

## 7 Análise dos resultados empíricos

Este capítulo é uma continuação dos procedimentos empíricos do capítulo anterior. O processo de filtragem foi analisado e verificou-se que o FP apresenta uma filtragem que pode ser considerada equivalente ao FK em termos dos erros. Toda a comparação entre os dois filtros foi realizada no capítulo 6. Neste capítulo serão analisados os resultados produzidos pelo FP quando é introduzido um algoritmo de otimização para estimação dos hiperparâmetros. Sempre que possível usaremos ambos os filtros com os respectivos algoritmos de otimização. Entretanto, não se pretende fazer nenhuma comparação entre os erros de uma metodologia ou de outra. Portanto, o foco será tão somente na estimação dos hiperparâmetros dos modelos descritos no capítulo 3, averiguando se o FP produz resultados condizentes com os reportados na literatura. E ainda mais, se os resultados são obtidos dentro de um tempo computacional factível. Por simplificação será usado o termo parâmetro(s) para designar hiperparâmetro(s).

Os modelos derivados no capítulo 3 são abrangentes e podem ser aplicados a qualquer commodity. Ainda mais, são flexíveis, pois permitem outras extensões. Esta pesquisa explora a utilização de tais modelos para os dados da commodity petróleo. Cumpre observar que cada commodity possui componentes particulares que caracterizam o processo de evolução dos seus preços. Por exemplo, a energia elétrica e as commodities agrícolas são caracterizadas por presença de sazonalidade. Já na commodity petróleo a componente sazonal é desprezível, como será visto à frente. Este capítulo foi organizado desta forma: as três primeiras seções tratam da organização e utilização dos dados; a quarta seção descreve o procedimento de estimação dos parâmetros; as seções subsequentes tratam da apresentação dos resultados para cada modelo.

## 7.1 Organização dos dados

Os dados básicos utilizados para análise dos modelos foram os preços da commodity petróleo WTI. Esta commodity é negociada no NYMEX. Os contratos futuros para o petróleo foram introduzidos no início dos anos 80. As informações históricas dos preços futuros estão disponíveis a partir de janeiro de 1985. No NYMEX o petróleo WTI é negociado em lotes de contratos de mil barris (bbls). Os contratos têm vencimento mensal, no terceiro dia útil antes do dia 25 de cada mês. O ponto de entrega físico é em Cushing, Oklahoma. A cotação é em dólares americanos e centavos, respectivamente. A maturação dos contratos varia, atualmente, de 1 a 30 meses consecutivos e de 3 a 7 anos.

Os dados estão organizados em painéis. Os dados básicos foram coletados em bases diárias e selecionados para a formação dos painéis em bases semanais. O uso de dados semanais evita problemas relacionados aos limites diários de flutuação conforme a regulamentação do NYMEX. A cotação semanal utilizada foi a de fechamento da quarta-feira. Quando houve feriado neste dia, tomou-se a cotação de quinta-feira. Assim, o tempo de maturação de cada contrato foi considerado até a última quarta-feira dentro do período de um mês. Os painéis envolvem diferentes números de contratos e diferentes janelas de observação. Na formação dos painéis perseguiram-se duas estratégias: i) manter um painel completo com o maior número de dados e ii) verificar a influência do prazo de maturação dos contratos nos resultados. Em Sørensen (2002), Cortazar e Naranjo (2003) e Cortazar, Schwartz e Naranjo (2003) os autores trabalham com dados em painéis incompletos. Embora seja uma opção mais realista em função da natureza incompleta dos preços futuros, optou-se nesta pesquisa por usar painéis completos. Em decorrência desta opção, alguns painéis possuem tamanhos mais reduzidos do que poderiam possuir se usássemos dados incompletos. Adotou-se a opção de painéis completos para evitar que houvesse mais um fator que pudesse afetar os resultados. Em futuros trabalhos pode-se analisar o efeito da completação dos painéis nos resultados. Por outro lado, em Schwartz (1997), Schwartz e Smith (2000) e em Lautier (2003) os painéis são completos.

A Tabela 7 resume as principais informações de cada painel. Cada contrato é representado pela letra maiúscula F seguido do número de meses de sua maturação.

Os painéis A e D possuem o mesmo número de contratos e abrangem a mesma janela de observação. O painel B foi construído para ser usado como painel de testes e o número de contratos não foi fixo. O painel C reúne tanto contratos de curta como de longa maturação. O painel E foi elaborado com o objetivo de reunir o maior número de observações com o maior número de contratos, abrangendo desde o primeiro dado histórico até o último dia de 2004. O máximo prazo de maturação que foi possível incluir no painel E mantendo-o completo foi o contrato F8. A partir do contrato F9 havia dados faltantes.

Painel	Contrato	Período	Média	Desvio Padrão	Curtose	Número de observações
			US\$/bbl	US\$/bbl		
A	F1	02/01/90	23,46	7,37	4,86	784
	F5	a	22,67	6,51	6,39	
	F9		22,05	5,85	7,56	
	F13		30/12/04	21,63	5,38	
	F17	21,36		5,03	9,37	
B	F1	23/04/97	26,31	8,71	3,27	403
	F48	a	22,17	5,16	6,22	
	F60		22,00	4,91	6,19	
	F72		30/12/04	21,92	4,75	
	F84	21,95		4,68	5,95	
C	F1	23/04/97	26,31	8,71	3,27	403
	F5	a	25,38	7,77	4,08	
	F10		24,31	6,93	4,71	
	F17		30/12/04	23,33	6,21	
	F27	22,62		5,60	5,95	
	F48	22,19		5,16	6,20	
	F84	21,95		4,69	5,93	
D	F1	02/01/90	23,46	7,37	4,86	784
	F7	a	22,34	6,15	7,03	
	F12		21,73	5,49	8,29	
	F15		30/12/04	21,48	5,20	
	F17	21,36		5,03	9,37	
E	F1	02/01/85	22,47	7,04	5,26	1045
	F3	a	22,05	6,64	6,08	
	F5		21,70	6,26	6,76	
	F7		30/12/04	21,41	5,94	
	F8	21,28		5,80	7,54	

Tabela 7 – Principais informações dos painéis utilizados

## 7.2

### Utilização dos painéis

Os painéis foram usados de acordo com o propósito para o qual foram montados. O modelo básico foi estimado com todos os painéis, a exceção do painel B que foi elaborado para testes.

A Tabela 8 mostra a utilização dos modelos com os respectivos painéis. O painel A, que envolve curta maturação foi usado em todos os modelos. O painel B foi usado como testes em diversas situações. O painel C contém contratos de curta, média e longa maturações e foi usado na maioria dos modelos. Os painéis A e C envolvem janelas de observações distintas. O painel D abrange a mesma janela de observação e contém o mesmo número de contratos que A. O painel D foi usado somente no modelo básico. O painel E contém o maior número de dados e foi usado no Modelo Primeira Extensão e no Modelo Terceira Extensão, além do uso no Modelo Básico.

Modelo de dois fatores		Modelo de dois fatores com saltos	
Modelo Básico	Primeira Extensão	Segunda Extensão	Terceira Extensão
A	A	A	A
C	C	C	E
D	E	-	-
E	-	-	-

Tabela 8 – Utilização dos painéis em cada modelo

## 7.3

### Sazonalidade

Embora os modelos tenham sido desenvolvidos supondo a existência de sazonalidade, no caso do petróleo bruto esta componente não é significativa. Foram realizados testes considerando a sazonalidade representada por uma soma de senos e cossenos. A sazonalidade trimestral mostrou que os coeficientes das

funções trigonométricas são estatisticamente insignificantes<sup>1</sup>. O mesmo não pode ser dito para outras commodities como a energia elétrica ou commodities agrícolas. Nos trabalhos de Schwartz (1997), Schwartz e Smith (2000) e Cortazar e Naranjo (2003), onde os modelos são analisados usando preços do petróleo, não há utilização de componentes sazonais. Os trabalhos de Sørensen (2002), para commodities agrícolas; Deng (1998), Villaplana (2004) e Culot (2003), para energia elétrica e Manoliu e Tompaidis (2000) para o gás natural, possuem componentes sazonais.

## 7.4

### Estimação dos parâmetros

Conforme apresentado no capítulo anterior, tanto o FK como o FP realizam o processo de filtragem que, em última análise, é a estimação das variáveis de estado não observáveis. A partir da variável observável (preço futuro) e dos estados iniciais, os dois filtros estimam os estados  $\chi_t$  e  $\xi_t$  para cada instante de tempo. Ao mesmo tempo, através da decomposição do erro de previsão, é implementado um algoritmo otimizador para determinação dos parâmetros do modelo.

O FK é inicializado com o valor da média e da variância das variáveis de estado, pois estes dois momentos são suficientes para a definição de uma distribuição normal. O valor inicial das médias das variáveis de estado  $\hat{\mathbf{x}}_0 = (\chi_0, \xi_0)$  foi obtido rodando uma regressão segundo a eq. (93) em que  $\chi$  e  $\xi$  são os coeficientes a serem determinados.

Para a estimação dos parâmetros é necessário que sejam feitas estimativas iniciais para os valores dos mesmos. O vetor  $\Theta_0 (k \times 1)$ , contém os  $k$  parâmetros iniciais. Este vetor  $\Theta_0$  juntamente com  $\hat{\mathbf{x}}_0 = (\chi_0, \xi_0)$  e  $\mathbf{P}_0$  inicializam os processos de filtragem e estimação dos parâmetros.

---

<sup>1</sup> A sazonalidade certamente será um parâmetro significativo para commodities derivadas do petróleo, como é o caso do óleo diesel (e também óleo combustível) devido a sua utilização abundante para calefação no hemisfério norte durante o período do inverno.

De modo similar, o FP requer a inicialização através de uma distribuição inicial para os estados. Foi considerada como normal a distribuição inicial das variáveis de estado, com mesma média e variância usadas no FK.

Tanto o FK como o FP iniciam o processo de filtragem com o vetor de parâmetros  $\Theta_0$ . As variáveis de estado e as observações filtradas são estimadas para cada instante de tempo. Através da decomposição do erro de previsão é estimada a verossimilhança do modelo. Ao final da primeira filtragem este valor é avaliado conforme a eq. (58), reescrita abaixo:

$$\ln L(\Theta) = -\frac{NT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t$$

onde  $\mathbf{F}_t$  representa a matriz de covariância dos erros das observações em  $t$ ;  $\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t|t-1}$  é o erro de previsão em  $t$  e  $\Theta$  é o vetor que contém os parâmetros a serem estimados.

O algoritmo de otimização utilizado foi o BHHH (Berntd-Hall-Hall-Hausman)<sup>2</sup> tanto para o FK como para o FP. Ao final de cada iteração  $j$  o vetor  $\Theta$  é calculado por:

$$\Theta_{j+1} = \Theta_j + \delta \mathbf{B}_j^{-1} \mathbf{g}_j$$

onde:

i)  $\mathbf{g}_j$  representa o gradiente em  $\Theta_j$ , tal que:

$$\mathbf{g}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{s}_t(\Theta_j) \quad \text{e } \mathbf{s}_t \text{ é um vetor } k \times 1 \text{ com } \mathbf{s}_t(\Theta) = \frac{\partial \ln L_t(\Theta)}{\partial \Theta}$$

ii)  $\mathbf{B}_j$  é uma matriz  $k \times k$  e no algoritmo BHHH representa a matriz Hessiana,  $-\mathbf{H}$ , do processo de otimização de Newton-Raphson. Sabemos que

$$\mathbf{H}_j = \left. \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \Theta} \right|_{\Theta_j} = \left. \frac{\partial^2 \ln L(\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta'} \right|_{\Theta_j}$$

A matriz  $\mathbf{B}_j$  é dada por:

$$\mathbf{B}_j = \sum_{t=1}^T \mathbf{s}_t(\Theta_j) \mathbf{s}_t'(\Theta_j)$$

<sup>2</sup> Uma síntese do algoritmo BHHH pode ser encontrada em Greene (2003).

iii)  $\delta$  é um escalar e representa o avanço da função verossimilhança na direção do máximo.

Desta maneira, ao final da primeira iteração,  $\Theta_1$  é avaliado, e assim sucessivamente para as demais iterações. Existem vários critérios para avaliar a convergência. Um deles é calcular a estatística  $m_j = \mathbf{g}'_t \mathbf{B}_j^{-1} \mathbf{g}_j$ . Esta estatística tem distribuição qui-quadrado com  $k$  graus de liberdade. Entretanto, na prática é usual compará-la com um nível de tolerância mais rigoroso.

A estimação das variáveis de estado e dos parâmetros foi realizada para os dois filtros conforme a descrição acima. Entretanto deve-se ressaltar que para o FK foi utilizado o módulo espaço-estado do *software* EVIEWS. Para o FP foi implementado o algoritmo acima no *software* MATLAB.

Para o processo de filtragem/estimação dos parâmetros, o tempo computacional despendido é função do número de contratos em cada painel e do número de dados em cada contrato. Em cada iteração do algoritmo de otimização é realizada uma filtragem completa. Para o FP o tempo requerido em cada iteração variou de 35 segundos para os menores painéis a 60 segundos para os maiores. O tempo do mesmo procedimento no FK é sensivelmente menor e cada iteração consome poucos segundos.

## 7.5 Resultados do modelo básico

O modelo básico é dado pela eq.(33). Esta é a equação das observações e foi reescrita para um contrato de maturidade  $\tau$ :

$$y_{\tau,t} = \exp(-k_\chi (\tau - t)) \chi_t + \xi_t + A(\tau - t) + u_t$$

onde:

$$A(\tau - t) = \mu_\xi^* (\tau - t) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi} (1 - \exp(-k_\chi (\tau - t))) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_\chi^2}{2k_\chi} (1 - \exp(-2k_\chi (\tau - t))) + \sigma_\xi^2 (\tau - t) + 2 \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{k_\chi} (1 - \exp(-k_\chi (\tau - t))) \right)$$

$y_{\tau,t} = \ln(F_{\tau,t})$ ,  $u_t$  é um ruído Gaussiano e responde por erros nos registros das observações provavelmente, devido à falta de sincronismo destes registros; assim  $u_t \sim N(0, s)$  onde  $s$  é o desvio do ruído das observações.

O vetor de parâmetros a ser estimado é  $\Theta = (\mu_{\xi}^*, k_{\chi}, \lambda_{\chi}, \sigma_{\chi}, \sigma_{\xi}, \rho, s_1, s_2, \dots, s_n)$ , onde  $n$  é o número de contratos do painel e  $s_i$  é desvio padrão do ruído das observações do  $i$ -ésimo contrato.

Para cada contrato do painel existe uma correspondente equação de observação  $y_{\tau,t}$ . Assim no painel A são cinco equações de observações, já no painel C são sete equações. As equações de transição serão duas em todos os painéis. Elas são as equações dos processos estocásticos das variáveis de estado discretizadas.

### 7.5.1 Filtro de Kalman

As Tabelas 9 e 10 mostram os resultados da estimação dos parâmetros com o FK para os painéis A e D, respectivamente. Este painéis são perfeitamente comparáveis pois encerram o mesmo número de contratos e observações. Pode-se notar que o parâmetro  $\mu_{\xi}^*$  é baixo no painel A e embora negativo no painel D é não significativo. O coeficiente de reversão à média ( $k_{\chi}$ ) tem pouca variação entre os painéis. As volatilidades apresentaram valores muito próximos entre si. O mesmo pode ser dito acerca do coeficiente de correlação. O preço de risco de mercado ( $\lambda_{\chi}$ ) não é significativo em ambos os casos.

De maneira geral pode-se dizer que a consideração de contratos com maturação um pouco maior, no painel D, não afeta significativamente os resultados. Não é possível fazer uma comparação rigorosa com os resultados em Schwartz e Smith (2000), pois são amostras com períodos de observação distintos. Não obstante tal fato, algumas ressalvas são pertinentes e serão comentadas.

Em Schwartz e Smith (2000) o preço de risco de mercado da variável de estado  $\chi_t$  ( $\lambda_{\chi}$ ) é não significativo. O coeficiente de reversão  $k_{\chi} = 1,49$  ao ano está um pouco mais elevado. A volatilidade de curto prazo  $\sigma_{\chi} = 28,6\%$  ao ano está bastante próxima dos valores encontrado nos dois painéis. A volatilidade de longo prazo  $\sigma_{\xi} = 14,5\%$  ao ano, também é coerente com o encontrado. O coeficiente de correlação  $\rho = 0,30$ , está um pouco superior ao encontrado nos dois painéis,



entretanto, tanto nos autores acima como nesta pesquisa, este coeficiente de correlação é baixo, mostrando a ortogonalidade entre as variáveis de estado, uma

PAINEL A		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0095	0,0020
$k_{\chi}$	1,0413	0,0139
$\lambda_{\chi}$	0,0065	0,0873
$\sigma_{\chi}$	0,3111	0,0073
$\sigma_{\xi}$	0,1376	0,0032
$\rho$	0,1165	0,0358
$s_1$	0,0485	0,0001
$s_2$	0,0101	0,0000
$s_3$	0,0017	0,0000
$s_4$	0,0001	0,0000
$s_5$	0,0049	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 28452$		

Tabela 9 – Resultados da estimação com o painel A pelo FK

PAINEL D		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	-0,0015	0,0033
$k_{\chi}$	1,1212	0,0274
$\lambda_{\chi}$	0,0897	0,0717
$\sigma_{\chi}$	0,2931	0,0091
$\sigma_{\xi}$	0,1370	0,0037
$\rho$	0,1390	0,0425
$s_1$	0,0469	0,0001
$s_2$	0,0049	0,0000
$s_3$	0,0038	0,0000
$s_4$	0,0000	-
$s_5$	0,0101	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 28871$		

Tabela 10 – Resultados da estimação com o painel C pelo FK

característica particular deste modelo. O parâmetro do desvio padrão do ruído das observações do primeiro contrato,  $s_1$ , no trabalho dos autores foi de 4,2%. Nesta pesquisa foram encontrados 4,9% no painel A e 4,7% no painel D. Os valores de  $s_i$  para os demais contratos e os resultados de Schwartz e Smith (2000) estão dentro da mesma ordem de grandeza. Em Sørensen (2002) a ordem de grandeza é de 1,7% para commodities agrícolas. Em Manoliu e Tompaidis (2000), que trabalhou com a commodity gás natural, a variação é de 0,7% até 6,7%, sendo que os contratos de menor maturação possuem os maiores erros.

Em termos gerais, pode-se dizer que há uma coerência entre os resultados encontrados e os descritos em Schwartz e Smith (2000). Ainda vale ressaltar que em Lautier (2003) o preço de risco de mercado do retorno de conveniência também é não significativo para a maioria dos casos analisados. O mesmo pode ser dito com relação à pesquisa de Cortazar e Naranjo (2003). Em Lautier (2003) o coeficiente de reversão do retorno de conveniência, para um painel similar em termos de maturidade, é de 1,04 ao ano. Em Schwartz (1997), no modelo de dois fatores, o preço de risco de mercado do retorno de conveniência, também não é significativo em nenhum dos painéis.

A Tabela 11 mostra o resultado da estimação com o painel C. As volatilidades estimadas guardam a mesma ordem de grandeza dos painéis anteriores. Entretanto o coeficiente de correlação apresentou-se um pouco mais elevado. A introdução de contratos de longa maturação, como é o caso do painel C, traz algumas alterações nos parâmetros estimados dos desvios padrões dos ruídos das observações:  $s_1 \dots s_7$ . Enquanto nos painéis anteriores  $s_1$  apresentava o maior valor, neste os contratos de mais longa maturação, F48 e F84 ( $s_6$  e  $s_7$ ), apresentam os maiores desvios, entre 5 e 7%, respectivamente. O modelo tenta ajustar-se a estes contratos, porém nota-se que o ajuste não é tão adequado como outrora. Logo a seguir será mostrada a estrutura a termo da volatilidade e os reflexos da inclusão dos contratos de longa maturação. Outra alternativa para modelar os contratos de longa maturação está no modelo de três fatores. Em Schwartz e Smith (2000), os autores apresentaram um adendo ao artigo original onde propõem um modelo de três fatores. A terceira variável estocástica é o termo de tendência (*drift*) dos preços de equilíbrio. Este modelo é linear e Gaussiano. Os resultados encontrados foram melhores.

PAINEL C		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0093	0,0014
$k_{\chi}$	1,5713	0,0178
$\lambda_{\chi}$	-0,3976	0,0295
$\sigma_{\chi}$	0,3191	0,0137
$\sigma_{\xi}$	0,1577	0,0075
$\rho$	0,4574	0,0449
$s_1$	0,0394	0,0001
$s_2$	0,0006	0,0000
$s_3$	0,0108	0,0000
$s_4$	0,0039	0,0000
$s_5$	0,0247	0,0001
$s_6$	0,0508	0,0050
$s_7$	0,0707	0,0004
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 8543$		

Tabela 11 – Resultados da estimação com o painel C pelo FK

A Tabela 12 apresenta os resultados da estimação com o painel E. Este painel reúne o maior número de observações. Os contratos são relativamente de curta duração. Este fato implica na maior volatilidade para o curto prazo,  $\sigma_{\chi} = 41,8\%$  ao ano. A volatilidade de longo prazo,  $\sigma_{\xi}$ , também apresenta o maior valor dentre os painéis já analisados. A elevada velocidade de reversão à média,  $k_{\chi} = 1,73$  ao ano, é consequência de um painel de curta maturidade. Em Lautier (2003) o painel de mais curta duração (com os quatro primeiros contratos) apresentou um valor para este parâmetro da ordem 2,81 ao ano. Portanto, não é surpresa encontrar o valor acima em um painel que inclui até o oitavo contrato. Ainda vale citar que Cortazar e Naranjo (2003) encontram coeficientes de reversão variando entre 3,5 a 7,3 ao ano e Manoliu e Tompaidis (2000) encontram de 0,99 a 4,1 ao ano. Aqui o coeficiente de correlação apresentou resultado coerente com a literatura. O preço de risco de mercado,  $\lambda_{\chi}$ , não é significativo. O parâmetro  $s_1$  representa o maior valor dentre todos os

contratos, fato este também verificado em painéis anteriores bem como em Schwartz e Smith (2000).

PAINEL E		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0050	0,0035
$k_{\chi}$	1,7340	0,0267
$\lambda_{\chi}$	-0,0125	0,0506
$\sigma_{\chi}$	0,4177	0,0097
$\sigma_{\xi}$	0,1711	0,0025
$\rho$	0,2313	0,0339
$s_1$	0,0284	0,0001
$s_2$	0,0021	0,0000
$s_3$	0,0032	0,0000
$s_4$	0,0005	0,0000
$s_5$	0,0028	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 39681$		

Tabela 12 – Resultados da estimação com o painel E pelo FK

### 7.5.2

#### Filtro de partículas

As Tabelas 13 e 14 mostram a estimação dos parâmetros com o FP usando os painéis A e D, respectivamente. Foram utilizadas 200 partículas no FP. As estimações com os painéis A e D apresentam resultados semelhantes, à exceção do coeficiente de correlação  $\rho$ , que no painel D é não significativo. Se estes dois painéis forem comparados com os respectivos estimados pelo FK, notar-se-á que há coerência entre os resultados, ressalvando-se as volatilidades de curto prazo dos painéis A e D do FK que estão um pouco superiores àquelas estimadas pelo FP. Nota-se também que o coeficiente de correlação não é significativo no painel D. As Figuras 8 e 9 mostram as variáveis de estado  $\chi$  e  $\xi$  para o painel A, estimadas através da filtragem, respectivamente. Com simples inspeção constata-se que a volatilidade das variações de curto prazo é bem superior àquela dos preços de equilíbrio. Este fato está de acordo com o resultado da estimação dos hiperparâmetros da Tabela 13.

PAINEL A		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0100	0,0040
$k_{\chi}$	1,0390	0,0518
$\lambda_{\chi}$	0,0098	0,0568
$\sigma_{\chi}$	0,2614	0,0176
$\sigma_{\xi}$	0,1406	0,0067
$\rho$	0,1859	0,0438
$s_1$	0,0109	0,0009
$s_2$	0,0099	0,0000
$s_3$	0,0111	0,0000
$s_4$	0,0068	0,0000
$s_5$	0,0212	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 29102$		

Tabela 13 – Resultados da estimação com o painel A pelo FP

PAINEL D		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0100	0,0059
$k_{\chi}$	1,1110	0,0753
$\lambda_{\chi}$	0,0098	0,0971
$\sigma_{\chi}$	0,2490	0,0293
$\sigma_{\xi}$	0,1465	0,0073
$\rho$	0,1120	0,1010
$s_1$	0,0114	0,0040
$s_2$	0,0102	0,0002
$s_3$	0,0116	0,0000
$s_4$	0,0039	0,0000
$s_5$	0,0383	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 29503$		

Tabela 14 – Resultados da estimação com o painel D pelo FP

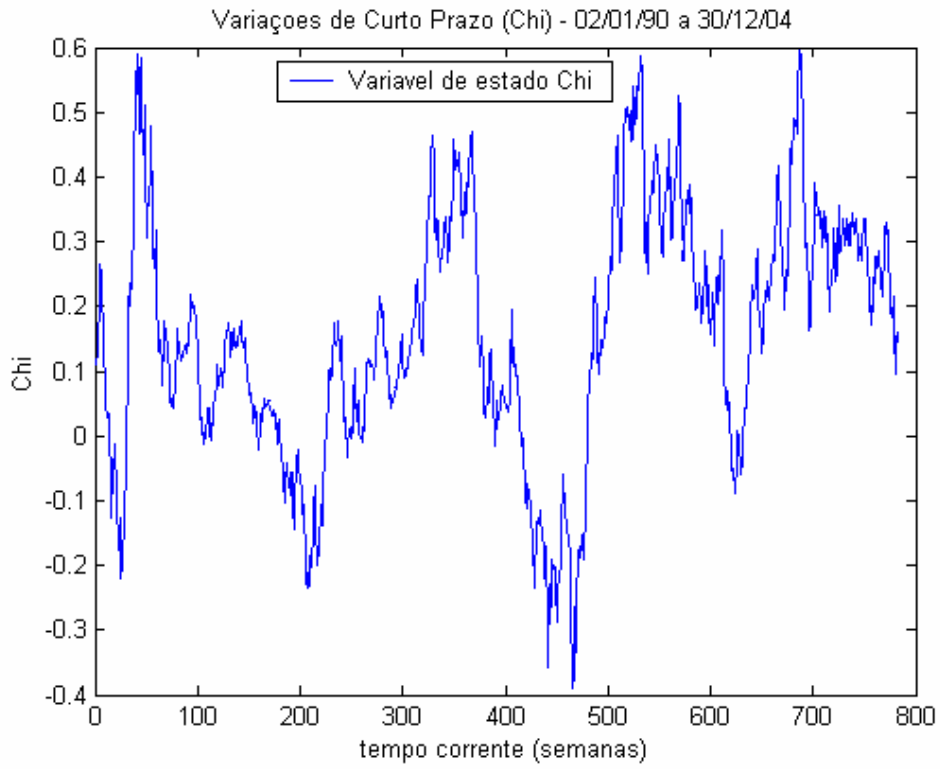


Figura 8 – Variável de estado  $\chi$  (variações de curto prazo) do painel A

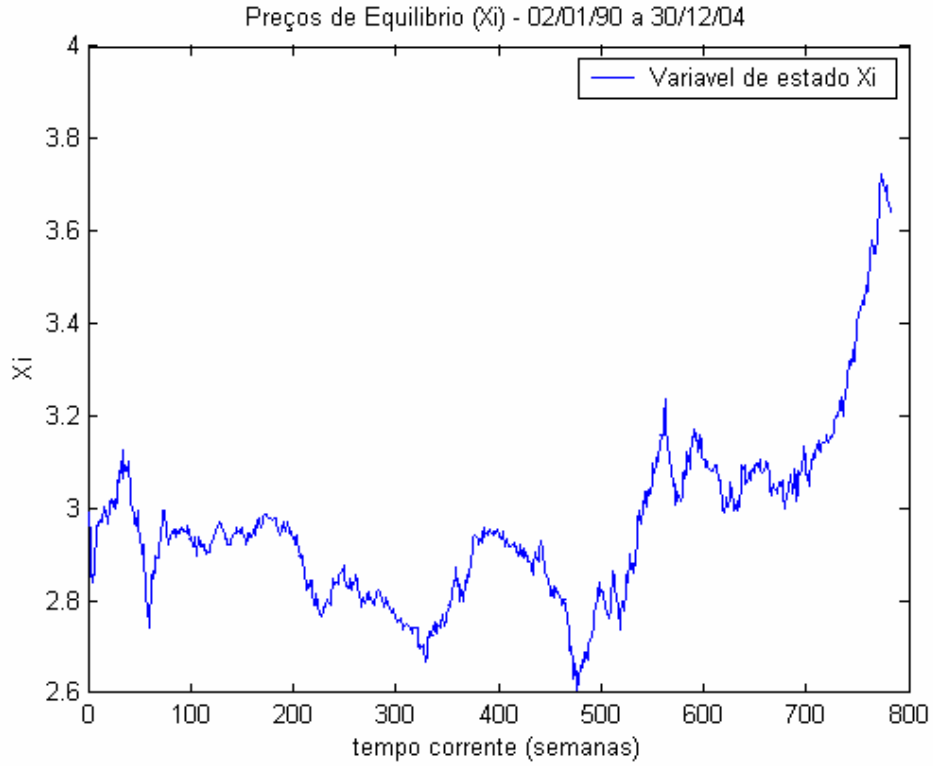


Figura 9 – Variável de estado  $\xi$  (preços de equilíbrio) do painel A

A Figura 10 mostra as evoluções do preço à vista estimado  $S$  e do preço observado do primeiro contrato futuro  $F1$ . Em algumas aplicações práticas é comum utilizar o primeiro contrato futuro como uma *proxy* do preço à vista.

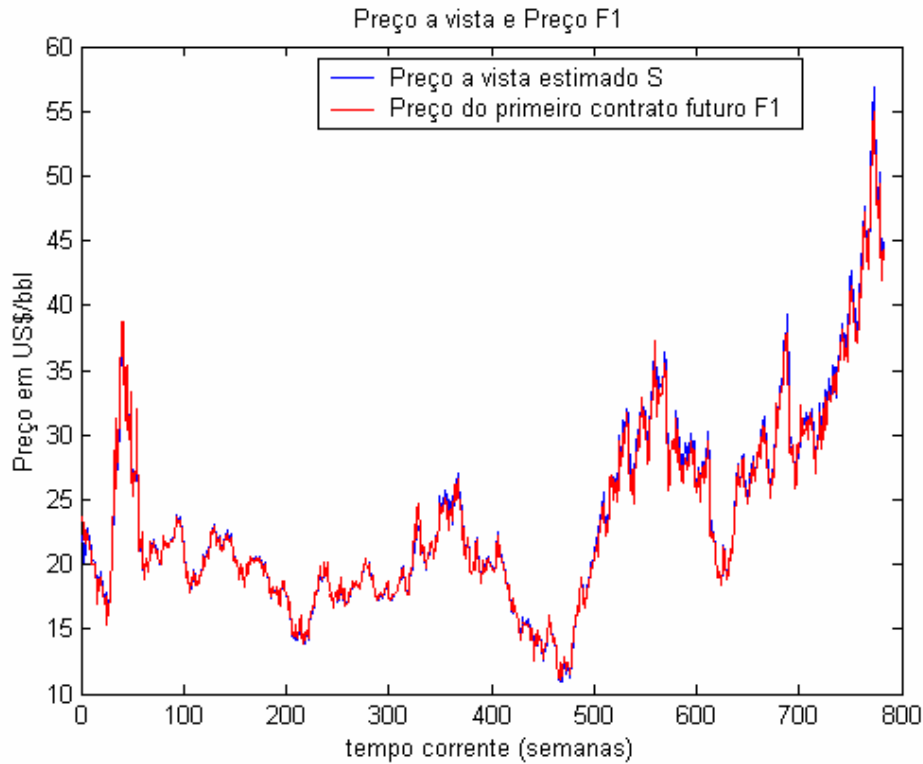


Figura 10 – Evolução dos preços à vista estimado e do primeiro contrato futuro

A Tabela 15 mostra o resultado da estimação com o painel C pelo FP. Comparando este painel com o respectivo, estimado pelo FK, nota-se que a volatilidade de longo prazo e o coeficiente de reversão à média são próximos. A volatilidade de curto prazo é similar. O coeficiente de correlação é inferior. Como dito anteriormente, novamente observa-se que a introdução de contatos de longa maturação fez aumentar os parâmetros  $s_i$ , mostrando a dificuldade de ajuste entre a observação real e observação filtrada. Este fato também foi constatado no FK. A consequência deste efeito será mostrada na estrutura a termo da volatilidade, a seguir.

PAINEL C		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0097	0,0007
$k_{\chi}$	1,4070	0,0155
$\lambda_{\chi}$	0,0780	0,0783
$\sigma_{\chi}$	0,3606	0,0124
$\sigma_{\xi}$	0,1500	0,0041
$\rho$	0,2188	0,0446
$s_1$	0,0092	0,0001
$s_2$	0,0477	0,0000
$s_3$	0,0103	0,0000
$s_4$	0,0092	0,0000
$s_5$	0,0100	0,0001
$s_6$	0,0200	0,0006
$s_7$	0,0156	0,0007
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 8152$		

Tabela 15 – Resultados da estimação com o painel C pelo FP

A Tabela 16 mostra o resultado da estimação usando o painel E. O resultado deste painel, quando comparado ao respectivo estimado pelo FK, apresenta-se coerente. Entretanto, a volatilidade de curto prazo estimada pelo FK está superior àquela do FP. O mesmo pode ser dito acerca do coeficiente de correlação. Com relação a este último, pode-se dizer que em ambos os casos tratam-se de valores baixos. O preço de risco de mercado ( $\lambda_{\chi}$ ) não é significativo a exemplo do que foi encontrado com o FK. Estes resultados estão coerentes para um painel de curto prazo, como é o caso do painel E. Em Schwartz (1997) e em Lautier (2003) são feitas rigorosas comparações entre os parâmetros variando-se as maturidades dos contratos nos painéis. Observa-se que à medida que cresce a maturidade, tanto o coeficiente de reversão à média quanto a volatilidade de curto prazo decrescem. Os resultados aqui encontrados condizem com os dos autores acima já que a volatilidade de curto prazo e o coeficiente de reversão à média são maiores que nos demais painéis mostrados.



PAINEL E		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0098	0,0032
$k_{\chi}$	1,4962	0,0323
$\lambda_{\chi}$	0,0092	0,0311
$\sigma_{\chi}$	0,3111	0,0067
$\sigma_{\xi}$	0,1652	0,0019
$\rho$	0,1195	0,0299
$s_1$	0,0108	0,0000
$s_2$	0,0098	0,0000
$s_3$	0,0113	0,0000
$s_4$	0,0061	0,0000
$s_5$	0,0373	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 40096$		

Tabela 16 – Resultados da estimação com o painel E pelo FP

### 7.5.3

#### Tamanho efetivo da amostra no FP

No capítulo anterior, seção 6.4, foi mostrado que o erro na variável de observação do FP é função do tamanho efetivo da amostra (adaptatividade/eficiência) utilizado. Esta eficiência também tem implicações com o valor da função verossimilhança. Foram realizadas análises do efeito que a eficiência tem nos painéis A e E. Conforme foi relatado no capítulo 6, pode-se realizar tal análise variando-se o tamanho efetivo da amostra, isto é, do valor de coef. A Tabela 17 mostra os resultados. Nesta pesquisa foi utilizada a eficiência de 100% para o FP.

Verossimilhança - FP		
Eficiência (%)	Painel A	Painel E
100	29102	40096
10	27691	39657
5	23203	30513
3	17929	19524
1	$\leq 0$	$\leq 0$

Tabela 17 – Efeito da eficiência do FP na verossimilhança

### 7.5.4 Estrutura a termo da volatilidade

A “hipótese de Samuelson” é um fato estilizado para muitos ativos financeiros que são negociados em mercados futuros. A hipótese de Samuelson estabelece que as volatilidades dos contratos futuros são maiores para os contratos de mais curta maturação (veja Samuelson (1965)). Existem muitos trabalhos empíricos para a verificação desta hipótese. Bessembinder, Coughenour, Seguin e Smoller (1996) pesquisaram a validade da hipótese de Samuelson e as condições em que ela seria válida. Os autores demonstraram que uma condição suficiente para a validade da hipótese de Samuelson é que o ativo negociado em mercados futuros apresentasse o processo de reversão à média. Os autores verificaram empiricamente a validade desta proposição. A commodity petróleo e as commodities agrícolas, usadas pelos autores, apresentaram fortemente as condições previstas, ou seja, reversão à média, e conseqüentemente confirmaram a hipótese de Samuelson. Assim, espera-se uma estrutura a termo para a volatilidade decrescente à medida que aumenta o prazo do vencimento dos contratos. Naturalmente todo o modelo que pretende retratar o comportamento dos preços futuros de uma commodity deve ser tal que seja capaz de reproduzir os seus fatos estilizados. Por exemplo, no caso da commodity petróleo espera-se que o modelo seja capaz de evidenciar a hipótese de Samuelson.

A eq. (34) representa a estrutura a termo da volatilidade do modelo básico. Reescrevemos esta equação abaixo:

$$\frac{1}{dt} \text{VAR}^Q \left( \frac{dF_{\tau,t}}{F_{\tau,t}} \right) = \sigma_{\chi}^2 e^{-2k_{\chi}(\tau-t)} + \sigma_{\xi}^2 + 2\rho\sigma_{\chi}\sigma_{\xi} e^{-k_{\chi}(\tau-t)}$$

Com os parâmetros estimados pelo FK pode-se descrever o perfil de volatilidades versus a maturação do contrato. A Figura 11 apresenta a estrutura a termo da volatilidade para o painel A. Os pontos marcados em vermelho são as volatilidades medidas empiricamente. Nota-se que o dado empírico segue a hipótese de Samuelson. A linha contínua mostra a volatilidade do modelo conforme a equação acima. Um círculo preto no eixo das ordenadas indica a volatilidade do contrato de maturidade zero. Isto é  $\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{1}{dt} \left( \text{VAR} \left( \frac{dF_{\tau,t}}{F_{\tau,t}} \right) \right)$ .

O mesmo procedimento foi aplicado aos parâmetros oriundos da estimação realizada pelo FP. A Figura 12 mostra este resultado para o painel A.

Estes dois gráficos mostram como as volatilidades observadas empiricamente aderem ao modelo. Pode-se notar que como o painel A envolve contratos de no máximo 17 meses, parte da curva prevista pelo modelo não contém nenhuma observação que permita comparação. O FK apresentou uma aderência um pouco melhor, principalmente no curtíssimo prazo.

O painel C contém contratos de curta, média e longa maturações. As Figuras 13 e 14 apresentam as estruturas a termo das volatilidades estimadas pelos FK e FP, respectivamente. Pode-se notar que, em ambos os casos, o ajuste foi inferior ao apresentado pelo painel A. Na subseção anterior notou-se que alguns valores do parâmetro  $s_i$  (desvio padrão do ruído das observações) eram elevados. Esta maior dificuldade do ajuste explica a menor aderência da estrutura a termo da volatilidade. Este fato é gerado pela presença de contratos de maior maturidade no painel C. Em Cortazar e Naranjo (2003) a estrutura a termo da volatilidade apresenta um gráfico similar. A inclusão de contratos de longa maturação prejudicou o ajuste do modelo aos contratos de curta maturação. De fato, o modelo básico não captura todas as nuances dos contratos de longa maturação. Em razão disso, Schwartz e Smith (2000) buscaram no modelo de três fatores melhores ajustes.

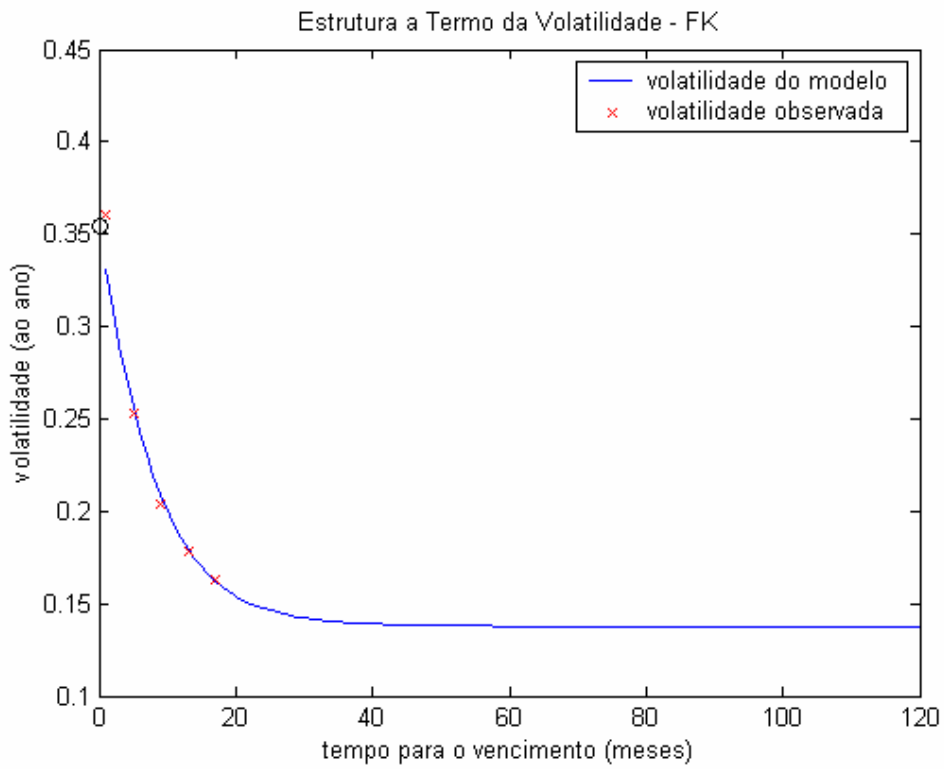


Figura 11 – Estrutura a termo da volatilidade do painel A - FK

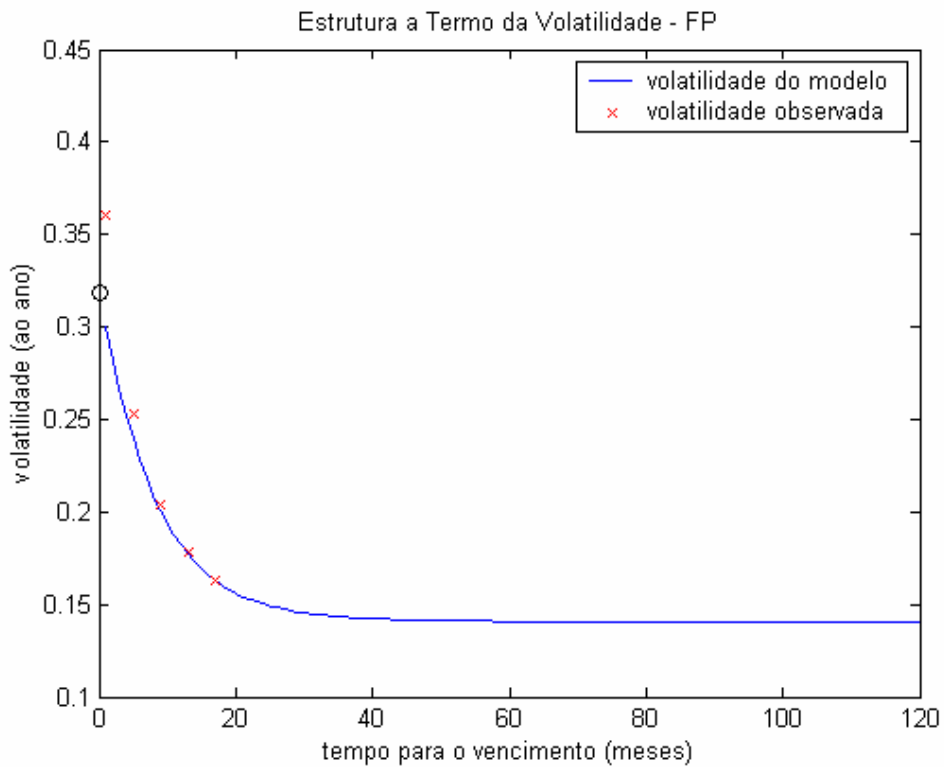


Figura 12 – Estrutura a termo da volatilidade do painel A - FP

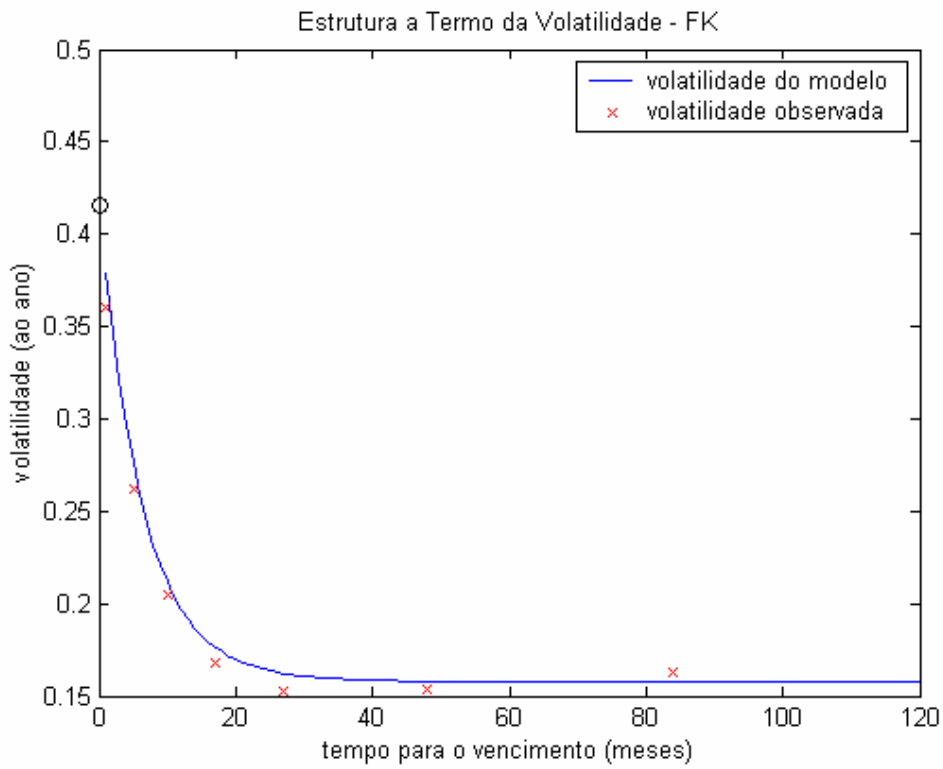


Figura 13 – Estrutura a termo da volatilidade do painel C - FK

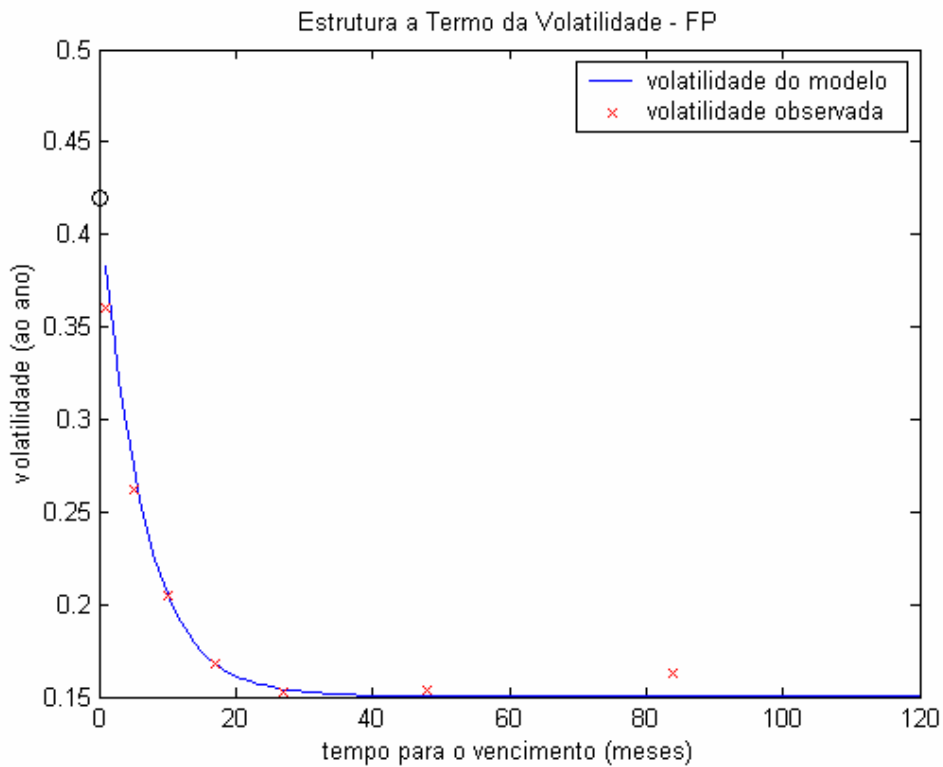


Figura 14 – Estrutura a termo da volatilidade do painel C - FP

### 7.5.5 Estrutura a termo dos preços

Em geral o desempenho dos modelos é aferido pela capacidade dos mesmos reproduzirem principalmente as estruturas a termo dos preços e das volatilidades. A estrutura a termo dos preços será mostrada em termos dos erros entre a observação empírica e a observação filtrada conforme equações (94), (95) e (96). A Tabela 18 mostra estas medidas de erros para o painel A.

Em ambos os casos os resultados são satisfatórios já que o erro é baixo. Nas duas situações nota-se que o modelo tem o pior ajuste para o primeiro contrato, F1.

Contrato	Filtro de Kalman			Filtro de Partículas		
	RMSE	MAE	MAPE	RMSE	MAE	MAPE
	US\$/bbl	US\$/bbl	%	US\$/bbl	US\$/bbl	%
F1	1,1370	0,8366	3,5766	0,4505	0,2661	1,1064
F5	0,2332	0,1666	0,7125	0,3492	0,2358	1,0301
F9	0,0217	0,0153	0,0686	0,2210	0,1421	0,6389
F13	0,0012	0,0009	0,0039	0,1609	0,0903	0,4134
F17	0,1092	0,0819	0,3745	0,2912	0,2166	1,0093
Média	0,3005	0,2203	0,9472	0,2946	0,1902	0,8396

Tabela 18 – Erros entre as variáveis filtrada e observada para o FK e o FP

As Figuras 15 e 16 ilustram os resultados para o contrato F9 com o FK e o FP, respectivamente. Em ambos os gráficos são mostradas as curvas da variável observada e da variável filtrada. Qualitativamente pode-se afirmar que no caso do contrato F9 há praticamente uma superposição das curvas. De maneira geral, pode-se dizer que o modelo básico ajusta-se bem aos preços observados.

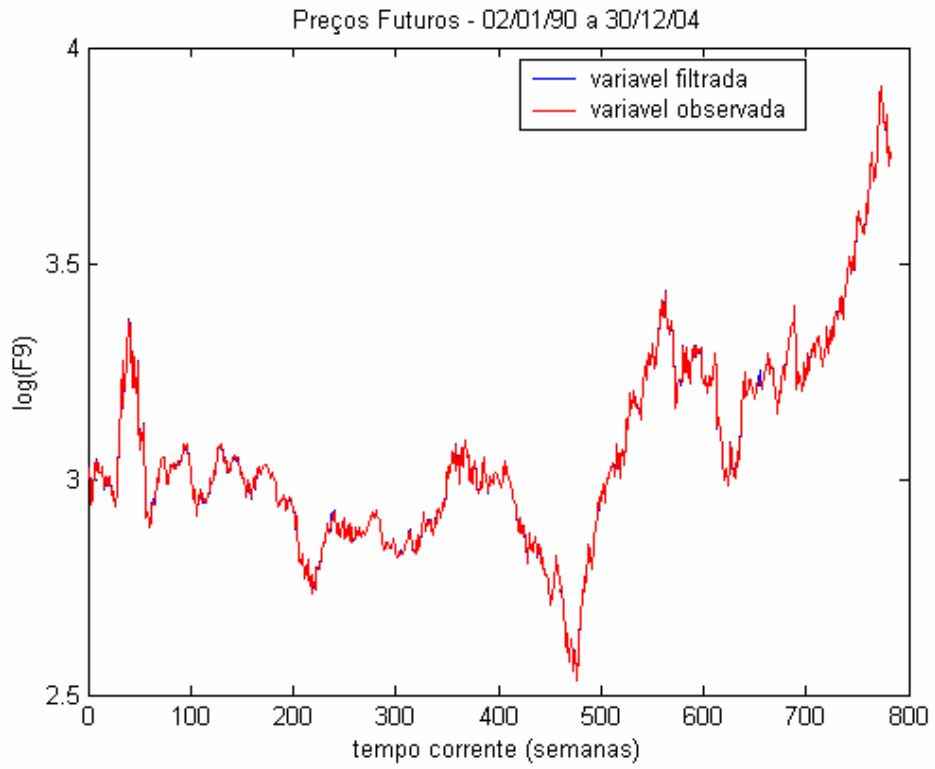


Figura 15 – Preços futuros: variáveis observada e filtrada para o F9 - FK

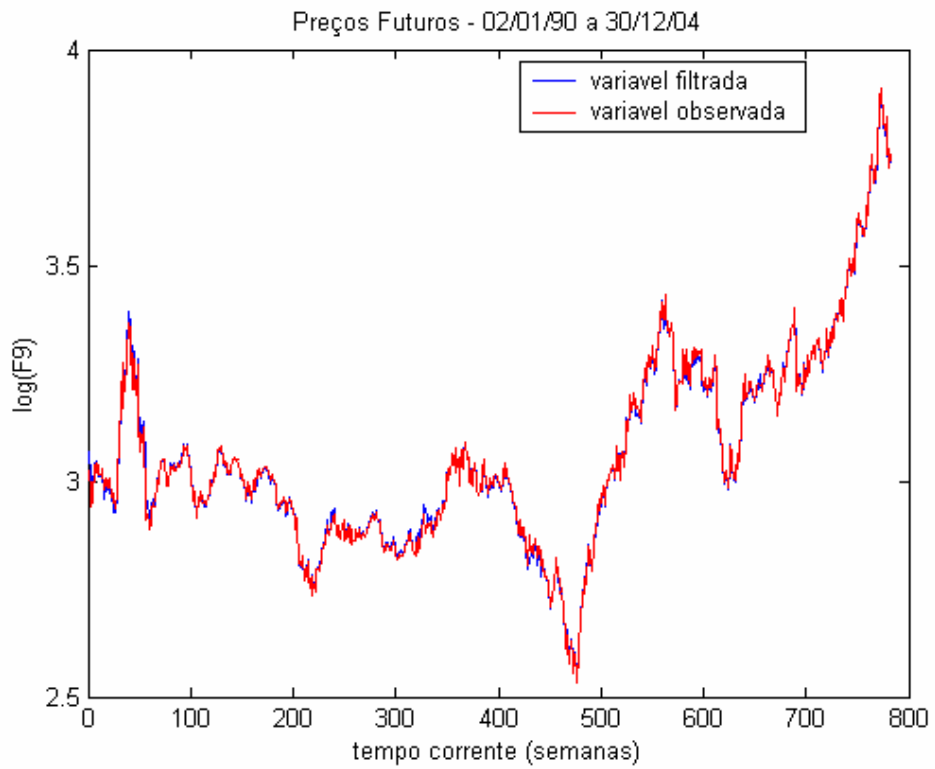


Figura 16 – Preços futuros: variáveis observada e filtrada para o F9 - FP

A Tabela 19 mostra as medidas de erro calculadas para o painel C pelos FK e FP. Nota-se novamente que a inclusão de contratos de mais longa maturação piora o ajuste do modelo, pois os erros percentuais são mais elevados que aqueles observados no painel A. Pode-se dizer, portanto, que no Modelo Básico a estrutura a termo da volatilidade e a estrutura a termo dos preços perdem eficiência no ajuste aos dados empíricos com a presença de contratos de longa maturação.

Observando os resultados reportados em Lautier (2003) para o RMSE médio, do painel de melhor ajuste, encontrar-se-á o valor de US\$ 1,05/bbl (com o uso do FK). Os resultados desta pesquisa (também usando o FK) mostram RMSE's médios de US\$ 0,30/bbl e US\$ 0,83/bbl para os painéis A e C, respectivamente. Embora a autora acima tenha utilizado o modelo de Schwartz (1997), vale ressaltar que os resultados, aqui encontrados, estão dentro da ordem de grandeza de trabalhos existentes na literatura.

Contrato	Filtro de Kalman			Filtro de Partículas		
	RMSE US\$/bbl	MAE US\$/bbl	MAPE %	RMSE US\$/bbl	MAE US\$/bbl	MAPE %
F1	1,5281	1,2270	4,4228	0,5914	0,4587	1,6139
F5	0,0010	0,0007	0,0028	0,7344	0,5877	2,1937
F10	0,3593	0,2874	1,1104	1,0075	0,8196	3,1446
F17	0,0486	0,0369	0,1555	0,7906	0,6337	2,5172
F27	0,7707	0,6148	2,5827	0,2312	0,1841	0,7902
F48	1,0418	0,6910	3,3158	0,9944	0,8202	3,5968
F84	2,0701	2,4058	9,0213	2,8822	2,4140	10,6653
Média	0,8314	0,7519	2,9445	1,0331	0,8454	3,5931

Tabela 19 – Erros entre as variáveis observada e filtrada para o FK e FP para o painel C



### 7.5.6 Previsão

Usando o Modelo Básico, considerou-se, no painel A, uma janela de estimação de 02/01/90 a 11/08/04 totalizando 763 dados. A janela de previsão abrangeu o restante do período, ou seja, de 12/08/04 a 30/12/04, totalizando 21 semanas (ou 21 períodos à frente), aproximadamente cinco meses. Ambos os filtros foram rodados considerando o período para estimação dos parâmetros como aquele especificado acima. Para o FP usou-se 200 partículas. A Tabela 20 mostra os erros RMSE, MAE e MAPE calculados para a janela de previsão fora da amostra.

Contrato	Filtro de Kalman			Filtro de Partículas		
	RMSE	MAE	MAPE	RMSE	MAE	MAPE
	US\$/bbl	US\$/bbl	%	US\$/bbl	US\$/bbl	%
F1	5,3026	4,1471	8,3080	5,6026	4,3885	8,7891
F5	5,6358	5,5824	9,5228	5,8274	4,7337	9,8344
F9	5,1285	4,2356	9,2032	5,2165	4,2978	9,3338
F13	4,5992	3,8278	8,6201	4,6043	3,8229	8,6055
F17	4,1312	3,4533	7,9998	4,0702	3,3920	7,8555
Média	4,9595	4,0492	8,7308	5,0642	4,1270	8,8837

Tabela 20 – Erros de previsão fora da amostra para o FK e o FP de 12/08/04 a 30/12/04

Contrato	Filtro de Kalman			Filtro de Partículas		
	RMSE	MAE	MAPE	RMSE	MAE	MAPE
	US\$/bbl	US\$/bbl	%	US\$/bbl	US\$/bbl	%
F1	4,3903	3,6749	14,8666	3,7294	2,9220	12,0405
F5	3,2915	2,5236	10,5666	2,9012	2,0902	8,9113
F9	2,9289	2,2737	9,7076	2,7878	2,0369	8,8104
F13	2,9039	2,4288	10,4690	3,0032	2,4650	10,6741
F17	3,0888	2,7596	12,0382	3,4378	3,0832	13,4543
Média	3,3207	2,7321	11,5296	3,1719	2,5195	10,7781

Tabela 21 – Erros de previsão fora da amostra para o FK e o FP de 21/09/00 a 12/12/01

Foi realizada outra análise de previsão em que a nova janela tomou os dados do painel A de 2/1/90 a 20/09/00, com 560 observações. A janela de previsão fora da amostra foi de 21/09/00 a 12/12/01, 64 passos à frente (64 semanas ou um ano e três meses). Os resultados estão mostrados na Tabela 21. A Figura 17 mostra a previsão e os dados reais observados para o contrato F1.

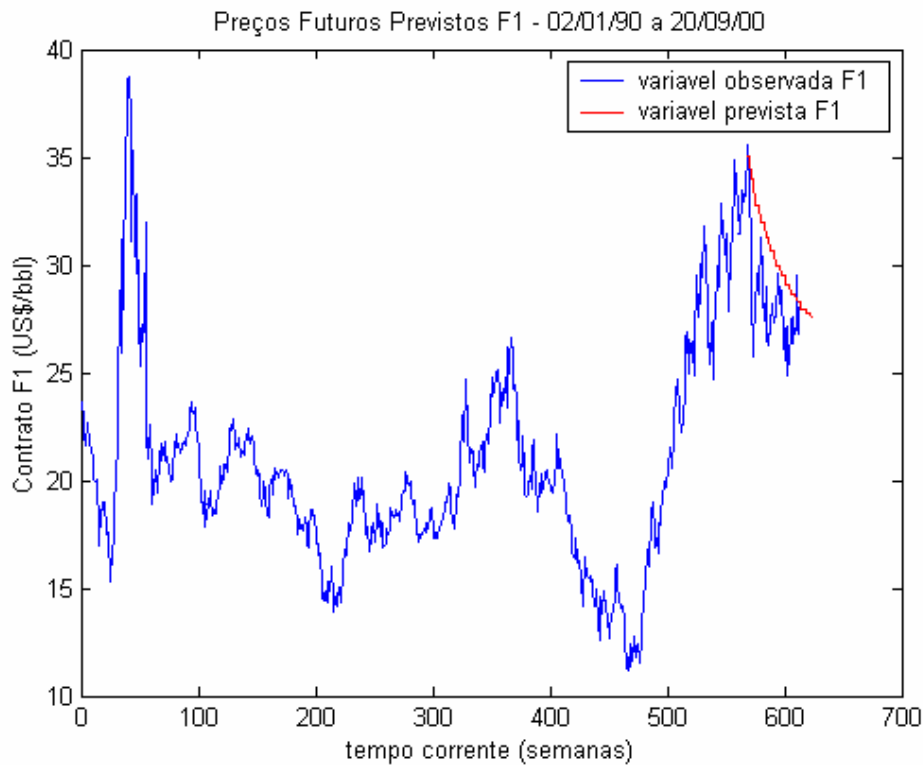


Figura 17 – Previsão do contrato F1 de 21/09/00 a 12/12/01

## 7.6 Resultados do Modelo Primeira Extensão

O Modelo Primeira Extensão é dado pela eq. (36) aqui reescrita para um contrato:

$$y_{\tau,t} = \exp(-k_{\chi}(\tau-t)) \chi_t + \exp(-k_{\xi}(\tau-t)) \xi_t + A(\tau-t) + u_t$$

onde:

$$A(\tau-t) = \left(1 - e^{-k_{\xi}(\tau-t)}\right) \left(\bar{\xi} - \frac{\lambda_{\xi}}{k_{\xi}}\right) - \frac{\lambda_{\chi}}{k_{\chi}} \left(1 - e^{-k_{\chi}(\tau-t)}\right) + \frac{\sigma_{\chi}^2}{4k_{\chi}} \left(1 - e^{-2k_{\chi}(\tau-t)}\right) + \frac{\sigma_{\xi}^2}{4k_{\xi}} \left(1 - e^{-2k_{\xi}(\tau-t)}\right) + \frac{\rho\sigma_{\chi}\sigma_{\xi}}{k_{\chi} + k_{\xi}} \left(1 - e^{-(k_{\chi}+k_{\xi})(\tau-t)}\right)$$

$y_{\tau,t} = \ln(F_{\tau,t})$  e  $u_t \sim N(0,s)$  onde  $s$  é o desvio padrão do ruído das observações.

O vetor de parâmetros a ser estimado é  $\Theta = (k_\chi, k_\xi, \bar{\xi}, \lambda_\xi, \lambda_\chi, \sigma_\chi, \sigma_\xi, \rho, s_1, \dots, s_n)$  onde  $n$  é o número de contatos existentes no painel e  $s_i$  é o desvio padrão do ruído das observações do  $i$ -ésimo contrato.

### 7.6.1

#### Filtro de Kalman

A Tabela 22 mostra os resultados da estimação com o FK para o painel A. O valor estimado para o coeficiente de reversão do preço de equilíbrio ( $k_\xi = 0,2377$  ao ano) indica que este processo possui uma meia-vida elevada<sup>3</sup>. Este é um indicador já esperado pois o preço de equilíbrio de longo prazo deve alterar vagarosamente. Os preços de risco de mercado estão elevados. Isto significa que o modelo pode não estar especificado adequadamente ou a base de dados usada (painel) apresentar-se incompatível com o modelo. A média de longo prazo do preço de equilíbrio aponta para um valor de US\$ 32,14/bbl ( $=\exp(\bar{\xi})$ ), que é bastante elevado se comparado com a média de preços do painel A. Os desvios padrões dos ruídos das observações apresentam valores compatíveis com os já encontrados nesta pesquisa. Vale lembrar que o primeiro contrato apresenta o maior erro padrão dentre todos. Este fato, como dito anteriormente, também foi encontrado por Schwartz e Smith (2000), no contexto do Modelo Básico.

---

<sup>3</sup> A meia-vida é o tempo requerido para a variável atingir a metade do seu valor e é definida por: meia-vida =  $-\frac{\ln(0,5)}{k}$ , onde  $k$  é o coeficiente que mede a velocidade de reversão à média.

PAINEL A		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$k_{\chi}$	1,7530	0,0210
$k_{\xi}$	0,2377	0,0037
$\bar{\xi}$	3,4700	0,2668
$\lambda_{\xi}$	0,3118	0,0659
$\lambda_{\chi}$	0,7942	0,0185
$\sigma_{\chi}$	0,2455	0,0053
$\sigma_{\xi}$	0,2267	0,0056
$\rho$	0,1300	0,0322
$s_1$	0,0414	0,0001
$s_2$	0,0054	0,0000
$s_3$	0,0039	0,0000
$s_4$	0,0001	0,0000
$s_5$	0,0075	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 15256$		

Tabela 22 – Resultados da estimação com o painel A pelo FK

A Tabela 23 mostra o resultado deste modelo com o uso do painel C. O painel C contém contratos de curto médio e longo prazos. Da mesma maneira que no modelo básico, a inclusão de contratos de longa maturação piora o ajuste no modelo. Neste painel pode-se notar que os preços de risco de mercado estão elevados. Observa-se, como no caso anterior, que o coeficiente de reversão é baixo indicando uma meia-vida elevada. A média de longo prazo do preço de equilíbrio aponta para um valor de US\$ 22/bbl. Este valor mais compatível com a série histórica de longo prazo. Os parâmetros dos desvios dos ruídos das observações mostram que o desvio do primeiro contrato é elevado. Entretanto, os últimos contratos mostram os desvios mais elevados indicando a dificuldade do modelo em ajustar-se aos contratos de longo prazo.

PAINEL C		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$k_{\chi}$	2,0439	0,1016
$k_{\xi}$	0,1638	0,0064
$\bar{\xi}$	3,0910	0,4735
$\lambda_{\xi}$	0,2132	0,0800
$\lambda_{\chi}$	1,1377	0,0972
$\sigma_{\chi}$	0,3772	0,0193
$\sigma_{\xi}$	0,2107	0,0094
$\rho$	0,3949	0,0908
$s_1$	0,0540	0,0009
$s_2$	0,0342	0,0005
$s_3$	0,0152	0,0001
$s_4$	0,0004	0,0000
$s_5$	0,2375	0,0159
$s_6$	0,0625	0,0011
$s_7$	0,1270	0,0056
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 10135$		

Tabela 23 – Resultados da estimação com o painel C pelo FK

O painel E é aquele que contém toda a série histórica de preços desde a criação dos mercados futuros de petróleo. Por esta razão a análise do modelo Primeira Extensão, que requer a maior série histórica, deve ser feita com este painel. Em contra-partida este painel é composto pelos contratos de mais curta maturação. A Tabela 24 apresenta os resultados da estimação do painel E com o FK. O preço de equilíbrio de longo prazo é coerente com a média dos dados do painel A ( $\bar{\xi} = \text{US\$}22,55/\text{bbl}$ ). Nota-se que o preço de risco de mercado apresenta-se menor se comparado aos valores dos painéis A e C, porém pouco superior aos valores usuais. Observa-se que o coeficiente de reversão de curto prazo é elevado e o de longo prazo é baixo. Estes resultados estão coerentes com os painéis A e C.

PAINEL E		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$k_{\chi}$	2,0784	0,0317
$k_{\xi}$	0,1055	0,0108
$\bar{\xi}$	3,1158	0,3989
$\lambda_{\xi}$	0,1204	0,0396
$\lambda_{\chi}$	0,1351	0,0434
$\sigma_{\chi}$	0,3408	0,0058
$\sigma_{\xi}$	0,1991	0,0034
$\rho$	0,3862	0,0238
$s_1$	0,0319	0,0001
$s_2$	0,0029	0,0000
$s_3$	0,0037	0,0000
$s_4$	0,0008	0,0000
$s_5$	0,0028	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 34512$		

Tabela 24 – Resultados da estimação com o painel E pelo FK

### 7.6.2

#### Filtro de partículas

A Tabela 25 mostra os resultados da estimação com o FP para o painel A. Os resultados estão coerentes com a estimação feita pelo FK. Deve-se ressaltar, no entanto, que dois dos cinco desvios padrões apresentaram-se elevados.

A Tabela 26 mostra os resultados da estimação com o FP para o painel C. Os resultados acima quando comparados aos do FK mostram-se coerentes. Não obstante, o preço de risco de mercado, da variável de curto prazo, e o coeficiente de correlação são menores. Ainda cabe ressaltar que os desvios dos ruídos das observações também apresentam-se elevados.

A Tabela 27 mostra os resultados da estimação usando o painel E com o FP. Mesmo sendo o maior painel em termos de dados, pode-se observar que os problemas já observados neste modelo se mantêm.

PAINEL A		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$k_\chi$	1,5853	0,0176
$k_\xi$	0,1517	0,0059
$\bar{\xi}$	3,4119	0,1658
$\lambda_\xi$	0,3002	0,0256
$\lambda_\chi$	0,4582	0,0311
$\sigma_\chi$	0,2360	0,0047
$\sigma_\xi$	0,2164	0,0053
$\rho$	0,1307	0,0312
$s_1$	0,0193	0,0001
$s_2$	0,0411	0,0000
$s_3$	0,0189	0,0000
$s_4$	0,0444	0,0000
$s_5$	0,0740	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 16571$		

Tabela 25 – Resultado da estimação com o painel A pelo FP

Reescrevemos abaixo a eq. (37), que define a estrutura a termo da volatilidade para este modelo:

$$\frac{1}{dt} \text{VAR}^Q \left( \frac{dF_{\tau,t}}{F_{\tau,t}} \right) = \sigma_\chi^2 e^{-2k_\chi(\tau-t)} + \sigma_\xi^2 e^{-2k_\xi(\tau-t)} + 2\rho\sigma_\chi\sigma_\xi e^{-(k_\chi+k_\xi)(\tau-t)}$$

Pode-se observar que quando  $(\tau-t)$  tende para valores grandes, a volatilidade é assintótica ao eixo das abscissas. Portanto, não será surpresa se este modelo apresentar dificuldades em acomodar contratos de longa maturação. De fato, as volatilidades observadas para contratos de mais longa maturação são da ordem de 15% ao ano, conseqüentemente a estrutura a termo da volatilidade deste modelo não consegue comportar tais contratos, pois tende a zero com o decorrer do tempo.

PAINEL C		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$k_{\chi}$	2,5399	0,0155
$k_{\xi}$	0,2781	0,0022
$\bar{\xi}$	3,3628	0,2176
$\lambda_{\xi}$	0,101	0,0155
$\lambda_{\chi}$	0,3082	0,0142
$\sigma_{\chi}$	0,3630	0,0047
$\sigma_{\xi}$	0,2058	0,0053
$\rho$	0,2464	0,0488
$s_1$	0,0570	0,0001
$s_2$	0,0774	0,0000
$s_3$	0,0492	0,0000
$s_4$	0,0681	0,0000
$s_5$	0,0316	0,0000
$s_6$	0,0879	0,0001
$s_7$	0,0414	0,0002
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 11405$		

Tabela 26 – Resultados da estimação com o painel C pelo FP

Notadamente o Modelo Primeira Extensão tem um desempenho fraco diante do conjunto de dados disponíveis para analisá-lo. Este modelo considera a variável de longo prazo,  $\xi_t$ , como um processo de reversão à média. Isto requer longas séries históricas abrangendo longo horizonte de tempo. Em Dixit e Pindyck (1994) os autores citam análises feitas para os preços do cobre e petróleo. Embora os testes realizados não estejam exatamente no contexto desta pesquisa, vale à pena ressaltar suas conclusões. Está mencionado, que testes da raiz unitária em amostras com 120 anos de dados, rejeitam facilmente a hipótese do passeio aleatório, para os preços destas commodities, em favor do processo de reversão. Embora tal prazo esteja fora do escopo aqui apresentado, há evidências de que não é possível a captura da reversão para os preços de equilíbrio somente com 20 anos de dados.



PAINEL E		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$k_\chi$	1,2588	0,0317
$k_\xi$	0,0566	0,0108
$\bar{\xi}$	3,0889	0,3989
$\lambda_\xi$	0,3021	0,0396
$\lambda_\chi$	0,2823	0,0434
$\sigma_\chi$	0,2789	0,0058
$\sigma_\xi$	0,2098	0,0034
$\rho$	0,1418	0,0238
$s_1$	0,0100	0,0001
$s_2$	0,0400	0,0000
$s_3$	0,0569	0,0000
$s_4$	0,0112	0,0000
$s_5$	0,0808	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 35233$		

Tabela 27 – Resultados da estimação com o painel E pelo FP

## 7.7

### Resultados do Modelo Segunda Extensão

Esta seção apresenta os modelos da segunda extensão, ou seja, modelos com saltos. Ela foi dividida em duas subseções. A primeira considera modelos com distribuição normal para o tamanho dos saltos. A segunda considera modelos com distribuição exponencial para o tamanho dos saltos. Somente será usado o FP já que a distribuição condicional de uma das variáveis de estado não é Gaussiana.

#### 7.7.1

##### Modelos com distribuição normal para os saltos

O Modelo Segunda Extensão é descrito pela eq. (39) que está reescrita abaixo:

$$y_{\tau,t} = \exp(-k_\chi(\tau - t)) \chi_t + \xi_t + A(\tau - t) + B(\tau - t) + u_t$$

onde:

$$\begin{aligned}
A(\tau - t) &= \mu_{\xi}^*(\tau - t) - \frac{\lambda_{\chi}}{k_{\chi}} (1 - \exp(-k_{\chi}(\tau - t))) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_{\chi}^2}{2k_{\chi}} (1 - \exp(-2k_{\chi}(\tau - t))) + \sigma_{\xi}^2(\tau - t) + 2 \frac{\rho \sigma_{\chi} \sigma_{\xi}}{k_{\chi}} (1 - \exp(-k_{\chi}(\tau - t))) \right] \\
B(\tau - t) &= \varpi \int_t^{\tau} \left[ \exp(\mu_v^* e^{-k_{\chi}(\tau-z)} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 e^{-2k_{\chi}(\tau-z)}) - 1 \right] dz
\end{aligned}$$

$y_{\tau,t} = \ln(F_{\tau,t})$ ,  $u_t \sim N(0, s)$  onde  $s$  é o desvio do ruído das observações e  $z$  é a variável de integração.

O vetor de parâmetros a ser estimado é  $\Theta = (\mu_{\xi}^*, k_{\chi}, \lambda_{\chi}, \sigma_{\chi}, \sigma_{\xi}, \rho, \varpi, \mu_v^*, \sigma_v, s_1, s_2, \dots, s_n)$ , onde  $n$  é o número de contratos do painel e  $s_i$  é desvio padrão do ruído das observações do  $i$ -ésimo contrato.

Este modelo é dito não Gaussiano devido à inclusão de saltos, ou processo de Poisson, na variável de estado  $\chi_t$  (variações de curto prazo). No longo prazo (preços de equilíbrio) a variável de estado  $\xi_t$  é um processo geométrico Browniano. A consequência dos saltos, conforme a derivação do modelo no capítulo 3, é a presença do termo  $B(\tau - t)$  que não existia no Modelo Básico. O FK clássico não é recomendável a modelos não Gaussianos. Em virtude disso, somente será usado o FP na estimação deste modelo. A Tabela 28 apresenta os resultados da estimação do painel A. O resultado deste painel pode ser comparado com o do Modelo Básico que não apresenta saltos (Tabela 13). No Modelo Básico o choque nos preços estava sendo explicado, principalmente, pela força da reversão à média (parâmetro  $k_{\chi}$ ) e pela volatilidade de curto prazo (parâmetro  $\sigma_{\chi}$ ). A inclusão dos saltos no modelo coloca em ação outro parâmetro capaz de explicar os choques nos preços. Se comparado ao modelo básico, nota-se que a volatilidade  $\sigma_{\chi}$  tem o seu valor reduzido de 26% ao ano para 19% ao ano. Das (1998) analisa a inclusão de saltos em um processo puramente Gaussiano de evolução da taxa de juros. O autor verifica uma queda substancial na volatilidade, ou seja, os saltos respondem em grande parte pela volatilidade do processo de difusão.

A Tabela 29 apresenta os resultados da estimação usando o painel C. Pode-se constatar o mesmo efeito descrito anteriormente. A comparação deste resultado com o do modelo sem saltos (Modelo Básico - Tabela 15) permite verificar o

efeito que a inclusão dos saltos traz para o modelo. Estes efeitos estão aqui refletidos, principalmente, nas volatilidades de curto prazo ( $\sigma_\chi$ ) e no parâmetro de reversão à média ( $k_\chi$ ). Os dois parâmetros tiveram reduções.

PAINEL A		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_\xi^*$	0,0100	0,0001
$k_\chi$	1,1629	0,0000
$\lambda_\chi$	0,0098	0,0003
$\sigma_\chi$	0,1920	0,0013
$\sigma_\xi$	0,1479	0,0005
$\rho$	0,1763	0,0088
$\varpi$	0,4437	0,0006
$\mu_v^*$	0,4024	0,0006
$\sigma_v$	0,2222	0,0028
$s_1$	0,0104	0,0000
$s_2$	0,0094	0,0000
$s_3$	0,0108	0,0000
$s_4$	0,0098	0,0000
$s_5$	0,0101	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 27191$		

Tabela 28 – Resultados da estimação com o painel A

A presença dos saltos absorve, em parte, o que estes parâmetros representavam no Modelo Básico. Isto é, grande parte dos choques existentes na série de preços estava traduzido anteriormente em termos de  $\sigma_\chi$  e  $k_\chi$ . Agora os choques são também explicados pelos saltos.

A redução do coeficiente de reversão, que foi constatada no painel C, é sugestiva de uma situação particular. Das (1998) sugere que quando há redução no coeficiente de reversão à média, há evidência de que a assimetria da distribuição do tamanho dos saltos depende do nível do preço. Isto significa que há uma maior chance de ocorrer um salto positivo quando o preço está baixo, e vice-versa. Embora não esteja implementado nesta pesquisa, este fenômeno pode ser

modelado fazendo com que a média da distribuição dos saltos seja dependente do preço.

PAINEL C		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0101	0,0000
$k_{\chi}$	1,0155	0,0000
$\lambda_{\chi}$	0,0100	0,0000
$\sigma_{\chi}$	0,1775	0,0000
$\sigma_{\xi}$	0,1423	0,0000
$\rho$	0,1800	0,0002
$\varpi$	0,3222	0,0000
$\mu_v^*$	0,3714	0,0000
$\sigma_v$	0,1001	0,0001
$s_1$	0,0103	0,0000
$s_2$	0,0123	0,0000
$s_3$	0,0096	0,0000
$s_4$	0,0100	0,0000
$s_5$	0,0477	0,0000
$s_6$	0,0304	0,0000
$s_7$	0,0145	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 11859$		

Tabela 29 – Resultado da estimação com o painel C

Embora os painéis A e C sejam distintos em termos dos períodos de observação, deve-se observar que as médias do tamanho dos saltos ( $\mu_v^*$ ), as variâncias ( $\sigma_v$ ) e as intensidades  $\varpi$  são maiores no painel A. Este fato é decorrente de que o painel A contém contratos de mais curta duração e, portanto, mais suscetível a choques.

As Tabelas 30 e 31 apresentam as estruturas a termo dos preços para os painéis A e C, respectivamente. Comparando-se os resultados obtidos nestas tabelas com aqueles do Modelo Básico (sem saltos) nas Tabelas 18 e 19, que também foram estimados usando o FP, pode-se dizer que para o painel A os

modelos têm ajustes muito próximos. Para o painel C nitidamente o modelo com saltos mostrou melhores resultados.

Contrato	Filtro de Partículas		
	RMSE	MAE	MAPE
	US\$/bbl	US\$/bbl	%
F1	0,5874	0,3341	1,3594
F5	0,4027	0,2620	1,1304
F9	0,3058	0,1924	0,8522
F13	0,2581	0,1053	0,4843
F17	0,3431	0,2087	0,9568
Média	0,3794	0,2205	0,9566

Tabela 30 – Estrutura a termo dos preços resultante da estimação com o painel A

Contrato	Filtro de Partículas		
	RMSE	MAE	MAPE
	US\$/bbl	US\$/bbl	%
F1	0,9664	0,7385	2,7503
F5	0,4464	0,3310	1,2870
F10	0,7345	0,5850	2,2844
F17	0,7926	0,6247	2,5115
F27	0,5934	0,4541	1,9110
F48	0,4995	0,3658	1,6909
F84	1,9632	1,6052	7,1199
Média	0,8566	0,6720	2,7936

Tabela 31 – Estrutura a termo dos preços resultante da estimação com o painel C

O algoritmo de alisamento pode ser usado com o filtro de partículas. Veja em Doucet, de Freitas e Gordon (2001), capítulo 9, detalhes da aplicação do alisamento ao filtro de partículas. A Tabela 32 mostra este resultado para o painel A.

Contrato	Filtro de Partículas		
	RMSE	MAE	MAPE
	US\$/bbl	US\$/bbl	%
F1	0,5322	0,3069	1,2878
F5	0,3585	0,2395	1,0458
F9	0,2589	0,1675	0,7525
F13	0,2131	0,0895	0,4168
F17	0,3150	0,1896	0,8823
Média	0,3355	0,1986	0,8770

Tabela 32 – Estrutura a termo dos preços para o algoritmo de alisamento do painel A

### 7.7.2

#### Modelos com distribuição exponencial para os saltos

O modelo anterior considera que a distribuição do tamanho dos saltos é normal. Modificando esta premissa e considerando a distribuição do tamanho dos saltos uma exponencial, o resultado é o modelo descrito na eq. (41). Reescrevemos a equação com um salto para cima e um para baixo:

$$y_{\tau,t} = \exp(-k_{\chi}(\tau - t)) \chi_t + \xi_t + A(\tau - t) + B(\tau - t) + u_t$$

onde:

$$A(\tau - t) = \mu_{\xi}^* (\tau - t) - \frac{\lambda_{\chi}}{k_{\chi}} (1 - \exp(-k_{\chi}(\tau - t)))$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_{\chi}^2}{2k_{\chi}} (1 - \exp(-2k_{\chi}(\tau - t))) + \sigma_{\xi}^2 (\tau - t) + 2 \frac{\rho \sigma_{\chi} \sigma_{\xi}}{k_{\chi}} (1 - \exp(-k_{\chi}(\tau - t))) \right]$$

$$B(\tau - t) = \frac{\varpi_u}{k_{\chi}} \ln \left( \frac{1 - \eta_u^* e^{-k_{\chi}(\tau - t)}}{1 - \eta_u^*} \right) - \frac{\varpi_d}{k_{\chi}} \ln \left( \frac{1 - \eta_d^* e^{-k_{\chi}(\tau - t)}}{1 - \eta_d^*} \right)$$

$y_{\tau,t} = \ln(F_{\tau,t})$  e  $u_t \sim N(0, s)$  onde  $s$  é o desvio do ruído das observações.

O vetor de parâmetros a ser estimado é dado por  $\Theta = (\mu_{\xi}^*, k_{\chi}, \lambda_{\chi}, \sigma_{\chi}, \sigma_{\xi}, \rho, \varpi_u, \varpi_d, \eta_u^*, \eta_d^*, s_1, s_2, \dots, s_n)$ , onde  $n$  é o número de contratos do painel e  $s_i$  é desvio padrão do ruído das observações do  $i$ -ésimo contrato.

A Tabela 33 apresenta o resultado da estimação com o painel A. Comparando os resultados com aqueles do modelo que possui distribuição normal para o tamanho dos saltos (Tabela 28), observa-se que os resultados são coerentes. Comparado ao modelo sem saltos (Tabela 13), verifica-se novamente que a volatilidade de curto prazo é bem inferior em decorrência da modelagem com saltos.

A Tabela 34 mostra os resultados da estimação para o painel C. Os resultados comparados com aqueles do modelo com distribuição normal para o tamanho dos saltos (Tabela 29), mostram-se consistentes. Entretanto, as volatilidades, aqui estimadas, são superiores. O parâmetro  $s_4$  é superior, porém  $s_5$  e  $s_6$  são inferiores.

PAINEL A		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_{\xi}^*$	0,0435	0,0000
$k_{\chi}$	1,0388	0,0000
$\lambda_{\chi}$	0,0373	0,0001
$\sigma_{\chi}$	0,1725	0,0001
$\sigma_{\xi}$	0,1220	0,0003
$\rho$	0,1366	0,0071
$\varpi_u$	0,3895	0,0006
$\varpi_d$	0,4295	0,0005
$\eta_u^*$	0,2129	0,0004
$\eta_d^*$	0,2858	0,0000
$s_1$	0,0103	0,0000
$s_2$	0,0117	0,0000
$s_3$	0,0100	0,0000
$s_4$	0,0100	0,0000
$s_5$	0,0015	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 24208$		

Tabela 33 – Resultados da estimação com o painel A

Vale ressaltar que a commodity energia elétrica possui um tipo de salto característico, o *spike*. Para modelar este salto basta fazer  $\eta_u^* = -\eta_d^*$  e  $\varpi_u = \varpi_d$ . Pode-se intuitivamente pensar que no longo prazo os efeitos destes saltos cancelam-se. Entretanto, com esta especificação, o processo com saltos define um preço futuro bem superior que àquele sem os saltos (veja Deng (1998)).

As estruturas a termo para os preços do modelo com distribuição exponencial para o tamanho dos saltos estão mostradas nas Tabelas 35 e 36 para os casos dos painéis A e C, respectivamente.

Comparando os resultados acima com aqueles da estrutura a termo dos preços do modelo com distribuição normal para os saltos (Tabela 30), constata-se que a distribuição normal representou melhor o dado empírico para o painel A. O mesmo pode ser dito para o painel C comparando as Tabelas 36 e 31.

PAINEL C		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$\mu_\xi^*$	0,0107	0,0000
$k_\chi$	1,0268	0,0000
$\lambda_\chi$	0,0836	0,0000
$\sigma_\chi$	0,2561	0,0000
$\sigma_\xi$	0,1759	0,0000
$\rho$	0,1633	0,0002
$\varpi_u$	0,5180	0,0000
$\varpi_d$	0,3265	0,0000
$\eta_u^*$	0,6198	0,0000
$\eta_d^*$	0,6657	0,0000
$s_1$	0,0098	0,0000
$s_2$	0,0097	0,0000
$s_3$	0,0101	0,0000
$s_4$	0,0845	0,0000
$s_5$	0,0110	0,0000
$s_6$	0,0192	0,0000
$s_7$	0,0202	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 11255$		

Tabela 34 – Resultados da estimação com o painel C



Contrato	Filtro de Partículas		
	RMSE	MAE	MAPE
	US\$/bbl	US\$/bbl	%
F1	0,9740	0,5687	2,2946
F5	0,6021	0,3953	1,6762
F9	0,4319	0,3177	1,3762
F13	0,2552	0,1815	0,7919
F17	0,1214	0,0362	0,1668
Média	0,4769	0,2999	1,2611

Tabela 35 – Estrutura a termo dos preços resultante da estimação com o painel A

Contrato	Filtro de Partículas		
	RMSE	MAE	MAPE
	US\$/bbl	US\$/bbl	%
F1	0,7320	0,5632	2,0829
F5	0,4018	0,3062	1,1825
F10	0,7041	0,5522	2,1598
F17	0,7652	0,5980	2,3965
F27	0,5184	0,4178	1,7574
F48	0,5075	0,3963	1,8054
F84	2,4655	2,1043	9,3476
Média	0,8706	0,7054	2,9617

Tabela 36 – Estrutura a termo dos preços resultante da estimação com o painel C

Ainda comparando os resultados acima com aqueles da estrutura a termo dos preços do modelo sem saltos (Tabela 19), nota-se que para o painel C, o modelo com saltos (com distribuição exponencial) apresentou-se mais ajustado aos dados empíricos, a exemplo do que foi notado para os saltos com distribuição normal.

## 7.8 Resultados do Modelo Terceira Extensão

O Modelo Terceira Extensão é idêntico ao modelo Primeira Extensão porém acrescido de saltos, (processo de Poisson) na variável de curto prazo,  $\chi_t$ . O modelo está descrito na eq. (43) que está reescrita abaixo:

$$y_{\tau,t} = \exp(-k_\chi(\tau-t)) \chi_t + \exp(-k_\xi(\tau-t)) \xi_t + A(\tau-t) + B(\tau-t) + u_t$$

onde:

$$A(\tau-t) = \left(1 - e^{-k_\xi(\tau-t)}\right) \left(\bar{\xi} - \frac{\lambda_\xi}{k_\xi}\right) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi} \left(1 - e^{-k_\chi(\tau-t)}\right) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi} \left(1 - e^{-2k_\chi(\tau-t)}\right) + \frac{\sigma_\xi^2}{4k_\xi} \left(1 - e^{-2k_\xi(\tau-t)}\right) + \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi + k_\xi} \left(1 - e^{-(k_\chi+k_\xi)(\tau-t)}\right)$$

$$B(\tau-t) = \varpi \int_t^\tau \left[ \exp(\mu_v^* e^{-k_\chi(\tau-z)} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 e^{-2k_\xi(\tau-z)}) - 1 \right] dz$$

$y_{\tau,t} = \ln(F_{\tau,t})$ ,  $u_t \sim N(0, s)$  onde  $s$  é o desvio do ruído das observações e  $z$  é a variável de integração.

O vetor de parâmetros a ser estimado é dado por  $\Theta = (k_\chi, k_\xi, \bar{\xi}, \lambda_\xi, \lambda_\chi, \sigma_\chi, \sigma_\xi, \rho, \varpi, \mu_v^*, \sigma_v, s_1, \dots, s_n)$ , onde  $n$  é número de contratos e  $s_i$  é o desvio padrão do ruído das observações do  $i$ -ésimo contrato.

Este modelo também é não Gaussiano pois há a presença do processo de Poisson na descrição do processo estocástico da variável  $\chi_t$ . O modelo será estimado com o uso do FP. As Tabelas 37 e 38 apresentam os resultados da estimação dos parâmetros com os painéis A e E, respectivamente.

Por ocasião da estimação do Modelo Primeira Extensão, observou-se a dificuldade de aderência do modelo à estrutura a termo da volatilidade. Ao mesmo tempo, observou-se a inconsistência do parâmetro do preço de risco de mercado com valores usualmente esperados. Este modelo usa também, para os preços de equilíbrio, um processo de reversão à média. Agora o preço de equilíbrio de longo prazo ( $\bar{\xi}$ ) está anormalmente baixo.

Como visto anteriormente, os modelos em que o preço de equilíbrio é descrito por um processo de reversão à média, requerem longas séries históricas onde seja possível observar o fenômeno de reversão para a variável de longo

prazo. Nota-se que o valor do coeficiente de reversão à média dos preços de equilíbrio é baixo, indicando uma meia-vida longa.

PAINEL A		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$k_{\chi}$	1,800	0,0000
$k_{\xi}$	0,2886	0,0000
$\bar{\xi}$	2,5545	0,0000
$\lambda_{\xi}$	-0,0959	0,0000
$\lambda_{\chi}$	0,1569	0,0001
$\sigma_{\chi}$	0,3013	0,0039
$\sigma_{\xi}$	0,1072	0,0000
$\rho$	0,2939	0,0050
$\varpi$	0,2395	0,0002
$\mu_v^*$	0,8622	0,0017
$\sigma_v$	0,3676	0,0156
$s_1$	0,0010	0,0000
$s_2$	0,0100	0,0000
$s_3$	0,0010	0,0000
$s_4$	0,0199	0,0000
$s_5$	0,0200	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 26686$		

Tabela 37 – Resultados da estimação com o painel A

Tal qual o Modelo Primeira Extensão, os resultados aqui obtidos indicam um fraco desempenho, devendo ser preterido para representar os preços do petróleo.

Para todos os modelos apresentados podem ser implementadas as previsões dos preços futuros tal qual foi realizado no Modelo Básico, na seção 7.5.6.

PAINEL E		
Parâmetro	Valor	Erro Padrão
$k_\chi$	1,6158	0,0000
$k_\xi$	0,0466	0,0000
$\bar{\xi}$	2,1813	0,0062
$\lambda_\xi$	-0,0344	0,0000
$\lambda_\chi$	0,2674	0,0079
$\sigma_\chi$	0,2600	0,0013
$\sigma_\xi$	0,2445	0,0060
$\rho$	0,2374	0,0707
$\varpi$	0,4718	0,0025
$\mu_v^*$	0,7719	0,0184
$\sigma_v$	0,0607	0,01444
$s_1$	0,0500	0,0000
$s_2$	0,0496	0,0000
$s_3$	0,0500	0,0000
$s_4$	0,0498	0,0000
$s_5$	0,0501	0,0000
Verossimilhança: $\ln L(\Theta) = 26233$		

Tabela 38 – Resultado da estimação com o painel E