos, antes do início da produção e, (ii) um projeto de curta maturação onde o investimento é instantâneo. É analisada a estratégia ótima de investimento para cada caso. O valor do projeto é função de duas variáveis de estado do modelo básico, $V(\chi, \xi, t)$. O valor da opção de investir é também função destas variáveis $H(\chi, \xi, t)$. No projeto de curta

maturação a variável de curto prazo χ_t tem um papel preponderante e grande influência na regra de decisão: $V \geq H + I$. No projeto de longa maturação a variável de curto prazo é menos relevante. A menor influência da variável de curto prazo está relacionada ao tempo de construção do projeto e a sua longa duração. Esta insensibilidade sugere que uma possível simplificação do modelo é analisá-lo considerando as duas variáveis de estado, porém somente a variável ξ_t modelada estocasticamente.

A análise de projetos através de modelos com mais de um fator gera modelos de valoração muito mais complexos. Normalmente as equações diferenciais parciais ganham a dimensão referente ao número de fatores considerados. Sob o ponto de vista prático, estes problemas dificultam a aplicação e conseqüentemente a difusão da Teoria das Opções Reais dentro das corporações.

Em Schwartz (1998) o autor propõe um modelo de um fator que guarda as boas propriedades dos modelos de dois fatores em relação à estrutura a termo dos preços e das volatilidades. Os resultados obtidos na valoração de projetos de longa maturação são praticamente os mesmos dos modelos de dois fatores.

Dias e Rocha (1999) apresentam a análise de uma concessão petrolífera usando processo de reversão à média com saltos para o preço do petróleo.

A literatura em Opções Reais é vasta e evolui rapidamente. Isto significa que os processos estocásticos são permanentemente aprimorados refletindo a evolução dos conhecimentos desta disciplina.

Ainda deve-se ressaltar que os modelos apresentados nesta pesquisa permitem que os parâmetros sob a MME sejam facilmente determinados, permitindo a calibração dos modelos de Opções Reais.

8.2 Implicações para a área de Finanças

A existência de mercados futuros onde são negociados contratos futuros de commodities abre a possibilidade do surgimento de uma infinidade de derivativos destes contratos. Em outras palavras, o contrato futuro é o ativo objeto e outros ativos são negociados com base na evolução dos preços dos contratos futuros. Assim é que existem mercados de opções de futuros. Um dos mercados mais ativos de opções de futuros é o de opções de títulos do governo americano,

negociados na CBOT (*Chicago Board of Trade*). Os mercados de commodities agrícolas e de petróleo também possuem volumes expressivos de negociação.

Por conseguinte a aplicação de modelos que apreçam contratos futuros é imediata. Seu uso permite o apreçamento de derivativos de futuros. Foram apresentados modelos em que distribuição dos preços futuros é lognormal sob a MME. Decorre daí que a opção de compra europeia de futuros tem o mesmo tipo de solução de Black e Scholes (1973). Portanto, os modelos analisados têm um potencial grande de aplicações em Finanças, como por exemplo, na construção de curvas de preços futuros e para apreçamento de opções.

Considere o Modelo Básico. Pode-se escrever então que os preços das opções de compra (C) e venda (P) europeias sobre um contrato futuro que vence em τ , com preço de exercício K, são dadas por (veja Duffie (1989)):

$$C = F_{T,0}N(d) - KN(d - \sigma(\tau))$$

$$P = -F_{T,0}N(d) + KN(d - \sigma(\tau))$$

onde:

$$d = \frac{\ln\left(\frac{F_{T,0}}{K}\right)}{\sigma(\tau)} + \frac{1}{2}\sigma(\tau)$$

r é a taxa livre de risco, $\sigma^2(\tau)$ é a variância calculada sob a MME, ou seja

$$\sigma^2(\tau) = \text{VAR}^Q(\ln F_{\tau,t}) = e^{-2k\tau}(1 - e^{-2k\tau})\frac{\sigma_\lambda^2}{2k} + \sigma_\xi^2\tau + 2e^{-k\tau}(1 - e^{-k\tau})\frac{\rho\sigma_\lambda\sigma_\xi}{k}$$

$N(\cdot)$ é a função probabilidade acumulada.

As equações acima mostram que o cálculo da volatilidade foi decorrente do modelo básico. Este parâmetro afeta diretamente os valores das opções de compra e venda.

Outra utilidade dos modelos é na construção de curvas ou trajetórias dos preços através da simulação de Monte-Carlo tanto para o preço à vista como para o preço futuro. Cada caminho gerado dá origem a um preço na data do vencimento. Conhecendo-se a distribuição, assim gerada, o valor de um derivativo pode ser apreçado. Por exemplo, o valor de uma opção de compra em t pode ser calculada usando a expressão $C = E_t^Q(C^\bullet)e^{-r(\tau-t)}$ onde $E_t^Q(\cdot)$ significa o valor esperado em t sob a MME e o argumento é o valor da opção no vencimento τ . Usando a simulação de Monte-Carlo são gerados vários caminhos sob a MME e cada caminho resulta um valor para o preço no vencimento e conseqüentemente

para a opção. A equação acima pode então ser substituída por $\hat{C} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{C_i^*}{n} \right) e^{-r(\tau-t)}$ onde \hat{C} é um estimador do valor da opção. Uma das vantagens desta metodologia é que \hat{C} é um estimador não tendencioso do preço da opção. Ainda mais, como resultado do teorema do limite central, à medida que n cresce, a distribuição de \hat{C} é assintoticamente normal e possui erro padrão dado por $\sqrt{\frac{\text{VAR}(C^*)}{n}} e^{-r(\tau-t)}$.

A primeira etapa para o procedimento acima é estimar os parâmetros do modelo. Depois devem ser geradas as curvas referentes as variáveis de estado χ_t e ξ_t sob a MME. Os processos padrões de Wiener destas duas variáveis de estado devem ser tais que $dW_\chi dW_\xi = \rho dt$. Se, além disso, houver interesse em gerar caminhos para o preço futuro o procedimento segue as etapas do capítulo 6 onde foram gerados os dados artificiais.

Muitos mercados, que por longos tempos sofriam intervenções dos governos, sejam através de barreiras protecionistas sejam através do exercício monopolista da atividade, passaram nas últimas décadas por um processo de desregulamentação, como por exemplo, o mercado de energia elétrica. Esta commodity, que não pode ser estocada, apresenta características especiais como, por exemplo, picos de demanda por escassez temporária. O comportamento relativamente regular das curvas de preço de energia (demanda sazonal) traz implicações para o apreçamento dos derivativos de energia elétrica. Em Lucia e Schwartz (2001) os autores capturam os efeitos da sazonalidade através de funções senoidais e explicam o formato das curvas de preços futuros a partir do padrão de sazonalidade ao longo do ano. Villaplana (2004) também analisa o mercado de energia e avalia o prêmio de risco dos saltos dos preços decorrentes de sua escassez. Usa para tal o modelo de dois fatores.

Para as decisões de proteção (*hedge*) os modelos apresentados têm implicações importantes. Considere que se deseja buscar proteção contra as variações de preço do petróleo para a entrega em cinco anos. Então para se fazer uma proteção adequada com os modelos apresentados deve-se formular o problema da seguinte maneira: a sensibilidade do valor presente do compromisso de entregar a commodity daqui a cinco anos com relação a cada um dos fatores, deve ser igual a sensibilidade do portfólio de contratos futuros usado para

estabelecer a proteção. Em termos analíticos, seja $F(\chi_t, \xi_t, \tau)$ o preço do contrato futuro que vence em cinco anos. Deseja-se saber quantos contratos de um ano e de um mês devem ser adquiridos/vendidos para apropriadamente proteger o compromisso de entrega da commodity em cinco anos. Então o portfólio é formado por $F(\chi_t, \xi_t, t_1)$ e $F(\chi_t, \xi_t, t_2)$ para os contratos de um mês e um ano, respectivamente. Sejam ω_1 e ω_2 as quantidades de cada um destes contratos. Então deve-se usar a condição acima:

$$\omega_1 \frac{\partial F(\chi_t, \xi_t, t_1)}{\partial \chi_t} + \omega_2 \frac{\partial F(\chi_t, \xi_t, t_2)}{\partial \chi_t} = e^{-r\tau} \frac{\partial F(\chi_t, \xi_t, \tau)}{\partial \chi_t}$$

$$\omega_1 \frac{\partial F(\chi_t, \xi_t, t_1)}{\partial \xi_t} + \omega_2 \frac{\partial F(\chi_t, \xi_t, t_2)}{\partial \xi_t} = e^{-r\tau} \frac{\partial F(\chi_t, \xi_t, \tau)}{\partial \xi_t}$$

Tomando as derivadas parciais do modelo básico e resolvendo o sistema acima para ω_1 e ω_2 , tem-se as posições desejadas para fazer a proteção. Os sinais algébricos indicam a posição de comprado (positivo) e de vendido (negativo) no mercado futuro. O sistema acima foi resolvido para vários preços à vista S . Foram utilizados os parâmetros da Tabela 13 estimados usando o painel A pelo FP. A taxa livre de risco foi assumida como sendo 5% ao ano e constante durante todo o período. A Figura 18 mostra o comportamento das curvas ω_1 e ω_2 . No domínio da variável S analisada, nota-se que a posição do contrato de um mês será sempre vendido, enquanto que no contrato de um ano será sempre comprado. Seja por exemplo $S = \$45,15/\text{bbl}$, então $\ln(S) = 3,81$ e conseqüentemente encontra-se $\omega_1 = -0,331$ e $\omega_2 = 1,132$ contratos conforme mostrado na figura. Este mesmo exemplo pode ser repetido para diferentes maturidades. É interessante notar que quanto maior a maturidade do contrato, a sua sensibilidade em relação a variável ξ_t será bem maior do que em relação a χ_t . Assim para o exemplo acima foi encontrado:

$$\frac{F_{\xi_t}(\chi_t, \xi_t, t_2)}{F_{\chi_t}(\chi_t, \xi_t, t_2)} = 2,6 \qquad \frac{F_{\xi_t}(\chi_t, \xi_t, \tau)}{F_{\chi_t}(\chi_t, \xi_t, \tau)} = 121$$

onde os subscritos são as derivadas parciais.

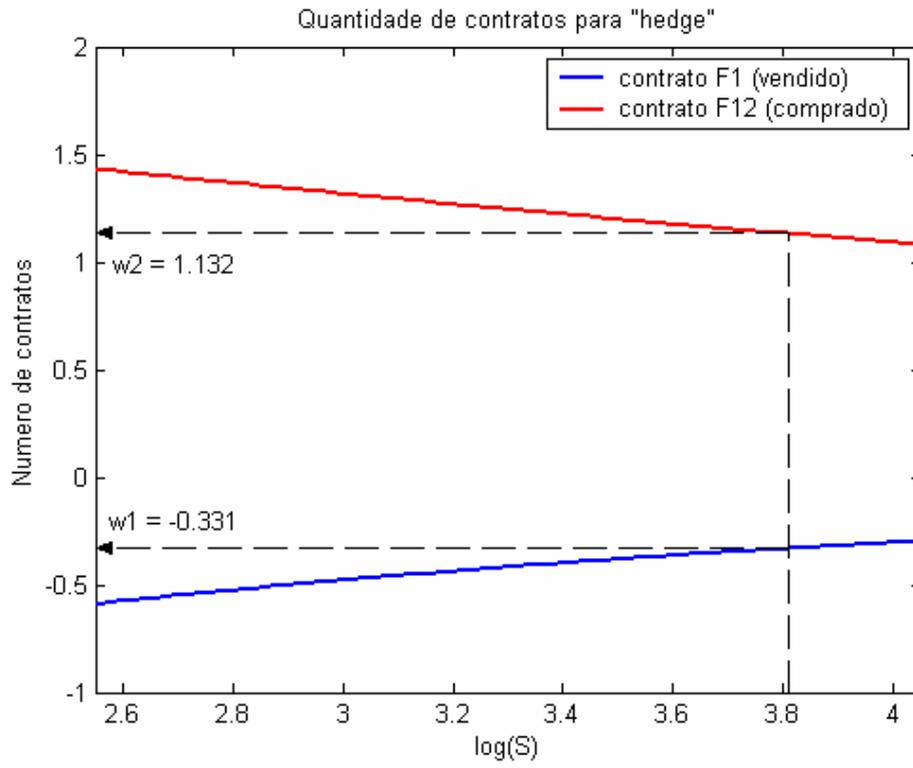


Figura 18 – Posição nos contratos futuros de um mês e um ano